1955 г. т. X, вып. 2 (64)

УСПЕХИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

# ЛЕММА О ПРЕДЕЛЕ СЛОЖНОЙ СЛУЧАЙНОЙ ФУНКЦИИ

Р. Л. Добрушин

В теории вероятностей довольно часто возникает следующая схема. Имеется последовательность случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$, причём известно предельное поведение $\zeta_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$. Кроме того, задана последовательность величин $\gamma_k$, не зависящих от величин $\xi_i$. Изучается асимптотическое поведение сумм случайного числа случайных величин $\eta_k = \xi_1 + \ldots + \xi_{\gamma_k}$. Например, в работах Роббинса [1], [2] методом характеристических функций исследуется случай взаимно независимых $\xi_i$.

Цель данной заметки — указать, что, основываясь на нескольких простых замечаниях и аксиоматике теории вероятностей, можно свести эту задачу к рассмотрениям обычного анализа и сформулировать теорему, являющуюся теоретико-вероятностным аналогом теоремы о пределе сложной функции обычного анализа.

Теорема. *Пусть* $\zeta(t)$ — *последовательность случайных величин такая, что при* $t \to \infty$

$$P\left\{\frac{\zeta(t) - at^{\alpha}}{bt^{\beta}} < x\right\} \to F(x), \tag{1}$$

*где* $F(x)$ — *собственная функция распределения,* $\alpha > \beta$ *и* $b \neq 0$ [1]) *и* $\tau_n$ — *последовательность случайных величин, не зависящих от величин* $\zeta(t)$, *такая, что при* $n \to \infty$

$$P\left\{\frac{\tau_n - cn^{\gamma}}{dn^{\delta}} < x\right\} \to G(x), \tag{2}$$

*где* $G(x)$ — *собственная функция распределения,* $\gamma > \delta > 0$ и $d \neq 0$, *тогда*

$$P\left\{\frac{\zeta(\tau_n) - gn^{\lambda}}{hn^{\mu}} < x\right\} \to H(x), \tag{3}$$

*где постоянные* $g$, $h$, $\lambda$, $\mu$ *и функция* $H(x)$ *описываются следующим обра-*

[1]) Предположение о степенном росте нормирующих параметров несущественно и принято лишь для упрощения формулировки теоремы.

*зом: пусть* $\bar{\zeta}$, $\bar{\tau}$ — *независимые случайные величины и* $\bar{\zeta}$ *имеет распределение* $F(x)$, *а* $\bar{\tau}$ — *распределение* $G(x)$, *тогда*

I) *Если* $a \neq 0$, $c \neq 0$ *и* $\gamma\beta > \gamma(\alpha - 1) + \delta$ *или же* $a = 0$, *но* $c \neq 0$, *то*

$$\left.\begin{array}{ll} \lambda = \gamma\alpha, & g = ac^{\alpha}, \\ \mu = \gamma\beta, & h = bc^{\beta}, \end{array} \quad H(x) = F(x). \right\} \tag{4}$$

II) *Если* $a \neq 0$, $c \neq 0$ *и* $\gamma(\alpha - 1) + \delta > \gamma\beta$, *то*

$$\left.\begin{array}{ll} \lambda = \gamma\alpha, & g = ac^{\alpha}, \\ \mu = \gamma(\alpha - 1) + \delta, & h = \alpha ac^{\alpha-1}d, \end{array} \quad H(x) = G(x). \right\} \tag{5}$$

III) *Если* $a \neq 0$, $c \neq 0$ *и* $\gamma(\alpha - 1) + \delta = \gamma\beta$, *то*

$$\left.\begin{array}{ll} \lambda = \gamma\alpha, & g = ac^{\alpha}, \\ \mu = \gamma\beta, & h = 1, \end{array} \quad H(x) = P\{\alpha ac^{\alpha-1}d\bar{\tau} + bc^{\beta}\bar{\zeta} < x\}. \right\} \tag{6}$$

IV) *Если* $a \neq 0$, $c = 0$, *то*

$$\left.\begin{array}{ll} g = 0, & \\ \mu = \alpha\delta, & h = ad^{\alpha}, \end{array} \quad H(x) = P\{\bar{\tau}^{\alpha} < x\}. \right\} \tag{7}$$

V) *Если* $a = 0$, $c = 0$, *то*

$$\left.\begin{array}{ll} g = 0, & \\ \mu = \beta\delta, & h = bd^{\beta}, \end{array} \quad H(x) = P\{\bar{\zeta}\,\bar{\tau}^{\beta} < x\}. \right\} \tag{8}$$

Доказательство этого утверждения очень просто — оно основано на следующем замечании: если последовательность функций распределения $K_n(x) \to K(x)$ в смысле слабой сходимости, то можно построить последовательность случайных величин $\varkappa_n$ таких, чтобы $P\{\varkappa_n < x\} = K_n(x)$ и $\varkappa_n$ сходились по мере к величине $\varkappa$ такой, что $P\{\varkappa < x\} = K(x)$. Для этого достаточно взять за пространство элементарных событий отрезок $[0, 1]$ и положить $\varkappa_n(y) = K_n^{-1}(y)$, где $K_n^{-1}(y)$ — функция, обратная к функции $K_n(x)$.

Возьмём теперь за множество элементарных событий единичный квадрат плоскости $U$, $V$. На отрезке $[0, 1]$ оси $U$ построим последовательность случайных величин $\varphi(t)$, имеющих то же распределение, что и величины $\frac{\zeta(t) - at^{\alpha}}{bt^{\beta}}$, и сходящихся по мере к величине $\bar{\zeta}$, имеющей распределение $F(x)$, и на отрезке $[0, 1]$ оси $V$ — последовательность величин $\psi_n$, имеющих распределение то же, что и $\frac{\tau_n - cn^{\gamma}}{dn^{\delta}}$, и сходящихся по мере к $\bar{\tau}$, имеющей распределение $G(x)$. Продолжим эти случайные величины на весь квадрат, положив $\varphi_n(u, v) = \varphi_n(u, 0)$, $\psi_n(u, v) = \psi_n(0, v)$, $\bar{\zeta}(u, v) = \bar{\zeta}(u, 0)$, $\bar{\tau}(u, v) = \bar{\tau}(0, v)$. Очевидно, что величины $\tilde{\zeta}(t) = at^{\alpha} + bt^{\beta}\varphi_n$ имеют распределение то же, что и $\zeta(t)$, величины $\tilde{\tau}_n = cn^{\gamma} + dn^{\delta}\psi_n$ имеют то же распределение, что и $\tau_n$, и величины $\tilde{\zeta}(t)$ и $\tilde{\tau}_n$ взаимно независимы. Поэтому величины $\tilde{\zeta}(\tilde{\tau}_n)$ и $\zeta(\tau_n)$ распределены одинаково, и изучение $\zeta(\tau_n)$ можно заменить изучением $\tilde{\zeta}(\tilde{\tau}_n)$. Но в смысле обычной сходимости по мере

$$\left.\begin{aligned}\tilde{\zeta}(t) &= at^\alpha + bt^\beta\bar{\zeta} + o(t^\beta),\\ \tilde{\tau}_n &= cn^\gamma + dn^\delta\bar{\tau} + o(n^\delta)\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

и

$$\begin{aligned}\tilde{\zeta}(\tilde{\tau}_n) = a\,(cn^\gamma + dn^\delta\bar{\tau} + o(n^\delta))^\alpha + \\ + b\bar{\zeta}\,(cn^\gamma + dn^\delta\bar{\tau} + o(n^\delta))^\beta + o\,([cn^\gamma + dn^\delta\bar{\tau} + o(n^\delta)]^\beta),\end{aligned} \tag{10}$$

где $\bar{\zeta}$ и $\bar{\tau}$ — независимые случайные величины, имеющие функции распределения $F(x)$ и $G(x)$. Так как для предельных переходов в смысле сходимости по мере справедливы все правила классического анализа, то, разложив (10) по степеням $n$ и выбрав члены старшего порядка, мы получим все случаи нашей теоремы.

Поступило в редакцию 27 сентября 1954 г.

## ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА


[1] H. Robbins, On the asymptotic distribution of the sum of random number of random variables, Proc. Nat. Acad. Sci. USA 34 (1948), 162—163.

[2] H. Robbins, The asymptotic distribution of the sum of a random variables, Bull. Am. Math. Soc. 54 (1948), 1151—1161.