Алгебра и логика, 29, № 2(1990),220-240

УДК 510.5

ИНДЕКСНЫЕ МНОЖЕСТВА КЛАССОВ ГИПЕР-ГИПЕРПРОСТЫХ МНОЖЕСТВ

В.Л.СЕЛИВАНОВ

В [4] высказана гипотеза о том, что индексное множество любого элементарного в решетке рекурсивно-перечислимых множеств (р.п.м.) $(\mathcal{E};\subseteq)$ предиката универсально в одном из конечных уровней введенных в [4] иерархий. В [7] эта гипотеза подтверждена для одного класса предикатов, введенного А.Лахланом [5]. В этой работе будет найдена сложность многих естественных классов гипер-гиперпростых множеств. Основными являются теоремы 5 и 6, в которых рассматриваются классы, элементарные в $(\mathcal{E};\subseteq)$. Они подтверждают указанную гипотезу для нового класса предикатов. Это также дает первые примеры элементарных подклассов $\mathcal{E}$, индексные множества которых универсальны в любом уровне арифметической иерархии. Отсюда следует, что элементарная теория $\mathrm{Th}(\mathcal{E})$ не имеет элиминации кванторов, т.е. для любого n найдется формула в языке $\{\subseteq\}$ с одной свободной переменной, не эквивалентная в $\mathrm{Th}(\mathcal{E})$ никакой Σ_n-формуле. В теоремах 1-4 рассматриваются другие классы р.п.м., все они $\mathcal{L}_{\omega_1\omega}$-определимы в $(\mathcal{E};\subseteq)$. Используем идеи и результаты из [6].

§ 1. Гипер-гиперпростые множества, булевы алгебры и деревья

Результаты статьи основаны на двух теоремах из [5]. Для данного р.п.м. A пусть $\mathcal{L}(A)$ - решетка всех р.п. надмножеств A, $\mathcal{L}^*(A)$ - ее факторизация по модулю конечных множеств. Первая теорема Лахлана утверждает, что $\mathcal{H}=\{A\in\mathcal{E}\,|\,\mathcal{L}(A)$ - булева алгебра$\}=\{A\in\mathcal{E}\,|\,\mathcal{L}^*(A)$ - булева алгебра$\}$, где $\mathcal{H}$ - класс всех гипер-гиперпростых и коконечных множеств. С каждым классом булевых алгебр (б.а.) C свяжем индексные множества подклассов $\mathcal{H}$: $h(C)=\{n\,|\,\mathcal{L}(W_n)\in C\}$ и $h^*(C)=\{n\,|\,\mathcal{L}^*(W_n)\in C\}$, где W - стандартная нумерация $\mathcal{E}$. Задачей статьи является вычисление сложности множеств $h(C)$ и $h^*(C)$ для различных классов б.а. C.

Пусть Σ_α, Π_α (α - рекурсивный ординал) - классы гиперарифметической иерархии. Булева алгебра называется Σ_3-б.а., если найдется нумерация ее основного множества, в которой операции $\cup$, $\cap$ и $^-$ представляются рекурсивными функциями, а предикат равенства лежит в Σ_3 (в [5] требуется представимость рекурсивными функциями только для $\cup$ и $\cap$, но эти определения равносильны). Вторая теорема Лахлана утверждает, что для любой Σ_3-б.а. $\mathcal{B}$ найдется р.п.м A такое, что $\mathcal{B} \simeq \mathcal{L}^*(A)$, причем A находится эффективно по Σ_3-номеру $\mathcal{B}$.

Для нас важно введенное в [5] представление б.а. с помощью деревьев. Пусть $\mathcal{U}$ - множество всех конечных последовательностей из нулей и единиц, включая пустую последовательность $\emptyset$; элементы $\mathcal{U}$ обозначаем буквами σ, τ, ρ. Пусть $\sigma * \tau$ - конкатенация последовательностей; $\sigma \subseteq \tau$ означает, что $\sigma * \rho = \tau$ для некоторого ρ; $\mathrm{lh}(\sigma)$ - длина σ; $0^k 1^\ell$ - последовательность из k нулей и ℓ единиц. Деревом называем любой начальный сегмент порядка $(\mathcal{U}; \subseteq)$. Если T - дерево, $\sigma \in \mathcal{U}$ и $F \subseteq \mathcal{U}$, то пусть $\sigma * T = \{\sigma * \tau \mid \tau \in T\}$, $T[\sigma] = \{\tau \in T \mid \sigma \subseteq \tau\}$ и $T[F] = \bigcup_{\sigma \in F} T[\sigma]$. С каждым деревом T свяжем б.а. $\mathrm{al}(T)$ - подалгебру б.а. всех подмножеств T по модулю конечных множеств, образованную классами эквивалентности вида $T[F]^*$, где F - конечное подмножество $\mathcal{U}$. Ясно, что $\mathrm{al}(T)$ имеет естественную нумерацию, индуцированную нумерацией последовательностей, и в ней все булевы операции представляются общерекурсивными функциями (о.р.ф.). Отметим связь между алгоритмическими свойствами T и $\mathrm{al}(T)$.

ЛЕММА 1. *Если $T \in \Pi_3$, то $\mathrm{al}(T) \in \Sigma_3$, причем из Π_3-номера T эффективно находится Σ_3-номер $\mathrm{al}(T)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathrm{Ext}(T) = \{\sigma \mid T[\sigma]$ бесконечно$\}$. Легко видеть, что $\mathrm{al}(T) \simeq \mathrm{al}(S)$, где $S = \mathrm{Ext}(T)$. Действительно, из $S \subseteq T$ следует, что $T[F]^* \longmapsto S[F]^*$ есть гомоморфизм из $\mathrm{al}(T)$ на $\mathrm{al}(S)$, а из леммы Кёнига - что ядро этого гомоморфизма тривиально. Из $T \in \Pi_3$ следует, что найдется рекурсивная относительно $\emptyset'$ функция $f: \mathcal{U} \times \omega \to \omega$ такая, что $f(\tau, s) \leq f(\tau, s+1)$, $\lim_s f(\tau, s) < \omega$ при $\tau \notin T$ и $\lim_s f(\tau, s) = \omega$ при $\tau \in T$. Положим $R = \{\sigma \mid \forall \tau \subseteq \sigma \exists s (f(\tau, s) \geq \mathrm{lh}(\sigma))\}$. Из свойств f получаем $\mathrm{Ext}(R) = \mathrm{Ext}(T)$ (включение $\mathrm{Ext}(T) \subseteq \mathrm{Ext}(R)$ следует из $T \subseteq R$, а обратное включение - из леммы Кёнига). Поэтому $\mathrm{al}(R) \simeq \mathrm{al}(T)$. Мы имеем: $R[\sigma]$ конечно $\leftrightarrow \exists m \forall \tau (\tau \in R[\sigma] \to \mathrm{lh}(\tau) \leq m)$. Поскольку $R \in \Sigma_2$, то отсюда следует, что предикат "$R[\sigma]$ конечно", а значит, и предикат равенства в $\mathrm{al}(R)$ лежат в Σ_3. Лемма доказана.

Введем обозначения, связанные со сводимостью множеств и последовательностей. Запись $B \approx \Sigma_\alpha$ означает, что множество B универсально в Σ_α, а $\Sigma_\alpha \leq B$ - что любое Σ_α-множество m-сводится к B. Запись $\Sigma_\alpha \leq (C, D)$ означает, что для любого $A \in \Sigma_\alpha$ найдется о.р.ф. f такая, что $f(x) \in C$ при $x \in A$ и $f(x) \in D$ при $x \notin A$. Ясно, что из $\Sigma_\alpha \leq (C, D)$ и $C \subseteq B \subseteq \bar{D}$ следует $\Sigma_\alpha \leq B$. Запись $\Pi_\alpha \leq \{B_k\}$ означает, что любая возрастающая Π_α-последовательность $\{A_k\}_{k<\omega}$ m-сводится к $\{B_k\}_{k<\omega}$ [2], т.е. найдется о.р.ф. f такая, что $x \in A_k \leftrightarrow f(x) \in B_k$. Будут нужны также соответствующие обозначения для классов б.а. $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$. Так, $\Sigma_\alpha \leq (\mathcal{C}, \mathcal{D})$ означает, что для любого оракула a и любого $A \in \Sigma_\alpha^a$ найдется рекурсивная относительно a последовательность деревьев $\{T_x\}$ такая, что $\mathrm{al}(T_x) \in \mathcal{C}$ при $x \in A$ и $\mathrm{al}(T_x) \in \mathcal{D}$ при $x \notin A$. Если $\{\mathcal{C}_k\}$ - последовательность классов б.а., то $\Pi_\alpha \leq \{\mathcal{C}_k\}$ означает, что для любого a и любой возрастающей Π_α^a-последовательности $\{A_k\}$ найдется рекурсивная относительно a последовательность деревьев $\{T_x\}$ такая, что $x \in A_k \leftrightarrow \mathrm{al}(T_x) \in \mathcal{C}_k$. Приводимые в статье построения деревьев будут равномерны относительно оракула a, поэтому для простоты обозначений далее оракул a не упоминается.

Отметим связь между введенными понятиями, которая позволяет сводить вопросы об индексных множествах к вопросам о деревьях.

ЛЕММА 2. *При $\alpha > 0$ из $\Sigma_\alpha \leq (\mathcal{C}, \mathcal{D})$ следует $\Sigma_{2+\alpha} \leq (h^*(\mathcal{C}), h^*(\mathcal{D}))$ и из $\Pi_\alpha \leq \{\mathcal{C}_k\}$ следует $\Pi_{2+\alpha} \leq \{h^*(\mathcal{C}_k)\}$.*

Первое утверждение, по существу, доказано в [6]. Докажем второе. При $\alpha \geq \omega$ имеем $2+\alpha = \alpha$, поэтому надо проверить $\Pi_\alpha \leq \{h^*(\mathcal{C}_k)\}$. Пусть $\{A_k\}$ - возрастающая Π_α-последовательность. По условию найдется рекурсивная последовательность деревьев $\{T_x\}$ такая, что $x \in A_k \leftrightarrow \mathrm{al}(T_x) \in \mathcal{C}_k$. По второй теореме Лахлана найдется о.р.ф. f такая, что $L^* W_{f(x)} \simeq \mathrm{al}(T_x)$. Отсюда $x \in A_k \leftrightarrow f(x) \in h^*(\mathcal{C}_k)$, что и требовалось. Пусть $\alpha < \omega$ и $\{A_k\}$ - возрастающая $\Pi_{2+\alpha}$-последовательность. Из $\Pi_{2+\alpha} = \Pi_\alpha^{\emptyset^{(2)}}$ и $\Pi_\alpha \leq \{\mathcal{C}_k\}$ следует, что существует рекурсивная относительно $\emptyset^{(2)}$ последовательность деревьев $\{T_x\}$ такая, что $x \in A_k \leftrightarrow \mathrm{al}(T_x) \in \mathcal{C}_k$. По лемме 1, $\{\mathrm{al}(T_x)\}$ есть Σ_3-последовательность б.а. По теореме Лахлана, опять найдется о.р.ф. f такая, что $L^*(W_{f(x)}) \simeq (T_x)$. Лемма доказана.

С произвольной б.а. $\mathcal{B}$ свяжем следующие идеалы: $A(\mathcal{B})$, состоящий из всех атомных элементов, $Б(\mathcal{B})$, состоящий из всех из всех безатомных элементов; $\Phi(\mathcal{L})$, состоящий из всех конечных объединений атомов; $\Phi Б(\mathcal{L})$, состоящий из всех элементов, являющихся объединением конечного числа атомов и безатомного элемента; $АБ(\mathcal{L})$, состоящий из всех элементов, являющихся объединением атомного и безатомного элементов.

Посмотрим, как эти понятия выражаются на языке деревьев. Деревья вида $T(\sigma)=\{\tau \mid \sigma * \tau \in T\}$ будем называть ветками дерева T уровня $lh(\sigma)$. Дерево T изолировано, если Ext (T) непусто и линейно упорядочено. Непустое дерево T совершенно, если для любого $\sigma \in T$ найдутся несравнимые $\tau_1, \tau_2 \in T$, расширяющие σ. Дерево T называется почти совершенным, если Ext (T) совершенно. Следующая лемма вытекает из определения al (T). Пусть $|A|$ - мощность A.

ЛЕММА 3. *Справедливы следующие равносильности:* $T\cdot[\sigma]^*$ *- атом в* al(T) $\leftrightarrow T(\sigma)$ *изолировано;* $|\mathrm{al}(T)|=2^k \leftrightarrow$ *существует уровень, на котором ровно* k *веток дерева* T *изолированы, а остальные конечны;* al(T) *безатомна* $\leftrightarrow$ al $T=Б(\mathrm{al}\,T) \leftrightarrow T$ *конечно или почти совершенно;* al(T) *атомна* $\leftrightarrow$ al$T = A(\mathrm{al}\,T) \leftrightarrow T$ *не имеет почти совершенных веток;* al$T = \Phi Б(\mathrm{al}\,T) \leftrightarrow$ *существует уровень, на котором каждая ветка в* T *конечна, изолирована или почти совершенна;* al $T = АБ(\mathrm{al}\,T) \leftrightarrow$ *существует уровень, на котором каждая ветка в* T *почти совершенна или не имеет почти совершенных веток.*

Далее нас интересуют идеалы Φ, ФБ и АБ. Каждую конструкцию, сопоставляющую произвольной б.а. $\mathcal{L}$ ее идеал $I(\mathcal{L})$, можно известным образом проитерировать по ординалам. Положим $I_0(\mathcal{L})=\{0\}$, $I_{\alpha+1}(\mathcal{L})=\pi^{-1}(I(\mathcal{L}^{(\alpha)}))$ где π - каноническая проекция $\mathcal{L}$ на $\mathcal{L}^{(\alpha)}=\mathcal{L}/I_\alpha(\mathcal{L})$, и $I_\lambda(\mathcal{L})=\bigcup_{\alpha<\lambda} I_\alpha(\mathcal{L})$ для предельного λ. С любым $I \in \{\Phi, \Phi Б, АБ\}$ свяжем операцию на деревьях $D_I(T)=\{\sigma \mid T[\sigma]^* \notin I(\mathrm{al}T)\}$. Ясно, что $D_I(T)$ - поддерево дерева T. Эти операции также можно итерировать: $D^0(T)=T$, $D^{\alpha+1}(T)=D(D^\alpha(T))$ и $D^\lambda(T)=\bigcap_{\alpha<\lambda} D^\alpha(T)$. По индукции проверяется, что $D^\beta(D^\alpha(T))=D^{\alpha+\beta}(T)$ и $D^\beta(T)\subseteq D^\alpha(T)$ при $\alpha \le \beta$. Установим связь между $D_I^\alpha(T)$ и идеалом I_α (al T).

ЛЕММА 4. *Пусть* $I \in \{\Phi, \Phi Б, АБ\}$ *и* $D=D_I$. *Тогда* $\mathrm{al}(T)^{(\alpha)} \simeq \mathrm{al}(D^\alpha(T))$ *и* $D^\alpha(T)=\{\sigma \mid \mathrm{al}\,T(\sigma) \ne I_\alpha(\mathrm{al}\,T(\sigma))\}$ *при всех* $\alpha>0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно проверить, что

$$\sigma \notin D^\alpha(T) \leftrightarrow T[\sigma]^* \in I_\alpha(\mathrm{al}\,T) \leftrightarrow \mathrm{al}\,T(\sigma) = I_\alpha(\mathrm{al}\,T(\sigma)). \qquad (1)$$

Отсюда сразу следует равенство для $D^\alpha(T)$. Проверим, что $\mathrm{al}(T)^{(\alpha)} \simeq \mathrm{al}(D^\alpha(T))$. Поскольку $D^\alpha(T) \subseteq T$, отображение $\varphi(T[F]^*)=D^\alpha(T)[F]^*$ есть гомоморфизм из al(T) на al$D^\alpha(T)$. Индукцией по α с использованием леммы 3 легко проверяется, что из $\sigma\in\mathcal{D}^{\alpha}(T)$ следует $\sigma*i\in\mathcal{D}^{\alpha}(T)$ для некоторого i. Поэтому из (1) следует $T[F]^*\in I_{\alpha}(\mathrm{al}\,T)\leftrightarrow\forall\sigma\in F\,(\sigma\notin\mathcal{D}^{\alpha}(T))\leftrightarrow$ $\leftrightarrow\mathcal{D}^{\alpha}(T)[F]$ конечно. Это означает, что ядро φ совпадает с $I_{\alpha}(\mathrm{al}\,T)$, т.е. $\mathrm{al}\,(T)^{(\alpha)}\sim\mathrm{al}\,\mathcal{D}^{\alpha}(T)$.

Остается проверить (1). Пусть $\mathcal{B}$ - главный идеал, порожденный элементом $T[\sigma]^*$ в $\mathrm{al}\,(T)$. Тогда $T[\sigma]^*\in I_{\alpha}(\mathrm{al}\,T)\leftrightarrow\mathcal{B}\subseteq I_{\alpha}(\mathrm{al}\,T)\leftrightarrow\mathcal{B}=I_{\alpha}(\mathcal{B})$, поскольку $I_{\alpha}(\mathcal{B})=\mathcal{B}\cap I_{\alpha}(\mathrm{al}\,T)$ (см. [3, гл. 2] .). Поэтому для доказательства правой равносильности в (1) достаточно проверить равносильность условий $\mathcal{B}=I_{\alpha}(\mathcal{B})$ и $\mathrm{al}\,T(\sigma)=I_{\alpha}(\mathrm{al}\,T(\sigma))$, а для этого достаточно установить изоморфизм $\mathrm{al}\,T(\sigma)$ и $\mathcal{B}$. Легко видеть, что изоморфизм индуцируется отображением $T(\sigma)[\tau]\mapsto T[\sigma*\tau]$.

Левая равносильность в (1) проверяется индукцией по α. При $\alpha=1$ она получается по определению $\mathcal{D}$. Пусть для $\alpha\geq 1$ утверждение доказано, φ - указанный выше гомоморфизм $\mathrm{al}\,(T)$ на $\mathrm{al}\,\mathcal{D}^{\alpha}(T)$, π - каноническая проекция $\mathrm{al}\,(T)$ на $\mathrm{al}\,(T)^{(\alpha)}$ и ψ - изоморфизм $\mathrm{al}\,\mathcal{D}^{\alpha}(T)$ на $\mathrm{al}\,(T)^{(\alpha)}$ такой, что $\pi=\psi\circ\varphi$. Используя (1) для α и для 1, получаем последовательно равносильность условий $\sigma\notin\mathcal{D}^{\alpha+1}(T)=\mathcal{D}(\mathcal{D}^{\alpha}(T)),\varphi(T[\sigma]^*)=\mathcal{D}^{\alpha}(T)[\sigma]^*\in$ $\in I(\mathrm{al}\,\mathcal{D}^{\alpha}(T)),\pi(T[\sigma]^*)\in I(\mathrm{al}\,(T)^{(\alpha)})$ и $T[\sigma]^*\in I_{\alpha+1}(\mathrm{al}\,T)$. Это доказывает утверждение для $\alpha+1$. Для предельного λ имеем $\sigma\notin\mathcal{D}^{\lambda}(T)\leftrightarrow\exists\alpha<$ $<\lambda(\sigma\notin\mathcal{D}^{1+\alpha}(T))\leftrightarrow\exists\alpha<\lambda\,(T[\sigma]^*\in I_{1+\alpha}(\mathrm{al}\,T))\leftrightarrow T[\sigma]^*\in I_{\lambda}(\mathrm{al}\,T)$.

Лемма доказана.

§ 2. Идеал Φ

Для любого ординала α и любого $k<\omega$ определим класс б.а. $\mathcal{A}_k^{\alpha}=$ $=\{\mathcal{B}:|\mathcal{B}^{(\alpha)}|\leq 2^k\}$, где $\mathcal{B}^{(\alpha)}=\mathcal{B}/\Phi_{\alpha}(\mathcal{B})$. Из определения $\Phi(\mathcal{B})$ и $\Phi_{\alpha}(\mathcal{B})$ следует, что $\mathcal{A}_k^{\alpha}\subseteq\mathcal{A}_m^{\beta}$ при $(\alpha,k)\leq(\beta,m)$ ($\leq$ - лексикографический порядок), $\mathcal{A}_0^{\alpha+1}=\bigcup_k\mathcal{A}_k^{\alpha}$ и $\mathcal{A}_0^{\lambda}=\bigcup_{\alpha<\lambda}\mathcal{A}_0^{\alpha}$ для предельного λ. Положим еще $\tilde{\mathcal{A}}_{k+1}^{\alpha}=\mathcal{A}_{k+1}^{\alpha}\setminus\mathcal{A}_k^{\alpha}$. Известно [1, 3], что $\bigcup_{\alpha,k}\mathcal{A}_k^{\alpha}$ есть класс всех суператомных б.а. Из [1] следует, что $h(\bigcup_{\alpha,k}\mathcal{A}_k^{\alpha})=h(\mathcal{C})$, где $\mathcal{C}=$ $=\bigcup\{\mathcal{A}_k^{\alpha}\mid\alpha$ - рекурсивный ординал и $k<\omega\}$. Основным результатом параграфа является

ТЕОРЕМА 1. *Пусть α - рекурсивный ординал. Множество $h(\mathcal{A}_0^0)$ универсально в Π_2, множество $h(\mathcal{A}_0^{\alpha})$ при $\alpha>0$ универсально в $\Sigma_{2\alpha+1}$, после-*

довательность $\{h(\mathcal{A}^{\alpha}_{K+1})\}_K$ *при любом* α *универсальна в классе всех возрастающих* $\Pi_{2\alpha+2}$*-последовательностей.*

Эта теорема расширяет основную теорему В из [6] , поскольку из первой теоремы Лахлана следует, что множества At_{α} , QAt_{α} и $At_{<\lambda}$ из [6] совпадают соответственно с нашими $h(\mathcal{A}^{\alpha}_1)$, $h(\mathcal{A}^{\alpha+1}_0)$ и $h(\mathcal{A}^{\lambda}_0)$. Далее буквы α и β обозначают всегда произвольные рекурсивные, а λ - предельные рекурсивные ординалы.

Докажем ряд вспомогательных утверждений. Пусть $\mathcal{D}=\mathcal{D}_{\Phi}$, см. § 1.

ЛЕММА 5. 1) *Условия* al$\mathcal{D}^{\alpha}(T)\in\mathcal{A}^{\beta}_K$ *и* al$\mathcal{D}^{\alpha+\beta}(T)\in\mathcal{A}^{0}_K$ *равносильны при всех* α , β *и* K ; 2) $\mathcal{D}^{\alpha}(T)(\sigma)=\mathcal{D}^{\alpha}(T(\sigma))$ *при любом* $\sigma\in\mathcal{U}$; 3) *если* al $(T)\in\mathcal{A}^{\alpha}_K$, *то* al$T(\sigma)\in\mathcal{A}^{\alpha}_K$ *при любом* $\sigma\in\mathcal{U}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из леммы 4 вытекает равносильность следующих условий: al $\mathcal{D}^{\alpha}(T)\in\mathcal{A}^{\beta}_K$, $|\text{al}\,(\mathcal{D}^{\alpha}(T))^{(\beta)}|<2^K$, $|\text{al}\mathcal{D}^{\alpha+\beta}(T)|\leq 2^K$ и al $\mathcal{D}^{\alpha+\beta}(T)\in\mathcal{A}^{0}_K$. Это доказывает 1). Утверждение 2) проверяется очевидной индукцией по α с использованием равенства $T(\sigma)(\tau)=T(\sigma*\tau)$. Пусть al $(T)\in\mathcal{A}^{\alpha}_K$, тогда $|\text{al}\mathcal{D}^{\alpha}(T)|\leq 2^K$. По лемме 3 найдется уровень, на котором не более K веток дерева $\mathcal{D}^{\alpha}(T)$ изолированы, а остальные конечны. Ясно, что дерево $\mathcal{D}^{\alpha}(T)(\sigma)=\mathcal{D}^{\alpha}(T(\sigma))$ также обладает этим свойством. Отсюда $|\text{al}\mathcal{D}^{\alpha}(T(\sigma))|\leq 2^K$, al $\mathcal{D}^{\alpha}(T(\sigma))\in\mathcal{A}^{0}_K$ и al$T(\sigma)\in\mathcal{A}^{\alpha}_K$. Лемма доказана.

Далее важную роль играет операция, сопоставляющая произвольной последовательности деревьев $\{T_K\}_{K<\omega}$ дерево $\bigsqcup\limits_K T_K=V\cup(\bigcup\limits_K 0^K1*T_K)$, где $V=\{0^K\mid K<\omega\}$. Вместо $\bigsqcup\limits_K T_K$ иногда удобнее писать $\bigsqcup\{T_0,T_1,\ldots\}$. Ясно, что $V\subseteq\bigsqcup T_K$, $(\bigsqcup\limits_K T_K)(0^i1)=T_i$, и если T - произвольное дерево, содержащее V , то $T=\bigsqcup\limits_K T(0^K1)$. Ясно также, что если последовательность $\{T_K\}$ рекурсивна, то дерево $\bigsqcup T_K$ также рекурсивно. Последовательность деревьев $\{T_K\}$ назовем конфинальной в $\mathcal{A}^{\alpha}_0$, если она содержится в $\mathcal{A}^{\alpha}_0$, но не содержится ни в каком $\mathcal{A}^{\beta}_K$, $\beta<\alpha$. Здесь и далее вместо громоздкой записи al$(T_K)\in\mathcal{A}^{\alpha}_m$ пишем $T_K\in\mathcal{A}^{\alpha}_m$.

ЛЕММА 6. 1) *Если* $\{T_i\}$ *- последовательность деревьев из* $\mathcal{A}^{\alpha}_1$, *имеющая конфинальную в* $\mathcal{A}^{\alpha}_0$ *подпоследовательность, то условия* $|\{i\mid T_i\in\tilde{\mathcal{A}}^{\alpha}_1\}|\leq K$ *и* $\bigsqcup T_i\in\mathcal{A}^{\alpha}_{K+1}$ *равносильны при любом* $K<\omega$; 2) *если* $T_i\in\mathcal{A}^{\alpha}_1$ *для всех* i *и* $T_i\in\tilde{\mathcal{A}}^{\alpha}_1$ *для бесконечно многих* i , *то* $\bigsqcup T_i\in\tilde{\mathcal{A}}^{\alpha+1}_1$; 3) *для любого* α *найдется рекурсивная последовательность деревьев, конфинальная в* $\mathcal{A}^{\alpha}_0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Проверим равенство $\mathcal{D}^{\alpha}(T)=\bigsqcup\limits_i\mathcal{D}^{\alpha}(T_i)$, где $T=\bigsqcup T_i$.

По лемме 5, $\mathcal{D}^\alpha(T)(0^i 1)=\mathcal{D}^\alpha(T(0^i 1))=\mathcal{D}^\alpha(T_i)$, поэтому остается проверить $V\subseteq\mathcal{D}^\alpha(T)$. Допустим противное: $0^m\notin\mathcal{D}^\alpha(T)$ для некоторых m и $\alpha>0$. По лемме 4, a) $T(0^m)\in\Phi_\alpha(\text{a)}T(0^m))$, т.е. $T(0^m)\in\mathcal{A}_0^\alpha$, $T(0^m)\in\mathcal{A}_a^\beta$ для некоторого $(\beta,a)<(\alpha,0)$. По лемме 5, $T_j=T(0^j 1)\in\mathcal{A}_a^\beta$ при $j\geq m$. Это противоречит тому, что $\{T_i\}$ имеет конфинальную в $\mathcal{A}_0^\alpha$ подпоследовательность.

Из доказанного равенства и леммы 5 следует, что достаточно доказать 1) для $\alpha=0$. Пусть $|\{i|T_i\in\tilde{\mathcal{A}}_1^0\}|=\ell\leq k$. По лемме 3 в последовательности $\{T_i\}$ ℓ деревьев изолированы, а остальные конечны. По определению $\sqcup T_i$, найдется уровень, на котором $\ell+1$ ветка в T изолирована, а остальные конечны (дополнительная изолированная ветка получается за счет $V\subseteq T$). Отсюда $T\in\tilde{\mathcal{A}}_{\ell+1}^0\subseteq\mathcal{A}_{k+1}^0$ по лемме 3. Так же проверяется, что из $|\{i|T_i\in\tilde{\mathcal{A}}_1^0\}|>k$ следует $T\notin\mathcal{A}_{k+1}^0$. Утверждение 2) проверяется аналогично.

Утверждение 3) проверяется индукцией по α. При $\alpha=0$ годится последовательность $\{\emptyset,\emptyset,\dots\}$. Пусть $\{T_n\}$ - рекурсивная последовательность, конфинальная в $\mathcal{A}_0^\alpha$. Положим $S_0=\sqcup T_n$, $S_1=\sqcup\{S_0,T_0,T_1,\dots\}$, $S_2=\sqcup\{S_0,S_0,T_0,T_1,\dots\}$ и т.д. Из 1) следует $S_k\in\tilde{\mathcal{A}}_{k+1}^\alpha$, т.е. $\{S_k\}$ - рекурсивная последовательность, конфинальная в $\mathcal{A}_0^{\alpha+1}$. Для предельного λ пусть $\{T_{\alpha,n}\}_n$ при любом $\alpha<\lambda$ есть последовательность, конфинальная в $\mathcal{A}_0^\alpha$. Последовательность $\{T_{\alpha,n}\}$ можно считать рекурсивной по обоим номерам, поэтому найдется рекурсивная последовательность деревьев $\{S_k\}$ такая, что $\{S_k|k<\omega\}=\{T_{\alpha,n}|\alpha<\lambda,n<\omega\}$. Ясно, что $\{S_k\}$ конфинальна в $\mathcal{A}_0^\lambda$. Лемма доказана.

ЛЕММА 7. *Справедливы следующие соотношения: 1)* $\Pi_2\leq\{h(\mathcal{A}_k^0)\}$; *2)* $\Sigma_2\leq(\mathcal{A}_0^0,\tilde{\mathcal{A}}_1^0)$; *3) если* $\Sigma_{2\alpha+1}\leq(\mathcal{A}_0^\alpha,\tilde{\mathcal{A}}_1^\alpha)$, *то* $\Pi_{2\alpha+2}\leq\{\mathcal{A}_{k+1}^\alpha\}_k$ *и* $\Sigma_{2\alpha+3}\leq(\mathcal{A}_0^{\alpha+1}\setminus\mathcal{A}_n^\alpha,\tilde{\mathcal{A}}_1^{\alpha+1})$ *при любом* $n<\omega$; *4) если* $\Sigma_{2\alpha+1}\leq(\mathcal{A}_0^\alpha,\tilde{\mathcal{A}}_1^\alpha)$ *при всех* $\alpha<\lambda$ *равномерно по* α, *то* $\Sigma_{\lambda+1}\leq(\mathcal{A}_0^\lambda\setminus\mathcal{A}_0^\beta,\tilde{\mathcal{A}}_1^\lambda)$ *при любом* $\beta<\lambda$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем $x\in h(\mathcal{A}_k^0)\leftrightarrow|L(W_x)|\leq 2^k\leftrightarrow|\overline{W}_x|\leq k$. Поэтому для доказательства 1) достаточно по любой возрастающей Π_2- последовательности $\{A_k\}$ найти вычислимую последовательность р.п.м. $\{B_x\}$ такую, что $x\in A_k\leftrightarrow|\overline{B}_x|\leq k$. Пусть о.р.ф. $g(x,k,s)$ такова, что $g(x,k,s)\leq g(x,k,s+1)$, $\lim_s g(x,k,s)<\omega$ при $x\notin A_k$ и $\lim_s g(x,k,s)=\omega$ при $x\in A_k$. Построим равномерно по x вычислимую последовательность конечных множеств

$\{B_x^s\}_s$ такую, что $B_x = \bigcup_s B_x^s$. Пусть $B_x^0 = \emptyset$, $B_x^{s+1} = B_x^s$ при $\forall k \le s\, (g(x, k, s) = g(x, k, s+1))$ и B_x^{s+1} получается добавлением к B_x^s k-го по величине элемента из $\overline{B_x^s}$ в противном случае, где k - наименьшее число, для которого $g(x,k,s) \ne g(x,k,s+1)$. Построение закончено.

Пусть $x \in A_k$ и ℓ - наименьшее число, для которого $x \in A_\ell$. Из построения и свойств. g получаем $|\overline{B}_x| = \ell \le k$. Аналогично при $x \notin A_k$ получим $|\overline{B}_x| > k$.

2) Пусть $A \in \Sigma_1$ и $\{A^s\}$ - перечисление A по шагам. Положим $T_x^0 = \emptyset$, $T_x^{s+1} = T_x^s$ при $x \in A^s$ и $T_x^{s+1} = T_x^s \cup \{0^s\}$ при $x \notin A^s$. Тогда при $x \in A$ дерево T_x конечно, $T_x \in \mathcal{A}_0^0$, а при $x \notin A$ - $T_x = V \in \tilde{\mathcal{A}}_1^0$.

3) Пусть $\{A_k\}$ - возрастающая $\Pi_{2\alpha+2}$-последовательность. Имеем $\Pi_{2\alpha+2} = \Pi_2^{\emptyset^{(2\alpha)}}$. Релятивизуя доказательство 1) относительно $\emptyset^{(2\alpha)}$, получим $\Sigma_{2\alpha+1}$-последовательность $\{B_x\}$ такую, что $x \in A_k \leftrightarrow |\overline{B}_x| \le k$. По условию найдется рекурсивная последовательность деревьев $\{T_{x,i}\}$ такая, что $T_{x,i} \in \mathcal{A}_0^\alpha$ при $i \in B_x$ и $T_{x,i} \in \tilde{\mathcal{A}}_1^\alpha$ при $i \notin B_x$. Положим $T_x = \sqcup\{S_0, T_{x,0}, S_1, T_{x,1}, \dots\}$, где $\{S_n\}$- рекурсивная конфинальная в $\mathcal{A}_0^\alpha$ последовательность. Из леммы 6 и равномощности множеств $\overline{B}_x$ и $\{i \mid T_{x,i} \in \tilde{\mathcal{A}}_1^\alpha\}$ получаем $x \in A_k \leftrightarrow T_x \in \mathcal{A}_{k+1}^\alpha$, что доказывает соотношение $\Pi_{2\alpha+2} \le \{\mathcal{A}_{k+1}^\alpha\}$. Заметим, что $T_x \notin \mathcal{A}_0^\alpha$ при любом x.

Пусть $A \in \Sigma_{2\alpha+3}$. Тогда $A = \cup A_k$ для подходящей возрастающей $\Pi_{2\alpha+2}$ - последовательности $\{A_k\}$. В обозначениях предыдущего абзаца положим $R_x = \sqcup\{Q_0, \dots, Q_n, S_0, T_{x,0}, S_1, T_{x,1}, \dots\}$, где $Q_i \in \tilde{\mathcal{A}}_1^\alpha$. Последнее по лемме 6 гарантирует, что $R_x \notin \mathcal{A}_n^\alpha$. При $x \in A$ множество $\overline{B}_x$ конечно и $R_x \in \mathcal{A}_0^{\alpha+1}$, а при $x \notin A$ множество $\overline{B}_x$ бесконечно и $R_x \in \tilde{\mathcal{A}}_1^{\alpha+1}$ по лемме 6.2.

Утверждение 4) содержится в доказательстве теоремы B из [6]. Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Имеем $x \in h(\mathcal{A}_k^0) \leftrightarrow |\overline{W}_x| \le k$, откуда $h(\mathcal{A}_k^0) \in \Pi_2$ равномерно по k. Вместе с леммой 7.1 это доказывает, что $\{h(\mathcal{A}_k^0)\}$ - универсальная возрастающая Π_2 -последовательность. Остается доказать теорему для $h(\mathcal{A}^{1+\alpha})$. Имеем

$$x \in h(\mathcal{A}_k^{1+\alpha}) \leftrightarrow L(W_x) \in \mathcal{A}_k^{1+\alpha} \leftrightarrow L^*(W_x) = L(W_x)^{(1)} \in \mathcal{A}_k^\alpha \leftrightarrow x \in h^*(\mathcal{A}_k^\alpha).$$

Поэтому оставшиеся утверждения можно переформулировать так: $h^*(\mathcal{A}_0^\alpha)$

универсально в $\Sigma_{2+2\alpha+1}$, а $\{h^*(\mathcal{A}^{\alpha}_{k+1})\}_k$ - универсальная возрастающая $\Pi_{2+2\alpha+2}$-последовательность.

Установим верхние оценки. Ясно, что если $(\mathcal{B},\nu)$ - нумерованная б.а. из Σ_{γ}, то $\nu^{-1}(\Phi(\mathcal{B}))\in\Sigma_{\gamma+2}$. Отсюда по индукции выводится, что если $(\mathcal{B},\nu)\in\Sigma_3$, то $\nu^{-1}(\Phi_{\alpha}(\mathcal{B}))\in\Sigma_{2+2\alpha+1}$, а значит, и $\mathcal{B}^{(\alpha)}\in\Sigma_{2+2\alpha+1}$ при любом α. Известно [5], что $L^*(W_x)\in\Sigma_3$ равномерно по x, поэтому $L^*(W_x)^{(\alpha)}\in\Sigma_{2+2\alpha+1}$ при всех α. Имеем

$$x\in h^*(\mathcal{A}^{\alpha}_0)\longleftrightarrow L^*(W_x)\in\mathcal{A}^{\alpha}_0\longleftrightarrow L^*(W_x)\models 0=1,$$

откуда $h^*(\mathcal{A}^{\alpha}_0)\in\Sigma_{2+2\alpha+1}$. Имеем, далее,

$$x\in h^*(\mathcal{A}^{\alpha}_{k+1})\longleftrightarrow\neg\exists a_0,\dots,a_n\,\forall i,j\leq n\ (i\neq j\longrightarrow\mu(a_i)\neq\mu(a_j)),$$

где $n=2^{k+1}-1$, а μ - естественная нумерация б.а. $L^*(W_x)^{(\alpha)}$. Поскольку "$\mu a=\mu b$" есть $\Sigma_{2+2\alpha+1}$-предикат, то $h^*(\mathcal{A}^{\alpha}_{k+1})\in\Sigma_{2+2\alpha+1}$ равномерно по k.

Установим нижние оценки. Из пунктов 2) - 4) леммы 7 по индукции получается, что $\Sigma_{2\alpha+1}\leq(\mathcal{A}^{\alpha}_0,\tilde{\mathcal{A}}^{\alpha}_1)$ и $\Pi_{2\alpha+2}\leq\{\mathcal{A}^{\alpha}_{k+1}\}_k$ при всех α. По лемме 2, $\Sigma_{2+2\alpha+1}\leq(h^*(\mathcal{A}^{\alpha}_0),h^*(\tilde{\mathcal{A}}^{\alpha}_1))$ и $\Pi_{2+2\alpha+2}\leq\{h^*(\mathcal{A}^{\alpha}_{k+1})\}_k$, что и требовалось доказать. Из доказательства леммы 7.3 следует, что для любой возрастающей $\Pi_{2+2\alpha+2}$-последовательности найдется о.р.ф. f, сводящая ее к $\{h^*(\mathcal{A}^{\alpha}_{k+1})\}$ и такая, что $f(x)\notin\mathcal{A}^{\alpha}_0$ при всех x. Это будет нужно в дальнейшем. Теорема доказана.

Из доказательства можно извлечь дополнительную информацию. Пусть $\mathcal{B}$ - б.а., порожденная классами $\mathcal{A}^{\alpha}_k$ в классе $\mathcal{U}$ всех б.а. Пусть $\Sigma_{\alpha,n}$ и $\Pi_{\alpha,n}$ - классы разностной иерархии Ершова, построенной исходя из Σ_{α}. Известно [2], что существует тесная связь этих классов с универсальными последовательностями. А именно, если $\{A_k\}$ - универсальная возрастающая Π_{α}-последовательность и $B_0\subset\dots\subset B_m$ - ее подпоследовательность, то $\bigcup_{k\leq n}(B_{2k+1}\setminus B_{2k})\approx\Sigma_{\alpha,m+1}$ и $B_0\cup(\bigcup_{k<n}(B_{2k+2}\setminus B_{2k+1}))\cup\bar{B}_m\approx\Pi_{\alpha,m+1}$ при $m=2n+1$,

$B_0 \cup \{\bigcup_{k<n}(B_{2k+2} \setminus B_{2k+1})\} \approx \Pi_{\alpha,m+1}$ и $(\bigcup_{k<n}(B_{2k+1} \setminus B_{2k})) \cup \bar{B}_m \approx \Sigma_{\alpha,m+1}$ при $m=2n$. Заметим, что $\Sigma_{\alpha,0} = \{\emptyset\}$ и $\Sigma_{\alpha,1} = \Sigma_\alpha$.

ТЕОРЕМА 2. *Для любого* $C \in \mathcal{L}$ *множество* $h(C)$ *универсально в одном из классов* $\Sigma_{\alpha,n}, \Pi_{\alpha,n}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из линейной упорядоченности классов $\mathcal{A}_k$ следует, что в точности один из C, $\mathcal{U} \setminus C$ содержится в некотором $\mathcal{A}_k^\alpha$. Поэтому достаточно рассмотреть случай $C \subseteq \mathcal{A}_k^\alpha$ и показать, что множества $h(C)$ и $h(\mathcal{U} \setminus C)$ универсальны в одном из $\Sigma_{\alpha,n}, \Pi_{\alpha,n}$. Легко видеть, что класс C представим в виде $(\mathcal{D}_0 \setminus \mathcal{D}_1) \cup \ldots \cup (\mathcal{D}_{2n} \setminus \mathcal{D}_{2n+1})$, где $\mathcal{D}_0 \supseteq \mathcal{D}_1 \supseteq \ldots$ и $\mathcal{D}_i \in \{\mathcal{A}_k^\alpha, \emptyset \mid \alpha, k\}$. Если $\mathcal{D}_0 = \emptyset$, то $h(C) = \emptyset \approx \Sigma_{1,0}$. Пусть $\mathcal{D}_0 = \mathcal{A}_k^\alpha$. Тогда все включения $\mathcal{D}_i \supseteq \mathcal{D}_{i+1}$ можно считать строгими, так как в противном случае эта пара очевидным образом исключается из представления для C. При $\alpha = 0$ каждое $\mathcal{D}_i$, $i \leqslant 2n$, имеет вид $\mathcal{A}_\ell^0$, а $\mathcal{D}_{2n+1} \in \{\mathcal{A}_m^0, \emptyset \mid m < \omega\}$. Из замечаний перед теоремой 2 и универсальности $\{h(\mathcal{A}_k^0)\}$ получаем, что $h(C) \approx \Sigma_{2,2n+2}$ при $\mathcal{D}_{2n+1} \neq \emptyset$ и $h(C) \approx \Pi_{2,2n+1}$ при $\mathcal{D}_{2n+1} = \emptyset$. Пусть теперь $\mathcal{D}_0 = \mathcal{A}_k^{1+\alpha}$. При $k=0$ получаем $h(C) \approx \Sigma_\gamma$, $\gamma = 2 + 2\alpha + 1$. Верхняя оценка следует из того, что $h(\mathcal{D}_0) \in \Sigma_\gamma$ и $h(\mathcal{D}_{i+1}) \in \Delta_\gamma$ по теореме 1. Далее, $\mathcal{D}_1 \subseteq \mathcal{A}_\ell^\beta$ для подходящих $\beta < 1+\alpha$ и $\ell < \omega$. По лемме 7 и доказательству теоремы 1, тогда $\Sigma_\gamma \leqslant (h(\mathcal{A}_0^{1+\alpha} \setminus \mathcal{A}_\ell^\beta), h(\tilde{\mathcal{A}}_1^{1+\alpha}))$ (при этом случай $\alpha = 0$ надо рассмотреть отдельно). Поскольку $h(\mathcal{A}_0^{1+\alpha} \setminus \mathcal{A}_\ell^\beta) \subseteq h(C) \subseteq h(\bar{\mathcal{A}}_1^{1+\alpha})$, то $\Sigma_\gamma \leqslant h(C)$.

Рассмотрим случай $\mathcal{D}_0 = \mathcal{A}_k^{1+\alpha}$, $k > 0$. Пусть m - наибольшее из чисел $i \leqslant 2n+1$, для которых $\mathcal{D}_i$ имеет вид $\mathcal{A}_\ell^{1+\alpha}$, $\ell > 0$. Утверждаем, что $h(C) \approx \Pi_{\gamma,m+1}$ при четном m и $h(C) \approx \Sigma_{\gamma,m+1}$ при нечетном m, где $\gamma = 2 + 2\alpha + 2$. Верхние оценки следуют из того, что, по теореме 1, $h(\mathcal{D}_i) \in \Pi_\gamma$ при $i \leqslant m$ и $h(\mathcal{D}_i) \in \Delta_\gamma$ при $i > m$. Проверим, что $\Sigma_{\gamma,m+1} \leqslant h(C)$ при нечетном m (случай четного m аналогичен). Пусть $\mathcal{B} = (\mathcal{D}_0 \setminus \mathcal{D}_1) \cup \ldots \cup (\mathcal{D}_{m-1} \setminus \mathcal{D}_m)$ и $A \in \Sigma_{\gamma,m+1}$. По доказательству теоремы 1 и замечаниям перед теоремой 2, найдется о.р.ф. f, сводящая A к $h(\mathcal{B})$ и такая, что $f(x) \notin h(\mathcal{A}_0^{1+\alpha})$ при всех x. Поскольку $\mathcal{D}_i \subseteq \mathcal{D}_0^{1+\alpha}$ при $i > m$, то f m-сводит A к $h(C)$.

Остается проверить, что множество $h(\mathcal{U} \setminus C) = h(\mathcal{U}) \setminus h(C)$ также универсально в одном из $\Sigma_{\gamma,m}, \Pi_{\gamma,m}$. Утверждаем, что при $\mathcal{D}_0 = \mathcal{A}_k^\alpha$, $\alpha \geqslant 2$, множество $h(\mathcal{U}\setminus\mathcal{C})$ m-эквивалентно $\overline{h(\mathcal{C})}$. Действительно, по доказанному, $\overline{h(\mathcal{C})}$ универсально в одном из $\Sigma_{\gamma,m}$, $\Pi_{\gamma,m}$, где $\gamma\geq 5$ и $m\geq 1$. Поскольку $h(\mathcal{U})=\{x\mid W_x\in\mathcal{H}\}\in\Pi_4$, то $h(\mathcal{U}\setminus\mathcal{C})\leq_m\overline{h(\mathcal{C})}$. Пусть A - множество из того класса, в котором универсально $\overline{h(\mathcal{C})}$. Пусть f - о.р.ф., сводящая A к $\overline{h(\mathcal{C})}$ и получающаяся по конструкции теоремы 1. Тогда $f(x)\in h(\mathcal{U})$ при всех x, т.е. f сводит A и к множеству $h(\mathcal{U}\setminus\mathcal{C})$.

Пусть теперь $\alpha\leq 1$. В случаях $\mathcal{D}_0=\emptyset$, $\mathcal{D}_0=\mathcal{A}_K^0$ и $\mathcal{D}_0=\mathcal{A}_0^1$ будем иметь $h(\mathcal{U}\setminus\mathcal{C})\approx\Pi_4$. Верхняя оценка следует из того, что $h(\mathcal{U})\in\Pi_4$ и $h(\mathcal{C})\in\Delta_4$ по доказанному выше. Остается проверить $\Pi_4\leq h(\mathcal{U}\setminus\mathcal{C})$. По теореме Джокуша [8, гл. XII.4], $\Sigma_4\leq(L,M)$, где $L=\{x\mid W_x$ не рекурсивно и $W_x'\equiv_T\emptyset'\}$, $M=\{x\mid W_x$ максимально$\}$. Поскольку $M=h(\tilde{\mathcal{A}}_1')\subseteq h(\mathcal{U}\setminus\mathcal{C})$ и $L\subseteq\overline{h(\mathcal{U})}$ (последнее следует из теоремы Мартина о степенях гипер-гиперпростых множеств, то $\Pi_4\leq h(\mathcal{U},\mathcal{C})$.

Пусть, наконец, $\mathcal{D}_0=\mathcal{A}_K^1$, $K>0$. По доказанному, $h(\mathcal{C})\approx\Pi_{4,m+1}$ при четном m и $h(\mathcal{C})\approx\Sigma_{4,m+1}$ при нечетном m. Утверждаем, что $h(\mathcal{U}\setminus\mathcal{C})\approx\Sigma_{4,m+2}$ при четном m и $h(\mathcal{U}\setminus\mathcal{C})\approx\Pi_{4,m+2}$ при нечетном m. Верхние оценки следуют из замечаний перед теоремой 2. Для доказательства нижних оценок сначала проверим, что $\omega+1$-последовательность $\{h(\mathcal{A}_1^1),h(\mathcal{A}_2^1),\ldots,h(\mathcal{U})\}$, совпадающая с последовательностью $\{h^*(\mathcal{A}_1^0),h^*(\mathcal{A}_2^0),\ldots,h^*(\mathcal{U})\}$, универсальна в классе всех возрастающих Π_4-последовательностей типа $\omega+1$.

Действительно, пусть $\{A_0,A_1,\ldots,A_\omega\}$ - возрастающая Π_4-последовательность. По лемме 7 найдется Δ_3-последовательность деревьев $\{T_x\}$ такая, что $x\in A_K\leftrightarrow$ al$(T_x)\in\mathcal{A}_{K+1}^0$ при всех $K<\omega$. Тем же приемом, что в цитированной теореме Джокуша, строится о.р.ф. f такая, что $f(x)\in L$ при $x\notin A_\omega$ и $L^*(W_{f(x)})\simeq$ al(T_x) при $x\in A_\omega$ (при этом используется замечание Лахлана [5] о том, что его вторая теорема может быть скомбинирована с теоремой Мартина). Тогда f сводит $\{A_0,A_1,\ldots,A_\omega\}$ и $\{h^*(\mathcal{A}_1^0),h^*(\mathcal{A}_2^0),\ldots,h^*(\mathcal{U})\}$.

Оставшиеся соотношения $\Sigma_{4,m+2}\leq h(\mathcal{U}\setminus\mathcal{C})$ при четном m и $\Pi_{4,m+2}\leq h(\mathcal{U}\setminus\mathcal{C})$ при нечетном m выводятся из доказанного утверждения точно так же, как выводились соотношения $\Pi_{4,m+1}\leq h(\mathcal{C})$ и $\Sigma_{4,m+1}\leq h(\mathcal{C})$. Теорема доказана.

Из доказательства легко извлечь перечень всех классов $\Sigma_{\alpha,n}$, $\Pi_{\alpha,n}$, в которых универсальны множества вида $h(\mathcal{C})$, $\mathcal{C} \in \mathfrak{L}$. Очевидным следствием теоремы 2 являются точные оценки сложности множеств $h(\mathcal{C}_{\alpha,n})$, где $\mathcal{C}_{\alpha,n}$ - класс всех б.а. с суператомной характеристикой (α, n), см. [1, 3].

§ 3. Идеал $\Phi Б$

Определим классы б.а., связанные с итерацией конструкции $\mathfrak{L} \mapsto \Phi Б(\mathfrak{L})$. Положим $\mathcal{A}_k^n = \{\mathfrak{L} : |\mathfrak{L}^{(n)}| \leq 2^k\}$ и $\mathcal{B}_k^n = \{\mathfrak{L} : |\mathfrak{L}^{(n)}/БФ(\mathfrak{L}^{(n)})| \leq 2^k\}$, где $n, k < \omega$ и $\mathfrak{L}^{(n)} = \mathfrak{L}/\Phi Б_n(\mathfrak{L})$. Здесь и в § 4 мы во избежание громоздкости ограничимся конечными итерациями. Ясно, что при всех $n<\omega$ и $k<\ell<m$ имеем $\mathcal{A}_k^n = \mathcal{A}_\ell^n \cap \mathcal{B}_k^n \subseteq \mathcal{A}_0^{n+1} = \bigcup_m \mathcal{B}_m^n$. Основным результатом параграфа является следующая

ТЕОРЕМА 3. *При любом n множество $h^*(\mathcal{A}_0^n)$ универсально в Σ_{3n+3}, последовательность $\{h^*(\mathcal{A}_{k+1}^n)\}_k$ универсальна в классе всех возрастающих Π_{3n+4} - последовательностей, а последовательность $\{h^*(\mathcal{B}_k^n)\}_k$ универсальна в классе всех возрастающих Π_{3n+5}-последовательностей.*

Сначала приведем вспомогательные утверждения. Во-первых, справедливы аналоги лемм 5 и 6 (лемма 5 справедлива и для $\mathcal{B}_k^n$). Доказательства этих аналогов почти дословно совпадают с приведенными. Наряду с операцией $\sqcup$ здесь потребуется новая операция, сопоставляющая произвольной последовательности деревьев $\{T_\sigma\}_{\sigma\in\mathcal{U}}$ дерево $\prod_\sigma T_\sigma$. Пусть W - множество всех элементов $\mathcal{U}$, у которых на четных местах стоит 0. Положим $\tilde{\emptyset} = \emptyset$, $\widetilde{\sigma * i} = \tilde{\sigma} * 0i$. Ясно, что операция $\sigma \longmapsto \tilde{\sigma}$ есть изоморфизм из $(\mathcal{U}; \subseteq)$ в $(W; \subseteq)$, причем для любого $\tau \in W$ найдется $\sigma \in \mathcal{U}$ такое, что $\tau \subseteq \tilde{\sigma}$. Дерево W совершенно, а $\{\tilde{\sigma} * 1 \mid \sigma \in \mathcal{U}\}$ есть множество всех минимальных элементов в $(\mathcal{U} \setminus W; \subseteq)$. Полагаем $\prod_\sigma T_\sigma = W \cup (\bigcup_\sigma \tilde{\sigma} * 1 * T_\sigma)$. Ясно, что $W \subseteq \prod_\sigma T_\sigma$, $(\prod_\sigma T_\sigma)(\tilde{\tau} * 1) = T_\tau$, и если T- произвольное дерево, содержащее W, то $T = \prod_\sigma T(\tilde{\sigma} * 1)$. Ясно также, что если последовательность $\{T_\sigma\}$ рекурсивна, то дерево $\prod_\sigma T_\sigma$ также рекурсивно. Вместо $\prod_\sigma T_\sigma$ иногда удобнее писать $\prod_k T_k$ или $\prod\{T_0, T_1, \ldots\}$. При этом подразумевается, что σ отождествляется с ее номером $f(\sigma)$ в естественном кодировании последовательностей $f(\emptyset) = 0$, $f(0) = 1$, $f(1) = 2$, $f(00) = 3$, ...

Пусть еще $\tilde{\mathcal{A}}_{k+1}^n = \mathcal{A}_{k+1}^n \setminus \mathcal{A}_k^n$, $\tilde{\mathcal{B}}_0^n = \mathcal{B}_0^n \setminus \mathcal{A}_0^n$, $\tilde{\mathcal{B}}_{k+1}^n = \mathcal{B}_{k+1}^n \setminus (\mathcal{B}_k^n \cup \mathcal{A}_{k+1}^n)$.

ЛЕММА 8. 1) *Если $T_i \in \mathcal{B}_0^n$ для всех i и $T_i \in \tilde{\mathcal{B}}_0^n$ для бесконечно мно-*

гих i , *то* $\sqcup T_i \in \tilde{\mathcal{B}}_0^n$. 2) *Если* $T_i \in \tilde{\mathcal{A}}_1^n \cup \tilde{\mathcal{B}}_0^n$ *для всех* i *и* $T_0 \in \tilde{\mathcal{B}}_0^n$, *то* $\sqcup T_i \notin \bigcup_K \mathcal{A}_K^n$ *и* $|\{i \mid T_i \in \tilde{\mathcal{A}}_1^n\}| = K \leftrightarrow \sqcup T_i \in \mathcal{B}_K^n$ *для любого* $K<\omega$. 3) *Пусть* $T_i \in \tilde{\mathcal{B}}_0^n \cup \tilde{\mathcal{B}}_1^n$ *для всех* i . *Если* $T_i \in \tilde{\mathcal{B}}_0^n$ *для почти всех* i , *то* $\sqcap T_i$, $\sqcup T_i \in \mathcal{A}^{n+1}$, *а если* $T_i \in \tilde{\mathcal{B}}_1^n$ *для почти всех* i , *то* $\sqcap T_i \in \tilde{\mathcal{B}}_0^{n+1}$ *и* $\sqcup T_i \in \tilde{\mathcal{A}}_1^{n+1}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так же, как в лемме 7, проверяется, что $\mathcal{D}^n(T) = \sqcup_i \mathcal{D}^n(T_i)$, где $T = \sqcup T_i$, $\mathcal{D} = \mathcal{D}_{\Phi Б}$. Проверим, что в условиях 3) $\mathcal{D}^n(S) = \sqcap_i \mathcal{D}^n(T_i)$, где $S = \sqcap_i T_i$. По аналогии с леммой 5, $\mathcal{D}^n(S)(\tilde{\sigma}*1) = \mathcal{D}^n(S(\tilde{\sigma}*1)) = \mathcal{D}^n(T_\sigma)$, поэтому остается проверить $W \subseteq \mathcal{D}^n(S)$. Предположим противное, тогда $\tilde{\sigma} \notin \mathcal{D}^n(S)$ при некотором σ . По лемме 4, al $S(\tilde{\sigma}) = \Phi Б_n(\ S(\sigma))$,т.е. $S(\tilde{\sigma}) \in \tilde{\mathcal{A}}_0^n$. По лемме 5, $T_\sigma = S(\tilde{\sigma}*1) \in \mathcal{A}_0^n$, что противоречит условию $T_\sigma \in \tilde{\mathcal{B}}_0^n \cup \tilde{\mathcal{B}}_1^n$.

Это показывает, что достаточно доказать лемму при $n=0$. В случае 1 по лемме 3 имеем: T_i конечно или почти совершенно, причем T_i почти совершенно для бесконечно многих i . Из определения $\sqcup$ следует, что T почти совершенно, т.е. $T \in \tilde{\mathcal{B}}_0^0$. В случае 2) все T_i изолированы или почти совершенны и $T_0 = T(1)$ почти совершенно. Поэтому al (T) имеет ненулевой безатомный элемент $T[1]^*$, $T \notin \bigcup_K \mathcal{A}_K^0$. Далее, атомы в al (T) находятся во взаимно-однозначном соответствии с изолированными ветками вида $T(0^m 1) = T_m$. Это дает нужную равносильность.

Докажем п.3). Из леммы 3 следует, что $Q \in \tilde{\mathcal{B}}_K^0$ тогда и только тогда, когда в дереве Q на некотором уровне K веток изолированы, хотя бы одна почти совершенна и остальные конечны. Если теперь $|\{i \mid T_i \in \tilde{\mathcal{B}}_1^0\}| = K$, то из этого утверждения и определения операций $\sqcup$ и $\sqcap$ нетрудно выводится, что $T, S \in \tilde{\mathcal{B}}_K^0 \subseteq \mathcal{A}_0^1$. Пусть теперь $T_i \in \tilde{\mathcal{B}}_1^0$ для почти всех i . Тогда достаточно проверить, что $\mathcal{D}(S) = W$ и $\mathcal{D}(T) = V$. Действительно, отсюда следует, что $\mathcal{D}(S) \in \tilde{\mathcal{B}}_0^0$, $S \in \tilde{\mathcal{B}}_0^1$, и $\mathcal{D}(T) \in \tilde{\mathcal{A}}_1^0$, $T \in \tilde{\mathcal{A}}_1^1$, по аналогии с леммой 5. Проверим $\mathcal{D}(S) = W$ (второе равенство проверяется аналогично). Если бы $W \notin \mathcal{D}(S)$, то $\tilde{\sigma} \notin \mathcal{D}(S)$ для некоторого σ. Отсюда $S(\tilde{\sigma}) \in \mathcal{A}_0^1$ по лемме 4, т.е. $S(\tilde{\sigma})$ имеет конечное число изолированных веток. Но при $\tau \supseteq \sigma$ каждое $T_\tau = S(\tilde{\tau}*1)$ является веткой дерева $S(\tilde{\sigma})$. Поскольку по условию бесконечно много таких T_τ имеют изолированную ветку, то получается противоречие. Включение $W \subseteq \mathcal{D}(S)$ проверено. Все $\mathcal{D}(T_\sigma)$ пусты, поскольку $T_\sigma \in \mathcal{A}_0^1$. Отсюда и из определения $\sqcap$ получаем $\mathcal{D}(S) = \sqcap_\sigma \mathcal{D}(S)(\tilde{\sigma}*1) = \sqcap_\sigma \mathcal{D}(T(\sigma)) = \sqcap\{\emptyset, \emptyset, \ldots\} = W$. Лемма доказана.

ЛЕММА 9. *Справедливы следующие соотношения:* 1) $\Sigma_1 \le (\mathcal{A}_0^0, \tilde{\mathcal{A}}_1^0)$ *и* $\Sigma_1 \le (\mathcal{A}_0^0, \tilde{\mathcal{B}}_0^0)$; 2) *если* $\Sigma_{3n+1} \le (\mathcal{A}_0^n, \tilde{\mathcal{A}}_1^n)$, *то* $\Pi_{3n+2} \le \{\mathcal{A}_{k+1}^n\}_k$; 3) *если* $\Sigma_{3n+1} \le (\mathcal{A}_0^n, \tilde{\mathcal{B}}_0^n)$, *то* $\Pi_{3n+3} \le \{\mathcal{B}_k^n\}_k$, $\Sigma_{3n+4} \le (\mathcal{A}_0^{n+1}, \tilde{\mathcal{B}}_0^{n+1})$ *и* $\Sigma_{3n+4} \le (\mathcal{A}_0^{n+1}, \tilde{\mathcal{A}}_1^{n+1})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое соотношение в 1) доказано в лемме 7. Аналогичным рассуждением для данного $A \in \Sigma_1$ строится рекурсивная последовательность деревьев $\{T_x\}$ такая, что $T_x = W$ при $x \notin A$ и T_x есть конечное поддерево дерева W при $x \in A$. Это доказывает второе соотношение. Утверждение 2) доказывается, как в лемме 7.3.

Докажем утверждение 3). Проверим сначала $\Sigma_{3n+2} \le (\tilde{\mathcal{B}}_0^n, \tilde{\mathcal{A}}_1^n)$. Пусть $A \in \Sigma_{3n+2}$ и $A = \bigcup_k A_k$, где $\{A_k\}$ - возрастающая Π_{3n+1}-последовательность. По условию найдется рекурсивная последовательность деревьев $\{T_{n,k}\}$ такая, что $T_{x,k} \in \mathcal{A}_0^n$ при $x \notin A_k$ и $T_{x,k} \in \tilde{\mathcal{B}}_0^n$ при $x \in A_k$. Положим $T_x = \sqcup\{S_0, T_{x,0}, S_1, T_{x,1}, \ldots\}$, где $\{S_k\}$ - рекурсивная последовательность деревьев, конфинальная в $\mathcal{A}_0^n$. При $x \in A$ по лемме 8.1 получим $T_x \in \tilde{\mathcal{B}}_0^n$, а при $x \notin A$ по лемме 6.1 получим $T_x \in \tilde{\mathcal{A}}_1^n$, что и требовалось.

Докажем $\Pi_{3n+3} \le \{\mathcal{B}_k^n\}_k$. Пусть $\{A_k\}$ - возрастающая Π_{3n+3} -последовательность. По релятивизации леммы 7.1 найдется Σ_{3n+2} -последовательность $\{B_x\}$ такая, что $0 \in B_x$ и $x \in A_k \leftrightarrow |\bar{B}_x| \le k$. По доказанному в предыдущем абзаце найдется рекурсивная последовательность деревьев $\{T_{x,i}\}$ такая, что $T_{x,i} \in \tilde{\mathcal{B}}_0^n$ при $i \in B_x$ и $T_{x,i} \in \tilde{\mathcal{A}}_1^n$ при $i \notin B_x$. Положим $T_x = \bigsqcup_i T_{x,i}$, тогда, по лемме 8.2, $x \in A_k \leftrightarrow T_x \in \mathcal{B}_k^n$, что доказывает наше утверждение. Заметим, что по построению $\mathrm{al}\,(T_x)^{(n)}$ для любого x не является атомной, это существенно для теорем 4 и 6. Если взять $A_0 \approx \Pi_{3n+3}$ и $A_{k+1} = \omega$, то $T_x \in \tilde{\mathcal{B}}_0^n$ при $x \in A_0$ и $T_x \in \tilde{\mathcal{B}}_1^n$ при $x \notin A_0$, т.е. $\Sigma_{3n+3} \le (\tilde{\mathcal{B}}_1^n, \tilde{\mathcal{B}}_0^n)$.

Пусть теперь $A \in \Sigma_{3n+4}$, $A = \cup A_i$, $\{A_i\}$ - возрастающая Π_{3n+3} -последовательность. По доказанному найдется рекурсивная последовательность деревьев $\{T_{x,i}\}$ такая, что $T_{x,i} \in \tilde{\mathcal{B}}_1^n$ при $x \notin A_i$ и $T_{x,i} \in \tilde{\mathcal{B}}_0^n$ при $x \in A_i$. Положим $T_x = \prod_i T_{x,i}$. По лемме 8.3 тогда $T_x \in \tilde{\mathcal{A}}_0^{n+1}$ при $x \in A$ и $T_x \in \tilde{\mathcal{B}}_0^{n+1}$ при $x \notin A$, чем доказывается соотношение $\Sigma_{3n+4} \le (\mathcal{A}_0^{n+1}, \tilde{\mathcal{B}}_0^{n+1})$. Последнее соотношение проверяется точно так же, только вместо Π берется $\sqcup$. Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Из определения $\Phi Б\,(\mathcal{L})$ ясно, что если

$(\mathcal{L},\nu)\in\Sigma_a$, то $\nu^{-1}(ФБ(\mathcal{L}))\in\Sigma_{a+3}$. Отсюда по индукции получаем,что если $(\mathcal{L};\nu)\in\Sigma_3$, то $\mathcal{L}^{(n)}$ с индуцированной нумерацией лежит в Σ_{3n+3}. Отсюда так же, как в доказательстве теоремы 1, получаем, что $h^*(\mathcal{A}_0^n)\in\Sigma_{3n+3}$ и $h^*(\mathcal{A}_{k+1}^n)\in\Pi_{3n+4}$ равномерно по k. Далее, пусть φ_k - предложение в языке $\{\cup,\cap,^-\}$; утверждающее, что не существует $k+1$ различных атомов. Тогда φ_k есть Π_2- предложение и $\mathcal{L}\models\varphi_k\leftrightarrow\mathcal{L}\in\mathcal{B}_k^0$. Отсюда $x\in h^*(\mathcal{B}_k^n)\leftrightarrow L^*(W_x)^{(n)}\models\varphi_k$. Поскольку $L^*(W_x)^{(n)}\in\Sigma_{3n+3}$, то $h^*(\mathcal{B}_k^n)\in\Pi_{3n+5}$ равномерно по k.

Остается установить нижние оценки. Из пунктов 1) и 3) леммы 9 по индукции получаем, что $\Sigma_{3n+1}\leq(\mathcal{A}_0^n,\tilde{\mathcal{A}}_1^n)$ и $\Pi_{3n+3}\leq\{\mathcal{B}_k^n\}_k$ при любом n. Из леммы 9.2 теперь следует, что $\Pi_{3n+2}\leq\{\mathcal{A}_{k+1}^n\}_k$ при любом n. По лемме 2, $\Sigma_{3n+3}\leq(h^*(\mathcal{A}_0^n),h^*(\tilde{\mathcal{A}}_1^n))$, $\Pi_{3n+5}\leq\{h^*(\mathcal{B}_k^n)\}_k$ и $\Pi_{3n+4}\leq\{h^*(\mathcal{A}_{k+1}^n)\}_k$. Теорема доказана.

Доказательство следующей теоремы опустим, поскольку оно аналогично доказательству теорем 2 и 6. Пусть $\mathcal{L}$- б.а., порожденная классами $\mathcal{A}_k^n$ и $\mathcal{B}_k^n$ в классе $\mathcal{U}$ всех б.а.

ТЕОРЕМА 4. *Для любого* $\mathcal{C}\in\mathcal{L}$ *множество* $h^*(\mathcal{C})$ *универсально в одном из классов* $\Sigma_{n,k}$, $\Pi_{n,k}$, *причем по естественному представлению для* $\mathcal{C}$ *можно эффективно узнать, в котором именно.*

§ 4. Идеал $AБ$

Положим $\mathcal{A}_k^n=\{\mathcal{L}:|\mathcal{L}^{(n)}|\leq 2^k\}$, $\mathcal{B}_k^n=\{\mathcal{L}:|\mathcal{L}^{(n)}/Б(\mathcal{L}^{(n)})|\leq 2^k\}$ и $\mathcal{A}^n=\{\mathcal{L}:\mathcal{L}^{(n)}$ - атомная б.а.$\}$, где $n,k<\omega$ и $\mathcal{L}^{(n)}=\mathcal{L}/AБ_n(\mathcal{L})$. Ясно, что при всех $n,k<\omega$ имеем $\mathcal{A}_k^n\subseteq\mathcal{A}_{k+1}^n\subseteq\mathcal{A}^n$, $\mathcal{A}_k^n=\mathcal{A}^n\cap\mathcal{B}_k^n$ и $\mathcal{A}^n\cup\mathcal{B}_k^n\subseteq\mathcal{A}_0^{n+1}$. Основным результатом параграфа является

ТЕОРЕМА 5. *Для любого* $n<\omega$ *множество* $h^*(\mathcal{A}_0^n)$ *универсально в* Σ_{4n+3}, *последовательность* $\{h^*(\mathcal{A}_{k+1}^n)\}_k$ *универсальна в классе всех возрастающих* Π_{4n+4}*-последовательностей, последовательность* $\{h^*(\mathcal{B}_k^n)\}_k$ *универсальна в классе всех возрастающих* Π_{4n+5}*-последовательностей, и множество* $h^*(\mathcal{A}^n)$ *универсально в* Π_{4n+6}.

Положим $\tilde{\mathcal{A}}_0^0=\mathcal{A}_0^0$, $\tilde{\mathcal{A}}_0^{n+1}=\mathcal{A}_0^{n+1}\setminus(\mathcal{A}^n\cup(\bigcup_k\mathcal{B}_k^n))$, $\tilde{\mathcal{A}}_{k+1}^n=\mathcal{A}_{k+1}^n\setminus\mathcal{A}_k^n$, $\tilde{\mathcal{A}}^n=\mathcal{A}^n\setminus\bigcup_k\mathcal{A}_k^n$, $\tilde{\mathcal{B}}_0^n=\mathcal{B}_0^n\setminus\mathcal{A}_0^n$, $\tilde{\mathcal{B}}_{k+1}^n=\mathcal{B}_{k+1}^n\setminus(\mathcal{B}_k^n\cup\mathcal{A}^n)$.

ЛЕММА 10. *Если* $T_k\in\mathcal{A}^0\setminus\mathcal{A}_0^0$ *для всех* k, *то* $\sqcup T_k\in\tilde{\mathcal{A}}^0$. *Если* $T_0\in\tilde{\mathcal{A}}^0$, $T_k\in\tilde{\mathcal{A}}^0\cup\tilde{\mathcal{B}}_0^0$ *для всех* k *и* $T_k\in\tilde{\mathcal{B}}_0^0$ *для почти всех* k, *то* $\sqcup T_k\in\tilde{\mathcal{A}}_0^1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используем лемму 3. Пусть $T_k \in \mathcal{A}^0 \setminus \mathcal{A}_0^0$ для всех k. Тогда все T_k имеют изолированную ветку, поэтому $T = \sqcup T_k$ имеет бесконечно много изолированных веток, $T \notin \bigcup_k \mathcal{A}_k^0$. Остается проверить, что $T \in \mathcal{A}^0$, т.е. что никакая ветка $T(\sigma)$ не является почти совершенной. Если $\sigma = 0^k \in V$, то $T_k = T(0^k 1)$ имеет изолированную ветку и является веткой дерева $T(\sigma)$. Поэтому и дерево $T(\sigma)$ имеет изолированную ветку, т.е. не является почти совершенным. В случае $\sigma \notin V$, $\sigma = 0^k 1 * \tau$, дерево $T(\sigma) = (T(0^k 1))(\tau) = T_k(\tau)$ является веткой дерева T_k, поэтому оно не является почти совершенным. Первое утверждение доказано.

Пусть выполнены условия второго утверждения. Тогда $T_0 \in \tilde{\mathcal{A}}^0$ и $T_k \in \tilde{\mathcal{B}}_0^0$ для некоторого k. Поэтому T имеет бесконечно много изолированных веток и почти совершенную ветку, откуда $T \notin \mathcal{A}^0 \cup (\bigcup_k \mathcal{B}_k^0)$. Остается проверить, что $T \in \mathcal{A}_0^1$, т.е. $\mathrm{al}(T) = AБ(\mathrm{al}\, T)$. Пусть ℓ таково, что $T_k \in \tilde{\mathcal{B}}_0^0$ для $k > \ell$. Тогда $T(0^\ell) = \bigsqcup_k T_{\ell+k} \in \tilde{\mathcal{B}}_0^0$ по лемме 8.2. Поскольку $T_k \in \mathcal{A}^0 \cup \mathcal{B}_0^0$ при $k < \ell$, то из леммы 5 следует, что все ветки дерева T уровня ℓ лежат в $\mathcal{A}^0 \cup \mathcal{B}_0^0$. По лемме 3, $T \in \mathcal{A}_0^1$. Лемма доказана.

Теорема 5 может быть доказана по схеме, аналогичной схеме доказательства теоремы 3, но этот путь связан с дополнительными техническими трудностями. Поэтому здесь мы используем другой способ доказательства, основанный на следующем утверждении.

ЛЕММА 11. *По любой Σ_{4n+1} - б.а. $\mathfrak{A}$ можно эффективно найти Σ_1 - б.а. $\mathfrak{B}$ такую, что $\mathfrak{B}^{(n)} \simeq \mathfrak{A}$, где $\mathfrak{B}^{(n)} = \mathfrak{B}/AБ_n(\mathfrak{B})$.*

Доказательство этого утверждения здесь не приводим, поскольку оно вместе с другими близкими результатами излагается в совместной статье автора и С.П.Одинцова [9]. Заметим еще, что теоремы 1 и 3 также могут быть доказаны этим способом с использованием аналогов леммы 11 для $Ф$ и $ФБ$.

Запись $\Sigma_\alpha \leq (\mathcal{C}, \mathcal{D})$ далее будет означать, что для любого оракула a и любого $A \in \Sigma_\alpha^a$ найдется Π_1^a-последовательность деревьев $\{T_x\}$ такая, что $\mathrm{al}(T_x) \in \mathcal{C}$ при $x \in A$ и $\mathrm{al}(T_x) \in \mathcal{D}$ при $x \notin A$. Аналогично модифицируется обозначение $\Pi_\alpha \leq \{\mathcal{C}_k\}$ из § 1. Просмотр доказательства леммы 2 показывает, что она остается справедливой для этих расширенных понятий сводимости. Как и выше, оракул a в явном виде упоминать не будем.

ЛЕММА 12. *При любом n справедливы соотношения $\Sigma_{4n+1} \leq (\tilde{\mathcal{A}}_0^n, \tilde{\mathcal{A}}_1^n)$,*

$$\Sigma_{4n+1} \leq (\tilde{\mathcal{A}}_0^n, \tilde{\mathcal{B}}_0^n),\ \Sigma_{4n+2} \leq (\tilde{\mathcal{B}}_0^n, \tilde{\mathcal{A}}_1^n),\ \Sigma_{4n+3} \leq (\tilde{\mathcal{A}}^n, \tilde{\mathcal{B}}_0^n),\ \Sigma_{4n+4} \leq (\tilde{\mathcal{A}}_0^{n+1}, \tilde{\mathcal{A}}^n),\ \Pi_{4n+2} \leq \{\mathcal{A}_{k+1}^n\}_k,\ \Pi_{4n+3} \leq \{\mathcal{B}_k^n\}_k.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Последние два соотношения следуют из первого и третьего так же, как в лемме 9. Оставшиеся соотношения проверим сначала при $n = 0$. Первые три из них доказаны в лемме 9. Проверим $\Sigma_3 \leq (\tilde{\mathcal{A}}^n, \tilde{\mathcal{B}}_0^n)$.

Пусть $A \in \Sigma_3$. В теореме А из [6] доказано, что найдется рекурсивная последовательность деревьев $\{T_x\}$ такая, что $T_x \in \bigcup_k \tilde{A}^0_{k+1}$ при $x \in A$ и $T_x \in \tilde{\mathcal{B}}^0_0$ при $x \notin A$. Положим $S_x = \sqcup\{T_x, T_x, \dots\}$. Тогда $S_x \in \tilde{\mathcal{A}}^0$ при $x \in A$ по лемме 10 и $S_x \in \tilde{\mathcal{B}}^0_0$ при $x \notin A$ по лемме 8.2. Этим доказывается $\Sigma_3 \leqslant (\tilde{\mathcal{A}}^0, \tilde{\mathcal{B}}^0_0)$.

Пусть $A \in \Sigma_4$ и $A = \bigcup_k A_k$, где $\{A_k\}$ - возрастающая Π_3-последовательность. По доказанному найдется рекурсивная последовательность деревьев $\{T_{x,i}\}$ такая, что $T_{x,i} \in \tilde{\mathcal{A}}^0$ при $x \notin A_i$ и $T_{x,i} \in \tilde{\mathcal{B}}^0_0$ при $x \in A_i$. Положим $T_x = \sqcup\{S, T_{x,0}, T_{x,1}, \dots\}$, где $S \in \tilde{\mathcal{A}}^0$. По лемме 10, $T_x \in \tilde{\mathcal{A}}^1_0$ при $x \in A$ и $T_x \in \tilde{\mathcal{A}}^0$ при $x \notin A$. Отсюда $\Sigma_4 \leqslant (\tilde{\mathcal{A}}^1_0, \tilde{\mathcal{A}}^0_0)$.

Пусть $n > 0$. Проверим $\Sigma_{4n+3} \leqslant (\tilde{\mathcal{A}}^n, \tilde{\mathcal{B}}^n_0)$, остальные доказательства аналогичны. Пусть $A \in \Sigma_{4n+3} = \Sigma_3^{\emptyset^{(4n)}}$. По доказанному найдется $\Pi_1^{\emptyset^{(4n)}}$-последовательность деревьев $\{T_x\}$ такая, что $T_x \in \tilde{\mathcal{A}}^0$ при $x \in A$ и $T_x \in \tilde{\mathcal{B}}^0_0$ при $x \notin A$. По релятивизации леммы 3, $\{\mathrm{al}(T_x)\}$ будет Σ_{4n+1}-последовательностью б.а. По лемме 11, найдется Σ_1-последовательность б.а. $\{\mathcal{L}_x\}$ такая, что $\mathcal{L}_x^{(n)} \simeq \mathrm{al}(T_x)$. Пусть $S_x = \{\sigma \mid \nu_x[\sigma] \neq 0_{\mathcal{L}_x}\}$, где ν_x - нумерация $\mathcal{L}_x$ такая, что $(\mathcal{L}_x, \nu_x) \in \Sigma_1$ равномерно по x и $\nu_x[\sigma] = \left(\bigcap_{\sigma(i)=1} \nu_x(i)\right) \cap \left(\bigcap_{\sigma(i)=0} \overline{\nu_x(i)}\right)$. Из [5] следует, что $\{S_x\}$ - Π_1 - последовательность деревьев такая, что $\mathrm{al}(S_x) \simeq \mathcal{L}_x$. Поэтому $S_x \in \tilde{\mathcal{A}}^n$ при $x \in A$ и $S_x \in \tilde{\mathcal{B}}^n_0$ при $x \notin A$. Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 5. Из определения $A(\mathcal{L})$ и $AБ(\mathcal{L})$ ясно, что если $(\mathcal{L}, \nu) \in \Sigma_a$, то $\nu^{-1}(A(\mathcal{L})) \in \Pi_{a+3}$ и $\nu^{-1}(AБ(\mathcal{L})) \in \Sigma_{a+4}$. Из последней оценки по индукции выводится, что $L^*(W_x)^{(n)} \in \Sigma_{4n+3}$ равномерно по n и x. Теперь так же, как в доказательствах теорем 1 и 3, получаем, что $h^*(\mathcal{A}^n_0) \in \Sigma_{4n+3}$, $h^*(\mathcal{A}^n_{k+1}) \in \Pi_{4n+4}$ и $h^*(\mathcal{B}^n_k) \in \Pi_{4n+5}$ равномерно по k. Наконец, условие $x \in h^*(\mathcal{A}^n)$ равносильно тому, что наибольший элемент б.а. $L^*(W_x)^{(n)}$ лежит в $A(L^*(W_x)^{(n)})$. Отсюда $h^*(\mathcal{A}^n) \in \Pi_{4n+6}$. Этим завершается установление верхних оценок.

Из лемм 12 и 2 следуют соотношения

$$\begin{aligned} &\Sigma_{4n+3} \leqslant (h^*(\tilde{\mathcal{A}}^n_0), h^*(\tilde{\mathcal{B}}^n_0)), \quad \Sigma_{4n+4} \leqslant (h^*(\tilde{\mathcal{B}}^n_0), h^*(\tilde{\mathcal{A}}^n_1)), \\ &\Sigma_{4n+5} \leqslant (h^*(\tilde{\mathcal{A}}^n), h^*(\tilde{\mathcal{B}}^n_0)), \quad \Sigma_{4n+6} \leqslant (h^*(\tilde{\mathcal{A}}^{n+1}_0), h^*(\tilde{\mathcal{A}}^n)), \end{aligned} \tag{4}$$

а также $\Pi_{4n+4} \le \{h^*(A^n_{k+1})\}_k$ и $\Pi_{4n+5} \le \{h^*(B^n_k)\}_k$. Из первого и четвертого соотношений (4) следуют $\Sigma_{4n+3} \le h^*(A^n_0)$ и $\Pi_{4n+6} \le h^*(A^n)$. Этим завершается установление нижних оценок. Заметим еще, что из доказательства леммы 9.3 следует, что любая возрастающая Π_{4n+5}-последовательность сводится к $\{h^*(B^n_k)\}_k$ посредством подходящей о.р.ф. f такой, что $f(x) \notin h^*(A^n)$ при всех x. Аналогично доказательству теоремы 1, любая возрастающая Π_{4n+4}-последовательность сводится к $\{h^*(A^n_{k+1})\}_k$ посредством подходящей о.р.ф. f с дополнительным условием $f(x) \notin h^*(A^n_0)$ при всех x. Теорема доказана.

Пусть $\mathcal{L}$ - б.а., порожденная классами A^n_k, B^n_k, A^n в классе $\mathcal{U}$ всех б.а. Любому предложению φ в языке $\{\le\}$ поставим в соответствие класс M_φ всех б.а., на которых предложение φ истинно.

ТЕОРЕМА 6. *Для любых* $C \in \mathcal{L}$ *и* φ *множества* $h^*(C)$ *и* $h^*(M_\varphi)$ *универсальны в одном из классов* $\Sigma_{n,k}, \Pi_{n,k}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Напомним [3] элементарную классификацию б.а. Пусть $C_{\gamma,\delta,\eta}$ - класс всех б.а. с элементарной характеристикой (γ,δ,η). Из ее определения следует, что $C_{\omega,0,0} = \mathcal{U} \setminus \bigcup_n A^n_0$, $C_{n,\omega,0} = \tilde{A}^n$, $C_{n,\omega,1} = \tilde{A}^{n+1}_0$, $C_{n,k+1,0} = \tilde{A}^n_{k+1}$, $C_{0,0,0} = A^0_0$ и $C_{n,k,1} = \tilde{B}^n_k$. Элементарные теории всех этих классов разрешимы равномерно по индексу и исчерпывают все полные расширения теории б.а.

Известно [3, гл.2, § 4], что существует рекурсивная последовательность предложений α^n_k, β^n_k, α^n такая, что $A^n_k = M_{\alpha^n_k}$, $B^n_k = M_{\beta^n_k}$ и $A^n = M_{\alpha^n}$ для всех n и k. Поэтому для любого $C \in \mathcal{L}$ найдется такое φ, что $\mathcal{L} = M_\varphi$. Значит, достаточно доказать утверждение о классах M_φ. Докажем сначала следующие утверждения:

а) для любого φ найдется m такое, что $M_\varphi \subseteq A^m_0$ или $\bar{M}_\varphi \subseteq A^m_0$;

б) для любых φ и i найдется такое k, что класс $A^i \setminus A^i_k$ содержится в одном из классов M_φ, $\bar{M}_\varphi$;

в) для любых φ и i найдется такое ℓ, что класс $A^{i+1}_0 \setminus (A^i \cup B^i_\ell)$ содержится в одном из классов M_φ, $\bar{M}_\varphi$.

Действительно, множествами аксиом для теории $Th(C_{\omega,0,0})$, $Th(C_{i,\omega,0})$ и $Th(C_{i,\omega,1})$ будут соответственно $\{\neg\alpha^n_0 \mid n<\omega\}$, $\{\alpha^i \wedge \neg\alpha^i_k \mid k<\omega\}$ и $\{\alpha^{i+1}_0 \wedge \neg\alpha^i \wedge \wedge \neg\beta^i_\ell \mid \ell<\omega\}$. Из полноты $Th(C_{\omega,0,0})$ следует, что она содержит одно из φ, $\neg\varphi$. Пусть $\varphi \in Th(C_{\omega,0,0})$. Тогда φ следует из конечного числа формул вида $\neg\alpha^n_0$. Поскольку $\neg\alpha^n_0$ следует из $\neg\alpha^{n+1}_0$, то φ следует из

$\neg\alpha_0^m$ для некоторого m. Тогда $\bar{\mathcal{A}}_0^m\subseteq\mathcal{M}_\varphi$, $\bar{\mathcal{M}}_\varphi\subseteq\mathcal{A}_0^m$. При $\neg\varphi\in Th(\mathcal{C}_{\omega,0,0})$ получим $\mathcal{M}_\varphi\subseteq\mathcal{A}_0^m$. Это доказывает а). Утверждения б) и в) доказываются точно так же.

Проверим теперь, что $\mathcal{M}_\varphi\in\mathcal{L}$ для любого φ. По а), найдется m, для которого $\mathcal{M}_\varphi\subseteq\mathcal{A}_0^m$ или $\bar{\mathcal{M}}_\varphi\subseteq\mathcal{A}_0^m$. Достаточно рассмотреть первый случай, второй получается переходом к дополнению. Если $\mathcal{M}_\varphi\subseteq\mathcal{A}_0^0$, то $\mathcal{M}_\varphi=\emptyset$ или $\mathcal{M}_\varphi=\mathcal{A}_0^0$ (поскольку из полноты $Th(\mathcal{C})$ следует, что $\mathcal{C}\subseteq\mathcal{M}_\varphi$ или $\mathcal{C}\subseteq\bar{\mathcal{M}}_\varphi$ для всех $\mathcal{C}$ и φ). Пусть $\mathcal{M}_\varphi\subseteq\mathcal{A}_0^{n+1}$ и $\mathcal{M}_\varphi\not\subseteq\mathcal{A}_0^n$. Имеем $\mathcal{A}_0^{n+1}=\mathcal{A}_0^0\cup(\mathcal{A}_0^1\setminus\mathcal{A}_0^0)\cup\ldots\cup(\mathcal{A}_0^{n+1}\setminus\mathcal{A}_0^n)$. Отсюда $\mathcal{M}_\varphi=\mathcal{X}_0\cup\ldots\cup\mathcal{X}_{n+1}$, где $\mathcal{X}_0=\mathcal{M}_\varphi\cap\mathcal{A}_0^0$, $\mathcal{X}_{i+1}=\mathcal{M}_\varphi\cap(\mathcal{A}_0^{i+1}\setminus\mathcal{A}_0^i)$. По замеченному выше $\mathcal{X}_0\in\mathcal{L}$, поэтому остается проверить $\mathcal{X}_{i+1}\in\mathcal{L}$. Положим $\mathcal{Y}_{i+1}=\mathcal{M}_\varphi\cap(\mathcal{A}_0^{i+1}\setminus\mathcal{A}^i)$ и $\mathcal{Z}_{i+1}=\mathcal{M}_\varphi\cap(\mathcal{A}^i\setminus\mathcal{A}_0^i)$, тогда $\mathcal{X}_{i+1}=\mathcal{Y}_{i+1}\cup\mathcal{Z}_{i+1}$. Пусть k и ℓ - числа, удовлетворяющие б) и в). Тогда достаточно доказать, что найдутся множества $K\subseteq\{x\mid 1\leq x\leq k\}$ и $L\subseteq\{x\mid 0\leq x\leq\ell\}$ такие, что $\mathcal{Y}_{i+1}$ имеет один из видов $\tilde{\mathcal{B}}_L^i$, $\tilde{\mathcal{B}}_L^i\cup(\mathcal{A}_0^{i+1}\setminus(\mathcal{A}^i\cup\mathcal{B}_\ell^i))$, а $\mathcal{Z}_{i+1}$ имеет один из видов $\tilde{\mathcal{A}}_K^i$, $\tilde{\mathcal{A}}_K^i\cup(\mathcal{A}^i\setminus\mathcal{A}_k^i)$, где $\tilde{\mathcal{A}}_K^i=\bigcup_{m\in K}\tilde{\mathcal{A}}_m^i$ и аналогично для $\tilde{\mathcal{B}}_L^i$. Докажем это утверждение для $\mathcal{Y}_{i+1}$, для $\mathcal{Z}_{i+1}$ доказательство аналогично. По в), $\mathcal{A}_0^{i+1}\setminus(\mathcal{A}^i\cup\mathcal{B}_\ell^i)$ содержится в одном из $\mathcal{M}_\varphi$, $\bar{\mathcal{M}}_\varphi$. Пусть сначала оно содержится в $\bar{\mathcal{M}}_\varphi$. Тогда $\mathcal{M}_\varphi\subseteq\overline{\mathcal{A}_0^{i+1}}\cup\mathcal{A}^i\cup\mathcal{B}_\ell^i$. Пересекая обе части с $\mathcal{A}_0^{i+1}\setminus\mathcal{A}^i$, получаем $\mathcal{Y}_{i+1}\subseteq\mathcal{B}_\ell^i\setminus\mathcal{A}^i=\tilde{\mathcal{B}}_0^i\cup\ldots\cup\tilde{\mathcal{B}}_\ell^i$. Отсюда $\mathcal{Y}_{i+1}=\tilde{\mathcal{B}}_L^i$ для некоторого $L\subseteq\{0,\ldots,\ell\}$. Если $\mathcal{A}_0^{i+1}\setminus(\mathcal{A}^i\cup\mathcal{B}_\ell^i)\subseteq\mathcal{M}_\varphi$, то по рассмотренному случаю $\bar{\mathcal{M}}_\varphi\cap(\mathcal{A}_0^{i+1}\setminus\mathcal{A}^i)=\tilde{\mathcal{B}}_L^i$ для подходящего $L\subseteq\{0,\ldots,\ell\}$. Переходя к дополнению и пересекая обе части с $\mathcal{A}_0^{i+1}\setminus\mathcal{A}^i$, получаем

$$\mathcal{Y}_{i+1}=(\mathcal{A}_0^{i+1}\setminus\mathcal{A}^i)\setminus\tilde{\mathcal{B}}_L^i=[((\mathcal{A}_0^{i+1}\setminus\mathcal{A}^i)\setminus\mathcal{B}_\ell^i)\cup(\mathcal{B}_\ell^i\setminus\mathcal{A}^i)]\setminus\tilde{\mathcal{B}}_L^i=(\mathcal{A}_0^{i+1}\setminus(\mathcal{A}^i\cup\mathcal{B}_\ell^i))\cup\tilde{\mathcal{B}}_{L_1}^i,$$

где $L_1=\{x\leq\ell\mid x\notin L\}$. Это завершает проверку того, что $\mathcal{M}_\varphi\in\mathcal{L}$.

Перейдем к сложности $h^*(\mathcal{M}_\varphi)$. Достаточно рассмотреть случай $\mathcal{M}_\varphi\subseteq\mathcal{A}_0^m$, поскольку случай $\bar{\mathcal{M}}_\varphi\subseteq\mathcal{A}_0^m$ сводится к нему тем же приемом, что и в доказательстве теоремы 2. Если $\mathcal{M}_\varphi\subseteq\mathcal{A}_0^0$, то $h^*(\mathcal{M}_\varphi)=\emptyset$ или $h^*(\mathcal{M}_\varphi)\approx\Sigma_3$. Пусть $\mathcal{M}_\varphi\subseteq\mathcal{A}_0^{n+1}$ и $\mathcal{M}_\varphi\not\subseteq\mathcal{A}_0^n$, тогда $\mathcal{X}_{n+1}\neq\emptyset$. По доказанному, возможен один из следующих четырех случаев:

$$\mathcal{Y}_{n+1}=\tilde{\mathcal{B}}_L^n\cup(\mathcal{A}_0^{n+1}\setminus(\mathcal{A}^n\cup\mathcal{B}_\ell^n));\quad \mathcal{Y}_{n+1}=\tilde{\mathcal{B}}_L^n \text{ и } \mathcal{Z}_{n+1}=\tilde{\mathcal{A}}_K^n\cup(\mathcal{A}^n\setminus\mathcal{A}_k^n);$$

$$\mathcal{Y}_{n+1}=\tilde{\mathcal{B}}_L^n\neq\emptyset \text{ и } \mathcal{Z}_{n+1}=\tilde{\mathcal{A}}_K^n;\quad \mathcal{Y}_{n+1}=\emptyset \text{ и } \mathcal{Z}_{n+1}=\tilde{\mathcal{A}}_K^n\neq\emptyset.$$

В первом случае $h^*(\mathcal{M}_\varphi) \approx \Sigma_{4n+7}$. Действительно, по теореме 5, $h^*(\mathcal{A}_0^{n+1}) \in \Sigma_{4n+7}$, а все $h^*(\mathcal{A}^n)$, $h^*(\mathcal{B}_i^n)$ и $h^*(\mathcal{A}_i^n)$ лежат в Δ_{4n+7}. Отсюда $h^*(\mathcal{X}_{n+1}) \in \Sigma_{4n+7}$ и аналогично $h^*(\mathcal{X}_i) \in \Sigma_{4i+3}$ при $i \leq n$. Поэтому $h^*(\mathcal{M}_\varphi) = \bigcup_{i \leq n+1} h^*(\mathcal{X}_i) \in \Sigma_{4n+7}$. Остается проверить нижнюю оценку. По (4), из доказательства теоремы 5 имеем $\Sigma_{4n+7} \leq (h^*(\tilde{\mathcal{A}}_0^{n+1}), h^*(\tilde{\mathcal{B}}_0^{n+1}))$. В этом случае $\tilde{\mathcal{A}}_0^{n+1} \subseteq \mathcal{Y}_{n+1} \subseteq \mathcal{M}_\varphi$ и $\tilde{\mathcal{B}}_0^{n+1} \subseteq \overline{\mathcal{M}}_\varphi$, откуда $\Sigma_{4n+7} \leq h^*(\mathcal{M}_\varphi)$.

Во втором случае $h^*(\mathcal{M}_\varphi) \approx \Pi_{4n+6}$. Верхняя оценка проверяется так же, как и выше. По (4), $\Sigma_{4n+6} \leq (h^*(\tilde{\mathcal{A}}_0^{n+1}), h^*(\tilde{\mathcal{A}}^n))$. В этом случае $\tilde{\mathcal{A}}^n \subseteq \mathcal{Z}_{n+1} \subseteq \mathcal{M}_\varphi$ и $\tilde{\mathcal{A}}_0^{n+1} \subseteq \overline{\mathcal{M}}_\varphi$, откуда $\Pi_{4n+6} \leq h^*(\mathcal{M}_\varphi)$.

Рассмотрим третий случай. Поскольку $\tilde{\mathcal{B}}_0^n = \mathcal{B}_0^n \setminus \mathcal{A}_0^n$ и $\tilde{\mathcal{B}}_{i+1}^n = (\mathcal{B}_{i+1}^n \setminus \mathcal{A}^n) \setminus (\mathcal{B}_i^n \setminus \mathcal{A}^n)$, класс $\mathcal{Y}_{n+1} = \tilde{\mathcal{B}}_i^n \neq \emptyset$ представим в виде $(\mathcal{D}_0 \setminus \mathcal{D}_1) \cup \ldots \cup (\mathcal{D}_{m-1} \setminus \mathcal{D}_m)$ (m нечетно) или в виде $(\mathcal{D}_0 \setminus \mathcal{D}_1) \cup \ldots \cup \mathcal{D}_m$ (m -четно), где $\mathcal{D}$ имеют вид $\mathcal{B}_j^n \setminus \mathcal{A}^n$ и $\mathcal{D}_i \supset \mathcal{D}_{i+1}$. Утверждаем, что $h^*(\mathcal{M}_\varphi) \approx \Sigma_{a,m+1}$ при нечетном m и $h^*(\mathcal{M}_\varphi) \approx \Pi_{a,m+1}$ при четном m, где $a = 4n+5$. Верхние оценки получаются, как и выше. Докажем $\Sigma_{a,m+1} \leq h^*(\mathcal{M}_\varphi)$ при нечетном m (второй случай аналогичен). Пусть $A \in \Sigma_{a,m+1}$. По доказательству теоремы 5 и замечаниям перед теоремой 2, найдется о.р.ф. f, m-сводящая A к $h^*(\mathcal{Y}_{n+1})$ и такая, что $f(x) \notin h^*(\mathcal{A}^n)$ при всех x. Из последнего условия следует $f(x) \notin h^*(\mathcal{Z}_{n+1} \cup \mathcal{X}_n \cup \ldots \cup \mathcal{X}_0)$, поэтому f сводит A и к $h^*(\mathcal{M}_\varphi)$.

В четвертом случае $\mathcal{Z}_{n+1}$ представимо в виде $(\mathcal{D}_0 \setminus \mathcal{D}_1) \cup \ldots \cup \mathcal{D}_m$ (m четно) или в виде $(\mathcal{D}_0 \setminus \mathcal{D}_1) \cup \ldots \cup (\mathcal{D}_{m-1} \setminus \mathcal{D}_m)$ (m нечетно), где $\mathcal{D}_i \supset \mathcal{D}_{i+1}$ и $\mathcal{D}_i$ имеют вид $\mathcal{A}_{j+1}^n \setminus \mathcal{A}_0^n$. Так же, как в доказательстве теоремы 2, проверяется, что $h^*(\mathcal{M}_\varphi) \approx \Pi_{a,m+1}$ при четном и $h^*(\mathcal{M}_\varphi) \approx \Sigma_{a,m+1}$ при нечетном m. Теорема доказана.

Из доказательства вытекает существование алгоритма, вычисляющего по φ тот из уровней $\Sigma_{n,k}$, $\Pi_{n,k}$, в котором универсально $h^*(\mathcal{M}_\varphi)$, а также точные оценки сложности множеств $h^*(\mathcal{C}_{\gamma,\delta,\eta})$ для любой элементарной характеристики (γ, δ, η), за исключением $(\omega, 0, 0)$. Из доказательства теорем 6 и 2 легко извлекается также перечень всех классов, в которых универсальны множества вида $h^*(\mathcal{M}_\varphi)$. А именно это следующие классы (где $n, m < \omega$): $\Sigma_{1,0}, \Sigma_3, \Sigma_{4,2m+2}, \Pi_{4,2m+1}, \Sigma_{4n+5,m+1}, \Pi_{4n+5,m+1}, \Sigma_{4n+8,m+1}, \Pi_{4n+8,m+1}$, $\Sigma_{4n+6}, \Pi_{4n+6}, \Sigma_{4n+7}, \Pi_{4n+7}$. Из доказательства легко извлекается также вид предложений, дающих канонических представителей в классах эквивалентных предложений (эквивалентность берется по модулю теории булевых алгебр).

Литература

1. С.С.ГОНЧАРОВ, Конструктивизируемость суператомных булевых алгебр, Алгебра и логика, 12, № 1(1973), 31-40.

2. Ю.Л.ЕРШОВ, Теория нумераций, М., Наука, 1977.

3. Ю.Л.ЕРШОВ, Проблемы разрешимости и конструктивные модели, М., Наука, 1980.

4. В.Л.СЕЛИВАНОВ, Иерархии гиперарифметических множеств и функций, Алгебра и логика, 22, № 6 (1983), 666-692.

5. A.H.LACHLAN, On the lattice of recursively enumerable sets, Trans. Amer.Math.Soc., 130, N 1(1968), 1-37.

6. S.LEMPP, Hyperarithmetical index sets in recursion theory, Trans. Amer.Math.Soc., 303, N 2(1987), 559-584.

7. V.L.SELIVANOV, Hierarchies and index sets, 8-th Int. Congress of Logic, Methodology and Philosophy of Science, V.1, Moscow, 1987, 167-169.

8. R.I.SOARE, Recursively enumerable sets and degrees, Berlin, Springer, 1987.

9. С.П.ОДИНЦОВ, В.Л.СЕЛИВАНОВ, Арифметическая иерархия и идеалы нумерованных булевых алгебр, Сиб.мат.журн., 31, № 1 (1990), 140-149.

Поступило 15 июня 1988 г.