M. Sh. Birman, D. R. Yafaev, The scattering matrix for a perturbation of a periodic Schrödinger operator by decreasing potential,
Algebra i Analiz, 1994, Volume 6, Issue 3, 17–39

Алгебра и анализ
Том 6 (1994), вып. 3

Дорогому Людвигу Дмитриевичу Фаддееву
по случаю юбилея и в память о
героическом периоде теории рассеяния

МАТРИЦА РАССЕЯНИЯ ПРИ ВОЗМУЩЕНИИ ПЕРИОДИЧЕСКОГО ОПЕРАТОРА ШРЕДИНГЕРА УБЫВАЮЩИМ ПОТЕНЦИАЛОМ

М. Ш. Бирман[†], Д. Р. Яфаев

Введение

В работе обсуждается стационарный подход к задаче рассеяния для пары H_0, H, где H_0 — эллиптический периодический оператор второго порядка в $L_2(\mathbb{R}^d)$, $H = H_0 + V$, $V = V(x) = O(|x|^{-\rho})$, $|x| \to \infty$, $\rho > 1$. В частности, H_0 может быть периодическим оператором Шредингера. Мы обосновываем принцип предельного поглощения в его усиленном варианте. Затем мы обсуждаем „явное" стационарное представление для матрицы рассеяния. Это представление (см. ниже формулу (5.5)) хорошо известно в теории рассеяния, но ее конкретное истолкование каждый раз требует определенного труда. На основе полученного представления для S-матрицы мы вычисляем асимптотику фаз (т.е. спектра) S-матрицы в предположении, что V асимптотически совпадает с однородной функцией порядка $-\rho$, $\rho > 1$. Подобное вычисление было раньше проведено авторами (см. [БЯ1], а также [БЯ2, БЯ3]) для случая, когда H_0 — оператор с постоянным символом. Для таких H_0 „гладкий" вариант стационарной схемы теории рассеяния хорошо разработан, и это существенно облегчило изучение асимптотики фаз.

Построение продвинутой теории рассеяния для случая, когда H_0 — периодический оператор, встречает при $d > 1$ затруднения. Приходится делать жесткие предположения о поведении собственных значений и функций квазипериодических задач на ячейке периодов. Эти предположения локальны по энергии. Поэтому мы строим *локальные* волновые операторы, чего достаточно для построения S-матрицы в соответствующем интервале значений энергии. Сходные дополнительные предположения делались в работах [Be, Si], где H_0 — периодический оператор Шредингера. В [Be] использовался стационарный подход к теории рассеяния (при $d = 3$, $\rho > 2$), но он не был доведен до построения S-матрицы. В [Si] при

[†]Автор пользовался поддержкой Российского фонда фундаментальных исследований (грант 93-011-1697).

$\rho > 1$ применялся нестационарный метод для построения волновых операторов. Для изучения S-матрицы нестационарный подход плохо приспособлен.

Мы последовательно строим теорию рассеяния в гладком варианте на основе принципа предельного поглощения (§3–5). В частности, получен результат типа Агмона [A] о том, что точки спектра, где резольвента оператора H не имеет предельных значений, совпадает с собственными значениями для H. Последние не имеют внутренних точек накопления. Мы существенно упрощаем первоначальный подход Агмона, разработанный им для случая $H_0 = -\Delta$.

Полученное в §5 выражение для S-матрицы позволяет применить схему работы [БЯ1] для вычисления асимптотики фаз. Задача сводится к изучению асимптотики спектра некоторого интегрального оператора на поверхности постоянной энергии. Этот оператор есть ПДО отрицательного порядка, но (в отличие от [БЯ1]) в его амплитуду входит дополнительный периодический множитель. Подобный множитель создает затруднения и при обосновании принципа предельного поглощения. В обоих случаях эти затруднения преодолеваются с помощью теории *мультипликаторов для интегральных ядер*. Необходимые сведения и ссылки на этот счет приведены в §1. В итоге удается показать, что периодический множитель не входит в выражение для асимптотических коэффициентов. Последние зависят от собственных чисел квазипериодических задач (от дисперсионных функций), но не от собственных функций. Вычислению асимптотики фаз посвящен §6. Остается сказать, что в §2 обсуждаются вопросы, связанные со спектральным разложением оператора H_0. В частности, вводятся дополнительные предположения, о которых шла речь выше.

Темп изложения в работе по необходимости неравномерен. Там, где рассуждение следует уже известному образцу, мы ограничиваемся краткими указаниями и ссылками. Напротив, там, где возникают существенно новые элементы, мы приводим полные доказательства.

Для ссылок на пункты в тексте применяется двойная нумерация (скажем, п. 3.2 означает п. 2 из §3). Приняты следующие соглашения. Интеграл без указания области интегрирования распространен по всему пространству. Через C, c обозначаются различные оценочные постоянные. Для функциональных классов Соболева принято обозначение H^s, $s > 0$. Символом $\mathbb{Q}^d$ обозначается единичный куб в $\mathbb{R}^d$. Далее, $\Omega_* := [-\pi, \pi]^d$; Ω — куб Ω_* с отождествленными противоположными гранями. Для тора $\mathbb{T}^d = \mathbb{R}^d/(2\pi\mathbb{Z})^d$ Ω используется в качестве стандартной реализации; исключения из этого правила специально оговариваются.

Авторы благодарят Институт Э. Шредингера в Вене, чье гостеприимство в декабре 1993 г. способствовало завершению работы над этой статьей.

§1. Вспомогательные сведения. Мультипликаторы

1. Классы компактных операторов. Пусть $\mathfrak{H}_1$, $\mathfrak{H}_2$ — сепарабельные гильбертовы пространства. Через $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}(\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2)$ обозначается банаховво пространство ограниченных линейных операторов, отображающих $\mathfrak{H}_1$ в $\mathfrak{H}_2$; через $\mathfrak{S}_\infty$ — подпространство в $\mathfrak{R}$, состоящее из всех компактных операторов. Всякий оператор $T \in \mathfrak{S}_\infty$ допускает каноническое представление вида

$$T = \sum_k s_k(\cdot, \alpha_k)\beta_k, \tag{1.1}$$

где $\{\alpha_k\}$, $\{\beta_k\}$ — ортонормированные системы в $\mathfrak{H}_1$ и в $\mathfrak{H}_2$ соответственно. Числа $s_k = s_k(T) > 0$ (*сингулярные числа*) не возрастают и стремятся к нулю при $k \to \infty$. Они совпадают с положительными собственными значениями оператора $(T^*T)^{1/2}$.

Класс $\mathfrak{S}_r$, $0 < r < \infty$, состоит из всех тех $T \in \mathfrak{S}_\infty$, для которых конечен функционал

$$\|T\|_r := \Big(\sum_k (s_k(T))^r\Big)^{1/r}. \tag{1.2}$$

Пространство $\mathfrak{S}_r$ полно и сепарабельно относительно нормы (при $r < 1$ — квазинормы) (1.2). Справедливо неравенство треугольника

$$\|T_1 + T_2\|_r^\varkappa \leqslant \|T_1\|_r^\varkappa + \|T_2\|_r^\varkappa, \quad \varkappa = \min\{r, 1\}. \tag{1.3}$$

Класс $\mathfrak{S}_2$ есть класс операторов Гильберта–Шмидта, $\mathfrak{S}_1$ — класс ядерных операторов.

Нам понадобятся еще классы Σ_r, $0 < r < \infty$, компактных операторов T, для которых конечна квазинорма

$$|T|_r := \sup_k k^{1/r} s_k(T). \tag{1.4}$$

Классы Σ_r — полные *несепарабельные* пространства относительно квазинормы (1.4). Приведем аналог неравенства (1.3). Пусть $T = \sum_n T_n$. Тогда

$$|T|_r^\varkappa \leqslant c \sum_n |T_n|_r^\varkappa, \tag{1.5}$$

где $\varkappa = 1$, $c = c(r)$ при $r > 1$; $\varkappa = r$, $c = c(r)$ при $r < 1$; $\forall \varkappa < 1$, $c = c(\varkappa)$ при $r = 1$.

Сепарабельное подпространство, получаемое замыканием в Σ_r совокупности операторов конечного ранга, обозначим через Σ_r^0. Прямое описание Σ_r^0 состоит в следующем:

$$\Sigma_r^0 = \{\, T \in \mathfrak{S}_\infty : s_k(T) = o(k^{-1/r}) \,\}.$$

2. Мультипликаторы в классах ядер интегральных операторов. Значительные технические упрощения в основной части работы связаны с использованием понятия *мультипликатора*. Здесь приводятся необходимые сведения на этот счет. Значительно более подробно (и в более общей обстановке) свойства мультипликаторов обсуждаются в [БС1, БС2].

Пусть X, Y — два сепарабельных пространства с (σ-конечной) мерой dx, dy соответственно, и пусть $\mathfrak{H}_1 = L_2(Y)$, $\mathfrak{H}_2 = L_2(X)$. Рассмотрим операторы класса $\mathfrak{S}_2$. Это интегральные операторы вида

$$(Tu)(x) = \int_Y t(x, y) u(y)\, dy$$

с квадратично итегрируемыми ядрами, причем

$$\|T\|_2^2 = \int_{X \times Y} |t(x, y)|^2\, dx\, dy.$$

Пусть теперь $b \in L_\infty(X \times Y)$ и $T(b)$ — оператор с ядром $b(x, y)t(x, y)$. Линейное преобразование (*трансформатор*)

$$\mathrm{M}(b) : T \mapsto T(b) \tag{1.6}$$

непрерывно в $\mathfrak{S}_2$ и его норма совпадает с нормой b в L_∞:

$$\|\mathbf{M}(b)\|_{\mathfrak{S}_2} = v.\sup|b(x,y)|.$$

Пусть теперь функция b (*мультипликатор*) такова, что трансформатор (1.6) непрерывно переводит $\mathfrak{S}_1$ в $\mathfrak{S}_1$. *По двойственности*[1] это равносильно тому, что $\mathbf{M}(b)$ непрерывно переводит $\mathfrak{R}$ в $\mathfrak{R}$ и $\mathfrak{S}_\infty$ в $\mathfrak{S}_\infty$. При этом

$$\|\mathbf{M}(b)\|_{\mathfrak{S}_1} = \|\mathbf{M}(b)\|_{\mathfrak{S}_\infty} = \|\mathbf{M}(b)\|_{\mathfrak{R}}. \tag{1.7}$$

Совокупность мультипликаторов b, для которых (1.6) непрерывно переводит $\mathfrak{S}_1$ в себя, обозначим через $\mathfrak{M}$.

Замечание 1.1. Пусть $\mathfrak{S}$ — какой-либо из классов $\mathfrak{S}_r$, Σ_r, Σ_r^0 при $r > 1$, и пусть $b \in \mathfrak{M}$. Можно показать, что тогда трансформатор (1.6) непрерывен в $\mathfrak{S}$ и

$$\|b\|_{L_\infty} \leqslant \|\mathbf{M}(b)\|_{\mathfrak{S}} \leqslant \|\mathbf{M}(b)\|_{\mathfrak{R}}.$$

3. Приведем теперь достаточное условие (см. [БС1]) включения $b \in \mathfrak{M}$.

Теорема 1.2. *Пусть $\mathcal{T}$ — сепарабельное пространство с (σ-конечной) мерой $d\tau$, и пусть для п.в. $x \in X$ и п.в. $y \in Y$*

$$b(x,y) = \int_{\mathcal{T}} f(x,\tau)g(y,\tau)\,d\tau, \tag{1.8}$$

причем

$$\langle f\rangle^2 := v.\sup_x \int_{\mathcal{T}} |f(x,\tau)|^2\,d\tau < \infty,$$

$$\langle g\rangle^2 := v.\sup_y \int_{\mathcal{T}} |g(y,\tau)|^2\,d\tau < \infty.$$

Тогда $b \in \mathfrak{M}$ и

$$\|\mathbf{M}(b)\|_{\mathfrak{R}} \leqslant \langle f\rangle\langle g\rangle. \tag{1.9}$$

Доказательство. Для удобства читателя мы приведем здесь доказательство этой теоремы. В силу (1.7) достаточно оценить норму $\mathbf{M}(b)$ в $\mathfrak{S}_1$. Пусть сначала T есть нормированный оператор ранга 1, т.е. $t(x,y) = \alpha(x)\beta(y)$ и

$$\|\alpha\|_{L_2(X)} = \|\beta\|_{L_2(Y)} = 1.$$

В силу (1.8) оператор $T(b)$ есть композиция двух операторов класса $\mathfrak{S}_2$ с ядрами $\alpha(x)f(x,\tau)$ и $g(y,\tau)\beta(y)$. Поэтому

$$\|T(b)\|_{\mathfrak{S}_1}^2 \leqslant \int_{X\times\mathcal{T}} |\alpha f|^2\,dx\,d\tau \int_{Y\times\mathcal{T}} |\beta g|^2\,dy\,d\tau \leqslant \langle f\rangle^2\langle g\rangle^2. \tag{1.10}$$

Для произвольного $T \in \mathfrak{S}_1$ воспользуемся представлением (1.1). Тогда с помощью (1.10) получаем оценку

$$\|T(b)\|_{\mathfrak{S}_1} \leqslant \langle f\rangle\langle g\rangle \sum_k s_k(T),$$

которая равносильна (1.9). •

[1] Само распространение $\mathbf{M}(b)$ на $\mathfrak{R}$ использует двойственность между $\mathfrak{R}$ и $\mathfrak{S}_1$.

Замечание 1.3. Пусть выполнены условия теоремы 1.2. Обозначим через g_τ (через f_τ) оператор умножения в $\mathfrak{H}_1$ (в $\mathfrak{H}_2$) на функцию $g(y,\tau)$ (на $f(x,\tau)$). Тогда для любого оператора $T \in \mathfrak{R}$ оператор $T(b)$ можно записать в виде

$$T(b) = \int_{\mathcal{T}} f_\tau T g_\tau \, d\tau, \tag{1.11}$$

причем интеграл справа сходится сильно. Из (1.11) оценку (1.9) легко вывести прямо, не прибегая к двойственности между $\mathfrak{S}_1$ и $\mathfrak{R}$.

4. Приведем теперь одно конкретное условие непрерывности $\mathrm{M}(b)$ в классах $\mathfrak{S}_r$, Σ_r. Пусть X — область в $\mathbb{R}^d$, $d \geqslant 1$. Предположим, что при некотором $s > 0$

$$b(\cdot, y) \in H^s(X), \quad \text{п.в. } y \in Y, \tag{1.12}$$

$$\|b\|_{(s)} := v.\sup_y \|b(\cdot,y)\|_{H^s(X)} < \infty. \tag{1.13}$$

Теорема 1.4. *Пусть $X \subset \mathbb{R}^d$ — ограниченная область с липшицевой границей, и пусть условия* (1.12), (1.13) *выполнены при* $2s > d$ *для* $r \geqslant 1$ *и при* $s > (r^{-1} - 1/2)d$ *для* $r < 1$. *Пусть* $\mathfrak{S}^{(r)}$ *означает любой из классов* $\mathfrak{S}_r$, Σ_r, Σ_r^0. *Тогда трансформатор* (1.6) *непрерывен в* $\mathfrak{S}^{(r)}$ *и*

$$\|\mathrm{M}(b)\|_{\mathfrak{S}^{(r)}} \leqslant C(X,r)\|b\|_{(s)}. \tag{1.14}$$

Доказательство для классов $\mathfrak{S}_r$ приведено в [БС2], теорема 9.2. На классы Σ_r, Σ_r^0 утверждение теоремы легко переносится посредством вещественной интерполяции.

Замечание 1.5. Теорема 1.4 сохранит силу, если в ее условиях поменять местами роли переменных x, y. Для этого достаточно перейти к рассмотрению сопряженных операторов.

Замечание 1.6. Теорема 1.4 останется справедливой, если X можно разбить на конечное число липшицевых областей $X_1, \dots, X_N$, для каждой из которых выполнены условия вида (1.12), (1.13). В оценку (1.14) тогда войдет сумма соответствующих функционалов вида (1.13).

5. Здесь мы выделим одну простую лемму, не связанную с мультипликаторами. Пусть $G \subset \mathbb{R}^d$, $d > 1$, — компактное гладкое многообразие (возможно, с краем) коразмерности 1, и пусть dG — мера, индуцированная на G евклидовой метрикой в $\mathbb{R}^d$. Обозначим через ω_r преобразование Фурье функции $(1+|x|^2)^{-r}$, $r > 0$, в $\mathbb{R}^d$. Введем в рассмотрение действующие в $L_2(G)$ интегральные операторы

$$(A_m v)(\eta) = (2\pi)^{-d/2} \int_G \omega_r(\eta - \tilde\eta - 2\pi m) v(\tilde\eta)\, dG(\tilde\eta), \quad m \in \mathbb{Z}^d. \tag{1.15}$$

Лемма 1.7. *При* $2r > 1$ *операторы* A_m *компактны и*

$$\|A_m\| \leqslant C(N)(1+|m|)^{-N}, \quad \forall N > 0. \tag{1.16}$$

Доказательство. Очевидно, $\omega_r \in C^\infty(\mathbb{R}^d \setminus 0)$, $D^\alpha \omega_r(\eta) = O(|\eta|^{-N})$, $\forall \alpha$, $\forall N$ при $|\eta| \to \infty$ и $\omega_r(\eta) = O(|\eta|^{2r-d})$ при $|\eta| \to 0$. Последнее условие означает, что при

$2r > 1$ оператор A_0 есть оператор со слабой особенностью. Тем более компактны операторы A_m при $m \neq 0$. Оценка вида (1.16) при достаточно больших $|m|$ верна для нормы A_m в классе $\mathfrak{S}_2$. •

Замечание 1.8. Лемма 1.7, очевидно, сохранит силу, если ω_r в (1.15) заменить преобразованием Фурье функции класса $C^\infty(\mathbb{R}^d)$, которая вне некоторого шара совпадает с однородной функцией порядка $2r > 1$. Далее, для достаточно больших $|m|$ ядро мало вместе с производными до любого фиксированного порядка. Это позволяет при достаточно больших $|m|$ заменить в (1.16) $\|A_m\|$ на $|A_m|_t$, т.е. на квазинорму в классе Σ_t при любом $t > 0$.

§2. Спектральные свойства периодического оператора H_0

1. Периодический оператор второго порядка. В $L_2(\mathbb{R}^d)$, $d > 1$, рассматривается самосопряженный оператор второго порядка вида

$$H_0 u = -\operatorname{div}(a(x)\operatorname{grad} u) + i(q(x)\nabla + \nabla\overline{q(x)})u + p(x)u. \tag{2.1}$$

Здесь матрица a, вектор q и функция p периодичны:

$$a(x+n) = a(x), \;\; q(x+n) = q(x), \;\; p(x+n) = p(x), \quad n \in \mathbb{Z}^d. \tag{2.2}$$

Кроме того, считается, что $a > 0$, $p = \overline{p}$,

$$a + a^{-1} \in L_\infty(\mathbb{R}^d), \quad q \in L_\infty(\mathbb{R}^d), \quad p \in L_\infty(\mathbb{R}^d). \tag{2.3}$$

При сделанных предположениях о коэффициентах точное определение оператора H_0 дается через соответствующую квадратичную форму, определенную на классе $H^1(\mathbb{R}^d)$:

$$h_0[u] = \int (a\nabla u \nabla\overline{u} + 2\operatorname{Re} i(q\nabla u)\overline{u} + p|u|^2)\,dx, \quad u \in H^1(\mathbb{R}^d). \tag{2.4}$$

При линейных преобразованиях координат в $\mathbb{R}^d$ оператор (2.1) переходит в оператор того же вида. Поэтому предположение (2.2) о том, что решетка периодов кубическая, не уменьшает общности. В случае, когда матрица a постоянна и вектор $q = 0$, будем называть H_0 *оператором Шредингера*.

Выделим теперь в классе $H^1(\mathbb{Q}^d)$ подпространство $\widehat{H}^1(\mathbb{Q}^d)$ всех *периодических* функций. В $L_2(\mathbb{Q}^d)$ рассмотрим семейство квадратичных форм $h(\xi)$, $\xi \in \mathbb{R}^d$,

$$h(\xi)[u] = \int_{\mathbb{Q}^d} (a\nabla u \nabla\overline{u} + 2\operatorname{Re} i(q\nabla u)\overline{u} + p|u|^2)\,dx, \tag{2.5}$$

$$e^{-i\xi x}u(x) \in \widehat{H}^1(\mathbb{Q}^d). \tag{2.6}$$

Через $H(\xi)$ обозначим самосопряженный в $L_2(\mathbb{Q}^d)$ оператор, порожденный формой (2.5), (2.6). Существенно, что граничное условие (2.6) переходит в себя при замене ξ на $\xi + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}^d$. Поэтому в действительности *квазиимпульс* $\xi \in \mathbb{T}^d$.

Оператор $H(\xi)$ имеет полуограниченный снизу дискретный спектр

$$E_1(\xi) \leqslant E_2(\xi) \leqslant \dots \leqslant E_l(\xi) \leqslant E_{l+1}(\xi) \leqslant \dots \tag{2.7}$$

Функции $E_l(\xi)$ непрерывны при $\xi \in \mathbb{T}^d$. Каждая из функций $E_l(\xi)$ *аналитична* по ξ в окрестности любой точки $\xi_0 \in \mathbb{T}^d$, в которой $E_l(\xi_0)$ — *простое* собственное значение для $H(\xi_0)$, *Спектр оператора* H_0, порожденного формой (2.4), *состоит из отрезков* (*зон*) Λ_l, являющихся образами функций E_l, $l = 1, 2, \ldots$. Зоны могут перекрываться, причем лакун в спектре вообще может не быть.

Для оператора Шредингера спектр *абсолютно непрерывен*. Известно (см. [Ск, Sk]), что для $d = 2, 3$ каждое достаточно большое значение E принадлежит образу более чем одной из функций (2.7) (можно думать, что это верно и при $d > 3$).

Пусть в (2.1) $q = 0$. Тогда $E_1(0) = \min E_1(\xi) < \min E_2(\xi)$, причем $E_1(\xi) > E_1(0)$ при $\xi \neq 0$ и $\xi = 0$ — точка *невырожденного* минимума для E_1. Отсюда следует, что при достаточно малых положительных значениях $\lambda - E_1(0)$ поверхность $\{\, \xi : E_1(\xi) = \lambda \,\}$ — аналитическая поверхность без критических точек, а множество $\{\, \xi : E_2(\xi) = \lambda \,\}$ пусто.

Рассмотрим теперь собственные функции $\psi_l(\xi, x)$, соответствующие собственным значениям (2.7). Мы будем считать функции ψ_l нормированными:

$$\int\limits_{\mathbb{Q}^d} |\psi_l(\xi, x)|^2 \, dx = 1. \tag{2.8}$$

Если $E_l(\xi_0)$ — простое собственное значение для $H(\xi_0)$, то функцию $\psi_l(\xi, x)$ можно выбрать *аналитической по* ξ вблизи $\xi_0 \in \mathbb{T}^d$. В силу (2.6) для ψ_l справедливо представление

$$\psi_l(\xi, x) = e^{i\xi x} \varphi_l(\xi, x), \quad \xi \in \Omega_*, \tag{2.9}$$

где функция φ_l периодична по x. В отличие от ψ_l для φ_l нет периодичности по ξ. Условие $\xi \in \Omega_*$ (вместо $\xi \in \mathbb{T}^d$) фиксирует выбор φ_l. Впрочем, иногда придется использовать соотношение (2.9) для ξ из некоторой окрестности $\Omega_* \subset \mathbb{R}^d$ (см. п. 3.2 и далее).

Замечание 2.1. В силу известных фактов [ЛУ] об эллиптических операторах второго порядка с ограниченными (см. (2.3)) коэффициентами, функции ψ_l, φ_l удовлетворяют по x условию Гельдера с некоторым положительным показателем.

2. Теорема разложения для оператора H_0. Ядра ψ_l порождают интегральные преобразования, аналогичные интегральному преобразованию Фурье. Положим

$$(\Psi_l u)(\xi) = (2\pi)^{-d/2} \int \overline{\psi_l(\xi, x)} u(x) \, dx, \quad \xi \in \mathbb{T}^d. \tag{2.10}$$

Первоначально оператор (2.10) определяется на функциях из класса Шварца $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, а затем расширяется на все $L_2(\mathbb{R}^d)$ по непрерывности. *Оператор* Ψ_l — *частично изометрический на* $L_2(\mathbb{R}^d)$ *и его образ совпадает с* $L_2(\mathbb{T}^d)$. Далее, проекторы

$$P_l := \Psi_l^* \Psi_l \tag{2.11}$$

удовлетворяют соотношениям ортогональности и полноты

$$P_k P_l = \delta_{kl} P_l, \quad \sum_l P_l = I. \tag{2.12}$$

Наконец,

$$\Psi_l H_0 = [E_l] \Psi_l, \quad l = 1, 2, \ldots, \tag{2.13}$$

где $[E_l]$ — оператор умножения в $L_2(\mathbb{T}^d)$ на функцию E_l. Таким образом, функции ψ_l образуют полный набор собственных функций непрерывного спектра оператора H_0.

Пусть теперь $\Delta \subset \mathbb{R}$ — ограниченный интервал, $\mathcal{E}_0(\cdot)$ — спектральная мера оператора H_0 и $\tilde{f}_l := \Psi_l f$. Из (2.11)–(2.13) следует, что

$$(\mathcal{E}_0(\Delta)f, g) = \sum_l \int_{\xi: E_l(\xi)\in\Delta} \tilde{f}_l(\xi)\overline{\tilde{g}_l(\xi)}\, d\xi. \tag{2.14}$$

Ясно, что сумма в (2.14) содержит разве лишь конечное число слагаемых.

3. Основное предположение. Прямой интеграл. Всюду в дальнейшем считаем фиксированным значение λ внутри некоторой зоны спектра Λ_l и считаем выполненным

Предположение 2.2. a) Число $\lambda \in \Lambda_l$ не принадлежит ни одной из зон Λ_k при $k \neq l$. b) Поверхность $G(\lambda) := \{\xi \in \mathbb{T}^d : E_l(\xi) = \lambda\}$ не имеет критических точек, т.е. $(\nabla E_l)(\xi) \neq 0$ для $\xi \in G(\lambda)$.

Сделанное предположение довольно ограничительно. Оно не выполнено при достаточно больших λ. Вместе с тем при $q = 0$ оно заведомо выполнено для λ вблизи $E_1(0)$. О возможности смягчения условий предположения 2.2 см. п. 6.5.

Отметим, что поверхность $G(\lambda)$ не предполагается связной. В дальнейшем будем опускать индекс l, т.е. вместо E_l, φ_l, $\tilde{f}_l = \Psi_l f$, и т.п. будем писать E, ψ, φ, $\tilde{f} = \Psi f$ и т.п. В условиях предположения 2.2 функция $E(\xi)$ — *вещественно аналитическая* вблизи (*аналитической*) поверхности $G(\lambda)$. Ясно, что предположение 2.2 автоматически выполнено для точек $\mu \in [\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon] =: \delta(\lambda, \varepsilon)$ при достаточно малом $\varepsilon > 0$. В дальнейшем промежуток $\delta = \delta(\lambda, \varepsilon)$ считается фиксированным (при необходимости он будет сужаться). Между точками поверхностей $G(\mu)$, $\mu \in \delta$ и $G(\lambda)$ устанавливается канонический диффеоморфизм[2]

$$\zeta(\mu)\colon G \to G(\mu)$$

посредством поля нормалей. На поверхности $G(\mu)$ введем меру dG_μ, индуцированную (евклидовой) мерой на $\mathbb{T}^d$, и положим $d\sigma_\mu(\xi) = |\nabla E(\xi)|^{-1} dG_\mu(\xi)$,

$$e(\mu, \xi) = \frac{d\sigma_\mu(\zeta(\mu)\xi)}{d\sigma(\xi)}, \quad \xi \in G. \tag{2.15}$$

Кроме того, введем отображение

$$(J(\mu)v)(\xi) = v(\zeta(\mu)\xi)\sqrt{e(\mu,\xi)}, \quad \xi \in G. \tag{2.16}$$

Пусть $\langle\cdot,\cdot\rangle$ обозначает скалярное произведение в $\mathfrak{N} := L_2(G; d\sigma)$. Из (2.14)–(2.16) теперь следует, что

$$\frac{d(\mathcal{E}_0(\mu)f, g)}{d\mu} = \langle J(\mu)\tilde{f}, J(\mu)\tilde{g}\rangle, \quad \mu \in \delta. \tag{2.17}$$

Положим $\mathfrak{H} = L_2(\mathbb{R}^d)$. Из (2.17) видно, что *спектр H_0 в $\mathcal{E}_0(\delta)\mathfrak{H}$ абсолютно непрерывен*. Далее, (2.17) позволяет разложить $\mathcal{E}_0(\delta)\mathfrak{H}$ в *прямой интеграл*, в котором *действие H_0 сводится к умножению на независимую переменную $\mu \in \delta$*. Именно, положим $\mathcal{H} = L_2(\delta; \mathfrak{N})$ и рассмотрим оператор U, переводящий функцию $f \in \mathcal{E}_0(\delta)\mathfrak{H}$ в вектор-функцию $J(\mu)\tilde{f}$ со значениями в $\mathfrak{N}$. Тогда *U есть унитарное отображение $\mathcal{E}_0(\delta)\mathfrak{H}$ на $\mathcal{H}$ и оператор UH_0U^* есть оператор умножения на независимую переменную в $\mathcal{H}$.*

[2]В обозначении $G(\mu)$ при $\mu = \lambda$ индекс λ будет обычно опускаться. То же относится к объектам, определенным на $G(\mu)$, коль скоро $\mu = \lambda$.

4. Остановимся на некоторых технических деталях, которые нам понадобятся в §3. Введем обозначение

$$\eta = \eta(\mu, \xi) = \zeta(\mu)\xi, \quad \xi \in G,$$

и отметим оценки

$$|\eta(\mu, \xi) - \xi| \leqslant C|\mu - \lambda|, \quad \xi \in G, \tag{2.18}$$

$$|e(\mu, \xi) - 1| \leqslant C|\mu - \lambda|, \quad \xi \in G. \tag{2.19}$$

Условимся обозначать нижним индексом $*$ объекты, естественно возникающие при переходе от $\mathbb{T}^d$ к Ω_*. Например, через $G_*(\mu)$ обозначается поверхность, которая возникает из $G(\mu)$ при реализации $\mathbb{T}^d$ в виде Ω и последующего „расклеивания" граней куба Ω. Иногда, однако, потребуются несколько более сложные соглашения. Они связаны с тем, что поверхности G_* и $G_*(\mu)$ могут утратить близость в $\mathbb{R}^d$. Именно, для точек $\xi \in G_*$ введем поле нормалей к G_* в $\mathbb{R}^d$. Точки $\eta(\mu, \xi) \in G(\mu) \subset \mathbb{T}^d$ реализуем в $\mathbb{R}^d$ посредством переноса вдоль этого поля нормалей *с возможным выходом из* Ω_*. Соответствующие точки в $\mathbb{R}^d$ обозначим через $\eta_*(\mu, \xi)$. Тогда, очевидно, (2.18) перейдет в неравенство

$$|\eta_*(\mu, \xi) - \xi| \leqslant C|\mu - \lambda|, \quad \xi \in G_*. \tag{2.20}$$

5. Обсудим теперь характер зависимости собственной функции $\psi(\xi, x)$ от ξ вблизи G. Пусть $\{\mathfrak{G}_j\}$ — конечное *покрытие* поверхности G областями и $\{G_j\}$ — *разбиение* G на области с кусочно-гладкой границей, причем $\operatorname{clos} G_j \subset \mathfrak{G}_j$. Положим

$$\widehat{\mathfrak{G}}_j = \bigcup_{\mu \in \delta} \zeta(\mu)\mathfrak{G}_j; \qquad \widehat{G}_j = \bigcup_{\mu \in \delta} \zeta(\mu)G_j.$$

Если покрытие $\{\mathfrak{G}_j\}$ достаточно „мелкое", то функцию $\psi(\xi, \cdot)$ можно выбрать *вещественно-аналитической вектор-функцией* (со значениями в $L_2(\mathbb{Q}^d)$) для $\xi \in \widehat{\mathfrak{G}}_j$. Мы выберем $\psi(\xi, \cdot)$ *кусочно-аналитической*[3], полагая ее в $\widehat{G}_j$ равной сужению аналитической в $\widehat{\mathfrak{G}}_j$ функциии. Значения ψ на ∂G_j (и на $(\partial G_j)^\wedge)$) нам безразличны. При таком выборе функции ψ из (2.18) вытекает оценка

$$\int\limits_{\mathbb{Q}^d} |\psi(\eta, x) - \psi(\xi, x)|^2 \, dx \leqslant C|\mu - \lambda|^2, \quad \xi \in G. \tag{2.21}$$

§3. Оценки для производной спектральной меры оператора H_0

Здесь будет показано, что спектральная мера $\mathcal{E}_0$ в подходящем смысле дифференцируема для $\mu \in \delta$ и ее производная удовлетворяет условию Гельдера. Соответствующие оценки (теоремы 3.1, 3.2) играют основную роль при построении теории рассеяния для пары H_0, $H = H_0 + V$. Во всем дальнейшем *через* X_r *обозначается оператор умножения на функцию* $(1 + |x|^2)^{-r/2}$, $r \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^d$.

[3]Возможны топологические препятствия к выбору ψ аналитической в полной окрестности поверхности G.

1. Теорема 3.1. *Пусть* $2r > 1$. *Для всех*[4] $\mu \in \delta$ *существует слабая производная*

$$\mathcal{F}_r(\mu) := \frac{d}{d\mu}(X_r \mathcal{E}_0(\mu) X_r) \in \mathfrak{S}_\infty, \tag{3.1}$$

$$\|\mathcal{F}_r(\mu)\| \leqslant C, \quad \mu \in \delta. \tag{3.2}$$

Доказательство. Обозначим через $\mathcal{I}(\mu)$ оператор сужения на поверхность $G(\mu)$ и через $\langle\cdot,\cdot\rangle_\mu$ — скалярное произведение в $L_2(G(\mu), d\sigma_\mu)$. Формулу (2.17) сейчас удобно записать в виде

$$\frac{d(\mathcal{E}_0(\mu)f, g)}{d\mu} = \langle \mathcal{I}(\mu)\tilde{f}, \mathcal{I}(\mu)\tilde{g}\rangle_\mu, \quad \mu \in \delta. \tag{3.3}$$

Соотношения (3.1), (3.2) равносильны компактности и оценке нормы оператора

$$B = \mathcal{I}(\mu)\Psi X_r \colon L_2(\mathbb{R}^d) \to L_2(G(\mu), d\sigma_\mu).$$

Оператор B удобно заменить оператором BB^*, ядро которого, очевидно, есть

$$(2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{i(\tilde{\xi}-\xi)x} \overline{\varphi(\xi, x)} \varphi(\tilde{\xi}, x)(1 + |x|^2)^{-r}\, dx, \tag{3.4}$$

и можно считать $\xi, \tilde{\xi} \in G_*(\mu)$. Наконец, оператор с ядром (3.4) достаточно изучить как оператор в $L_2(G_*(\mu))$.

Воспользуемся разложением в ряд Фурье периодической по x функции

$$\overline{\varphi(\xi, x)}\varphi(\tilde{\xi}, x) = \sum_m b_m(\xi, \tilde{\xi}) \exp(2\pi i m x). \tag{3.5}$$

Тогда ядро (3.4) записывается в виде суммы

$$(2\pi)^{-d/2} \sum_{m \in \mathbb{Z}^d} b_m(\xi, \tilde{\xi}) \omega_r(\xi - \tilde{\xi} - 2\pi m), \tag{3.6}$$

где ω_r — преобразование Фурье функции $(1 + |x|^2)^{-r/2}$, а

$$b_m(\xi, \tilde{\xi}) = \int_{\mathbb{Q}^d} \overline{\varphi(\xi, x)}\varphi(\tilde{\xi}, x) \exp(-2\pi i m x)\, dx. \tag{3.7}$$

Ядра (3.7) имеют вид (1.8). В силу теоремы 1.2 и нормировки (2.8) мультипликаторная норма в $L_2(G_*(\mu))$ каждого из ядер b_m не превосходит единицы. К операторам с ядрами $\omega_r(\xi - \tilde{\xi} - 2\pi m)$ применима лемма 1.7. В силу оценки (1.16) ряд операторов, отвечающих сумме (3.6), сходится по норме. Легко понять, что эта сходимость равномерна относительно $\mu \in \delta$. •

2. Теперь нам предстоит доказать гельдеровость оператор-функции (3.1).

Теорема 3.2. *В условиях теоремы* 3.1

$$\|\mathcal{F}_r(\mu) - \mathcal{F}_r(\mu_0)\| \leqslant C(\theta)|\mu - \mu_0|^\theta, \quad \mu, \mu_0 \in \delta, \ \forall \theta < \min\left\{1, r - \frac{1}{2}\right\}. \tag{3.8}$$

Доказательство теоремы сравнительно громоздко, хотя в существенном основано на тех же соображениях, что и доказательство теоремы 3.1. Для упрощения

[4] Граничные точки промежутка δ не являются исключением, так как предположение 2.2 можно считать выполненным для точек несколько более широкого промежутка.

обозначений мы примем, что в (3.8) $\mu_0 = \lambda$. Так как фактически все точки промежутка δ равноправны, это не уменьшает общности. Оператор $\mathcal{G}(\mu) := \mathcal{F}_r(\mu) - \mathcal{F}_r(\lambda)$ самосопряжен. Поэтому достаточно оценить его квадратичную форму.

В согласии с обозначениями из п. 2.4 примем сейчас следующее определение для $\varphi(\xi, x)$:

$$\begin{gathered}\varphi(\eta_*, x) = \psi(\eta, x)\exp(-i\eta_* x),\\ \eta = \eta(\mu,\xi),\ \ \eta_* = \eta_*(\mu,\xi), \quad \xi \in G_*.\end{gathered} \tag{3.9}$$

Из (3.9) видно, что функция φ — кусочно-аналитическая в окрестности G_* (при переходе от G к G_* на G_* могут появиться новые разрывы, происшедшие от фазового множителя). Отметим неравенство

$$\int\limits_{\mathbb{Q}^d} |\varphi(\eta_*, x) - \varphi(\xi, x)|^2\, dx \leqslant C|\mu - \lambda|^2, \quad \xi \in G_*, \tag{3.10}$$

справедливое в силу (2.20), (2.21).

Положим $v = \Psi X_r f$. В соответствии с (2.17)

$$(\mathcal{G}(\mu)f, f) = \langle J(\mu)v, J(\mu)v\rangle - \langle Jv, Jv\rangle = \int\limits_G (|v(\eta)|^2 e(\mu,\xi) - |v(\xi)|^2)\, d\sigma(\xi). \tag{3.11}$$

Заметим, что в силу (2.19), (3.3) и (3.2)

$$\begin{aligned}\Big|\int\limits_G |v(\eta)|^2(e(\mu,\xi) - 1)\, d\sigma(\xi)\Big| &\leqslant C|\mu - \lambda| \int\limits_G |v(\eta)|^2\, d\sigma(\xi)\\ &\leqslant C_1|\mu - \lambda| \int\limits_G |v(\eta)|^2\, d\sigma_\mu(\xi) = C_1|\mu - \lambda|(\mathcal{F}_r(\mu)f, f)\\ &\leqslant C_2|\mu - \lambda|\|f\|^2.\end{aligned} \tag{3.12}$$

Поэтому в (3.11) можно заменить функцию e на единицу. Далее,

$$\begin{aligned}&\Big|\int\limits_G (|v(\eta)|^2 - |v(\xi)|^2)\, d\sigma(\xi)\Big|\\ &\quad\leqslant \Big(\int\limits_G |v(\eta) - v(\xi)|^2\, d\sigma(\xi)\Big)^{1/2}\Big(2\int\limits_G (|v(\eta)|^2 + |v(\sigma)|^2)\, d\sigma(\xi)\Big)^{1/2}.\end{aligned} \tag{3.13}$$

Второй множитель справа в (3.13) имеет оценку $C\|f\|$, а потому дело сводится к оценке в $L_2(G, \sigma)$ нормы разности

$$\begin{aligned}v(\eta) - v(\xi) &= (2\pi)^{-d/2} \int \big(e^{-ix\eta_*}\overline{\varphi(\eta_*, x)} - e^{-ix\xi}\overline{\varphi(\xi, x)}\big)(1 + |x|^2)^{-r/2} f(x)\, dx\\ &= (2\pi)^{-d/2}(z + w),\end{aligned} \tag{3.14}$$

где

$$\begin{aligned}z &= \int e^{-ix\eta_*}\big(\overline{\varphi(\eta_*, x)} - \overline{\varphi(\xi, x)}\big)(1 + |x|^2)^{-r/2} f(x)\, dx, \quad \xi \in G_*,\\ w &= \int (e^{-ix\eta_*} - e^{-ix\xi})\overline{\varphi(\xi, x)}(1 + |x|^2)^{-r/2} f(x)\, dx, \qquad \xi \in G_*.\end{aligned}$$

Оператор $B^0 : f \mapsto z$ имеет такую же структуру, что и оператор B из п. 1, но роль ядра $\varphi(\xi, x)$ теперь играет ядро $\varphi(\eta_*, x) - \varphi(\xi, x)$. Повторяя рассуждения из п. 1 и учитывая (3.10), придем к оценке

$$\int_{G_*} |z(\xi)|^2 \, d\sigma(\xi) \leqslant C|\mu - \lambda|^2 \|f\|^2. \tag{3.15}$$

3. Остается оценить норму функции w. Введем операторы $K_r(\mu)$: $L_2(\mathbb{R}^d) \to L_2(G_*)$, $\quad 2r > 1$,

$$(K_r(\mu)f)(\xi) = \int e^{-i\eta_* x}(1 + |x|^2)^{-r/2} f(x)\, dx, \quad \xi \in G_*.$$

Положим $\vartheta = r - 1/2$ при $2r < 3$; $\vartheta < 1$ при $2r = 3$; $\vartheta = 1$ при $2r > 3$. Справедлива оценка

$$\|K_r(\mu) - K_r(\lambda)\| \leqslant C|\mu - \lambda|^\vartheta, \tag{3.16}$$

равносильная стандартной теореме вложения (теореме о следах) функций класса $H^r(\mathbb{R}^d)$ в $L_2(G_*(\mu))$.

Запишем теперь выражение для w в виде

$$w = (Q_r(\mu) - Q_r(\lambda))f, \quad Q_r : L_2(\mathbb{R}^d) \to L_2(G_*),$$

$$(Q_r(\mu)f)(\xi) = \int e^{-i\eta_* x}\overline{\varphi(\xi, x)}(1 + |x|^2)^{-r/2} f(x)\, dx, \quad \xi \in G_*.$$

Вопрос сводится к оценке нормы оператора $\mathcal{P}(\mu) := Q_r(\mu) - Q_r(\lambda)$ или, что удобнее, к оценке нормы оператора $\mathcal{P}(\mu)\mathcal{P}^*(\mu)$. Ядро последнего имеет вид (полагаем $\tilde\eta_* = \eta_*(\tilde\xi, \mu))$)

$$\int (e^{-i\eta_* x} - e^{-i\xi x})\overline{\varphi(\xi, x)}\varphi(\tilde\xi, x)(1 + |x|^2)^{-r}(e^{i\tilde\eta_* x} - e^{i\tilde\xi x})\, dx = \sum_{m \in \mathbb{R}^d} b_m(\xi, \tilde\xi)\gamma_m(\xi, \tilde\xi), \tag{3.17}$$

где ядра b_m определены в соответствии с (3.5) формулами (3.7), а ядра γ_m имеют вид

$$\gamma_m(\xi, \tilde\xi) = \int (e^{-i\eta_* x} - e^{-i\xi x}) e^{2\pi i m x}(1 + |x|^2)^{-r}(e^{i\tilde\eta_* x} - e^{i\tilde\xi x})\, dx.$$

Ядру γ_m отвечает действующий в $L_2(G_*)$ оператор[5]

$$\Gamma_m = (K_r(\mu) - K_r(\lambda))[e^{2\pi i m x}](K_r(\mu) - K_r(\lambda))^*. \tag{3.18}$$

Уже отмечалось, что мультипликаторная норма каждого из ядер b_m не превосходит единицы. Поэтому оценка для оператора $\mathcal{P}(\mu)\mathcal{P}^*(\mu)$ сводится к оценкам норм операторов Γ_m. Фиксируем $\nu > 0$. При $|m| \leqslant \nu$ в силу (3.16) запишем

$$\|\Gamma_m\| \leqslant C|\mu - \lambda|^{2\vartheta}, \quad |m| \leqslant \nu. \tag{3.19}$$

При $|m| > \nu$ оценку проведем иначе. Именно, ядро оператора (3.18) представляет собой линейную комбинацию ядер $\omega_r(\eta_* - \tilde\eta_* - 2\pi m)$, $\omega_r(\eta_* - \tilde\xi - 2\pi m)$, $\omega_r(\xi - \tilde\eta_* - 2\pi m)$, $\omega_r(\xi - \tilde\xi - 2\pi m)$. К каждому из соответствующих операторов вида (1.15) применима оценка (1.16), а следовательно,

$$\|\Gamma_m\| \leqslant C(N)(1 + |m|)^{-N}, \quad |m| > \nu. \tag{3.20}$$

[5]Через $[\beta]$ обозначается оператор умножения на функцию β.

Из (3.17), (3.19), (3.20) теперь следует, что

$$\|\mathcal{P}(\mu)\|^2 = \|\mathcal{P}(\mu)\mathcal{P}^*(\mu)\| \leqslant C(N)\nu^d(|\mu-\lambda|^{2\vartheta} + \nu^{-N}). \tag{3.21}$$

Выбирая ν из условия $\nu^{-N} = |\mu-\lambda|^{2\vartheta}$, получим из (3.21):

$$\|\mathcal{P}(\mu)\| \leqslant C(N)|\mu-\lambda|^{\theta}, \quad \theta = \vartheta(N-d)/N. \tag{3.22}$$

Последнее неравенство означает, что

$$\int_{G_*} |w(\xi)|^2\, d\sigma(\xi) \leqslant C(N)|\mu-\lambda|^{2\theta}\|f\|^2, \quad \theta = \vartheta(N-d)/N. \tag{3.23}$$

Теперь, чтобы получить требуемое, достаточно сопоставить (3.11)–(3.15), (3.23) и учесть, что в (3.23) число N произвольно велико. Доказательство теоремы 3.2 закончено.

Замечание 3.3. Из результатов, отмеченных в замечании 2.1, следует, что ядро $\varphi(\xi, x)$ есть мультипликатор класса $\mathfrak{M}$. Отсюда и из (3.16) сразу выводится (3.22), причем при $\theta = \vartheta$. Мы, однако, предпочли путь, не опирающийся на „трудные" результаты эллиптической теории.

4. Оценку (3.8) полезно дополнить следующим утверждением.

Теорема 3.4. *Пусть в условиях теоремы 3.1*

$$(\mathcal{F}_r(\mu_0)f, f) = 0, \tag{3.24}$$

и пусть θ — показатель из (3.8). Тогда равномерно по μ, $\mu_0 \in \delta$

$$(\mathcal{F}_r(\mu)f, f) \leqslant C(\theta)|\mu-\mu_0|^{2\theta}\|f\|^2. \tag{3.25}$$

Доказательство. Снова примем, что $\mu_0 = \lambda$. Далее,

$$(\mathcal{F}_r(\mu)f, f) = \int_G |v(\eta)|^2 e(\mu,\xi)\, d\sigma(\xi) \leqslant C \int_G |v(\eta)|^2\, d\sigma(\xi).$$

Условие (3.24) при $\mu_0 = \lambda$ означает, что $v(\xi) = 0$. Поэтому

$$\int_G |v(\eta)|^2\, d\sigma(\xi) = \int_G |v(\eta) - v(\xi)|^2\, d\sigma(\xi),$$

и остается сослаться на (3.14), (3.15), (3.23). •

§4. Принцип предельного поглощения

1. В этом параграфе наряду с невозмущенным оператором H_0 рассматривается возмущенный оператор $H = H_0 + V(x)$,

$$|V(x)| \leqslant C(1+|x|)^{-\rho}, \quad \rho > 1. \tag{4.1}$$

Имея в виду применения к теории рассеяния для пары H_0, H, мы обсуждаем здесь свойства резольвент

$$R_0(z) = (H_0 - zI)^{-1}, \qquad R(z) = (H - zI)^{-1}.$$

Пусть $\mathfrak{H} = L_2(\mathbb{R}^d)$, $\mathfrak{H}^{(s)} := X_s\mathfrak{H}$, $\|\cdot\|_s = \|X_{-s}\cdot\|$. Промежуток $\delta = \delta(\lambda, \varepsilon)$ — тот же, что и в §2, 3.

Для операторов H_0, H и промежутка δ *принцип предельного поглощения* выражается следующим образом.

Теорема 4.1. *При* $2r > 1$ *оператор-функция* $X_r R_0(z) X_r$ *со значениями в* $\mathfrak{S}_\infty(\mathfrak{H})$ *непрерывна по* z *при* $\operatorname{Re} z \in \delta$, $\pm \operatorname{Im} z \geqslant 0$. *При условии* (4.1) *то же верно относительно* $X_r R(z) X_r$ *при* $\operatorname{Re} z \in \delta \setminus \mathcal{N}$, $\pm \operatorname{Im} z \geqslant 0$, *где* $\mathcal{N}$ *— некоторое замкнутое множество лебеговой меры нуль.*

Прокомментируем вывод этого утверждения[6]. Результат для $R_0(z)$ вытекает из теорем 3.1, 3.2 в силу спектральной теоремы и свойств интегралов типа Коши. При рассмотрении „полной“ резольвенты $R(z)$ используем факторизацию

$$V = X_s \mathcal{V} X_r, \quad 1 < 2r < 2\rho - 1, \ s = \rho - r \, (> 1/2), \tag{4.2}$$

где $\mathcal{V}$ — умножение на ограниченную функцию. Справедливо тождество

$$X_r R(z) X_r = (I + X_r R_0(z) X_s \mathcal{V})^{-1} X_r R_0(z) X_r, \quad \operatorname{Im} z \neq 0. \tag{4.3}$$

Оператор $X_r R_0(z)$ компактен (при любом $r > 0$). Поэтому при исследовании непрерывности первого множителя в правой части (4.3) при $z \to \mu \pm i0$ можно воспользоваться аналитической альтернативой Фредгольма. В результате из (4.3) следует, что „исключительное“ *множество* $\mathcal{N}$ *состоит из тех и только тех точек* μ_0, *для которых хотя бы одно из двух уравнений*

$$f + X_r R_0(\mu_0 \pm i0) X_s \mathcal{V} f = 0, \quad \mu_0 \in \delta, \tag{4.4}$$

имеет нетривиальное решение. Отметим, что уравнения (4.4), отвечающие различным допустимым факторизациям (4.2), имеют нетривиальные решения одновременно.

2. Из теоремы 4.1 следует, что *спектр оператора* H *абсолютно непрерывен на множестве* $\delta \setminus \mathcal{N}$. Оставшаяся часть настоящего параграфа в основном посвящена доказательству следующего утверждения.

Теорема 4.2. *В условиях теоремы* 4.1 *множество* $\mathcal{N}$ *состоит из собственных значений оператора* H. *В частности, у оператора* H *на промежутке* δ *отсутствует сингулярный непрерывный спектр.*

Доказательство начнем со следующих замечаний. Положим $g = X_s \mathcal{V} f$ и перепишем (4.4) в равносильной форме

$$g + V R_0(\mu_0 \pm i0) g = 0, \quad g \in \mathfrak{H}^{(s)}. \tag{4.5}$$

Условимся пользоваться для $h \in \mathfrak{H}$ обозначением

$$\pi(h; \mu) = d(\mathcal{E}_0(\mu) h, h)/d\mu, \quad \mu \in \delta. \tag{4.6}$$

Функция (4.6) суммируема. Для $g \in \mathfrak{H}^{(s)}$, $2s > 1$, функция $\pi(g; \mu)$ — гельдеровская, что следует из (3.8). Если для g выполнено (4.5), то

$$\pi(g; \mu_0) = 0. \tag{4.7}$$

(Чтобы в этом убедиться, надо скалярно умножить (4.5) на $R_0(\mu_0 \pm i0) g$ и отделить мнимую часть). Из (4.7), в частности, следует, что уравнения (4.5), а с ними и (4.4), при знаках $+$ и $-$ имеют одни и те же решения.

Если для g выполнено (4.5), то элемент $\omega = R_0(\mu_0 \pm i0) g$ в формальном смысле удовлетворяет уравнению $H\omega = \mu_0 \omega$. Чтобы доказать, что μ_0 является собственным значением оператора H, достаточно проверить включение

$$R_0(\mu_0 \pm i0) g \in \mathfrak{H}. \tag{4.8}$$

[6] Подробнее см., например, [K, Ya1].

Прежде всего рассмотрим случай $s > 1$, что в согласии с (4.2) исчерпывает вопрос при $\rho > 3/2$. Мы докажем следующее

Предложение 4.3. *Пусть g удовлетворяет уравнению* (4.5) *при* $s > 1$. *Тогда выполнено* (4.8).

Доказательство. В соответствии с (4.7) и (3.25)

$$\pi(g;\mu) \leqslant C|\mu-\mu_0|^{2\theta}\|g\|_s^2, \quad \mu \in \delta, \ \theta < \min\{1, s-1/2\}, \tag{4.9}$$

где $C = C(\theta)$ не зависит от $\mu_0 \in \delta$. Из спектральной теоремы и из (4.9) следует, что

$$\|\mathcal{E}_0(\delta)R_0(\mu_0 \pm i0)g\|^2 \leqslant C\|g\|_s^2 \int_\delta |\mu-\mu_0|^{2\theta-2}\,d\mu. \tag{4.10}$$

При $s > 1$ можно считать в (4.9) $2\theta > 1$. Тогда интеграл в (4.10) сходится, а потому (4.8) выполнено. •

3. Проверка включения (4.8) только при условии (4.1) не столь проста. Соответствующий результат для случая $H_0 = -\Delta$ принадлежит Агмону [A]. Приводимые ниже рассуждения, по-видимому, значительно упрощают его подход.

Дело сводится к последовательному „улучшению" оценок для решений уравнения (4.5). Справедливо

Предложение 4.4. *Пусть выполнено* (4.1) *и для g выполнено* (4.5) *при* $2s > 1$. *Тогда* $g \in \mathfrak{H}^{(\overline{s})}$ *при некотором* $\overline{s} > 1$.

Отметим, что в силу предложения 4.3 тогда выполнено (4.8), а, следовательно, μ_0 — собственное значение для оператора H. Таким образом, доказательство теоремы 4.2 при условии (4.1) сводится к доказательству предложения 4.4.

4. Нам понадобятся предварительные технические рассмотрения. Наряду с (4.6) введем обозначение

$$\pi(h_1,h_2;\mu) = d(\mathcal{E}_0(\mu)h_1,h_2)/d\mu, \quad h_1,h_2 \in \mathfrak{H}, \ \mu \in \delta. \tag{4.11}$$

Ясно, что

$$|\pi(h_1,h_2;\mu)|^2 \leqslant \pi(h_1;\mu)\pi(h_2;\mu), \tag{4.12}$$

$$\int_\delta |\pi(h_1,h_2;\mu)|\,d\mu \leqslant \|h_1\|\|h_2\|. \tag{4.13}$$

Пусть теперь h_1, $h_2 \in \mathfrak{H}^{(s)}$. Тогда из (3.1), (3.2) следует оценка

$$\sup_{\mu\in\delta}|\pi(h_1,h_2;\mu)| \leqslant C\|h_1\|_s\|h_2\|_s, \quad 2s > 1. \tag{4.14}$$

Формула (4.11) определяет (непрерывное) билинейное отображение Π пары $\{h_1,h_2\}$ в $\pi(h_1,h_2;\mu)$, причем

$$\Pi\colon \mathfrak{H}\times\mathfrak{H} \to L_1(\delta), \qquad \Pi\colon \mathfrak{H}^{(s)}\times\mathfrak{H}^{(s)} \to L_\infty(\delta), \quad 2s > 1. \tag{4.15}$$

К отображению Π применима *комплексная билинейная интерполяционная теорема* Кальдерона (см. [C, T]). В соответствии с ней из (4.15) следует, что

$$\Pi\colon \mathfrak{H}^{(\beta)}\times\mathfrak{H}^{(\beta)} \to L_\tau(\delta), \quad \beta = (1-\sigma)s, \ \tau\sigma = 1,$$

при любом $\sigma \in (0,1]$. При этом

$$\|\pi(h_1, h_2; \cdot)\|_{L_\tau} \leqslant C(\sigma)\|h_1\|_\beta \|h_2\|_\beta. \tag{4.16}$$

Полагая в (4.16) $h_1 = h_2 = h$, получаем следующую лемму.

Лемма 4.5. *Пусть* $h \in \mathfrak{H}^{(\beta)}$, $0 < \beta \leqslant 1/2$. *Тогда*

$$\int_\delta |\pi(h,\mu)|^\tau \, d\mu \leqslant C(\beta,\tau)\|h\|_\beta^{2\tau}, \quad \forall \tau < (1-2\beta)^{-1}. \tag{4.17}$$

Нам потребуется еще одна лемма.

Лемма 4.6. *Пусть* $g \in \mathfrak{H}^{(s)}$, $s \in (1/2, 1]$ *и выполнено* (4.7). *Тогда для любого* $\beta \in (0, 1/2]$ *такого, что* $\beta + s > 1$, *имеет место включение*

$$\omega := R_0(\mu_0 \pm i0)g \in \mathfrak{H}^{(-\beta)}. \tag{4.18}$$

Доказательство. Достаточно убедиться, что при любой функции $h \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ выполнено

$$|(\mathcal{E}_0(\delta)R_0(\mu_0 \pm i0)g, h)| \leqslant C\|g\|_s \|h\|_\beta. \tag{4.19}$$

Из спектральной теоремы и из (4.12) следует, что левая часть в (4.19) оценивается величиной

$$\int_\delta |\mu - \mu_0|^{-1}(\pi(g;\mu))^{1/2}(\pi(h;\mu))^{1/2}\, d\mu.$$

В силу (4.9) последний интеграл не превосходит

$$C(\theta)\|g\|_s \int_\delta |\mu-\mu_0|^{\theta-1}(\pi(h;\mu))^{1/2}\, d\mu, \quad \forall \theta < s - 1/2. \tag{4.20}$$

Интеграл в (4.20) оценивается произведением

$$\Big(\int_\delta |\mu-\mu_0|^{-p(1-\theta)}\, d\mu\Big)^{1/p}\Big(\int_\delta (\pi(h,\mu))^{q/2}\, d\mu\Big)^{1/q}, \quad p^{-1} + q^{-1} = 1. \tag{4.21}$$

Условие сходимости первого интеграла в (4.21) $p(1-\theta) < 1$ означает, что

$$q^{-1} < \theta < s - 1/2. \tag{4.22}$$

Второй сомножитель на основании (4.17) допускает оценку через $C\|h\|_\beta$, если только $q/2 < (1-2\beta)^{-1}$, т.е. $q^{-1} > 1/2 - \beta$. Последнее неравенство и (4.22) совместны при $\beta + s > 1$. •

Теперь можно закончить **доказательство предложения 4.4**. Пусть выполнено (4.5) при $s \in (1/2, 1]$. Тогда имеет место (4.7) и, в силу леммы 4.6, — (4.18). Из (4.5) получаем, что $g = -V\omega \in \mathfrak{H}^{(s_1)}$, $s_1 = \rho - \beta$, $\beta \in (0, 1/2]$, $\beta > 1 - s$, а потому $s_1 < s + \rho - 1$. За счет выбора β можно взять s_1 сколь угодно близким к $s + \rho - 1$. Если $s + \rho - 1 > 1$, то и $s_1 > 1$, и можно положить $\overline{s} = s_1$. В противном случае рассуждение нужно повторить с заменой исходного s на $s_1 > s$. Всего нужно сделать k шагов, где k — наименьший номер, при котором $s + k(\rho - 1) > 1$, и положить $\overline{s} = s_k > 1$. •

5. В теорему 4.2 можно внести полезные дополнения. Прежде всего отметим, что ее утверждение обратимо: каждое собственное значение $\mu_0 \in \delta$ оператора H входит в „исключительное“ множество $\mathcal{N}$. Действительно, если $H\omega = \mu_0\omega$, то элемент $g = -V\omega \in \mathfrak{H}^{(\rho)}$ удовлетворяет уравнению (4.5) и условию (4.7).

Покажем теперь, что на промежутке δ оператор H может иметь разве лишь конечное число (конечнократных) собственных значений. Предположим противное. Тогда существует ортонормированная в $\mathfrak{H}$ последовательность $\{\omega_k\}$ такая, что $H\omega_k = \mu_k\omega_k$, $\mu_k \in \delta$, причем $\mu_k \to \mu_0 \in \delta$ (не исключено, что $\mu_k = \mu_0$, $\forall k$). Рассмотрим элементы $g_k = -V\omega_k$. Тогда $g_k \in \mathfrak{H}^{(\rho)}$, $\|g_k\|_\rho \leqslant C$ и выполнены равенства

$$g_k + VR_0(\mu_k \pm i0)g_k = 0, \tag{4.23}$$

$$\pi(g_k; \mu_k) = 0. \tag{4.24}$$

Из (4.24) и (3.25) следует, что

$$\pi(g_k; \mu) \leqslant C(\theta)|\mu - \mu_k|^{2\theta}, \quad \mu \in \delta, \ \theta < \min\{1, \rho - 1/2\}. \tag{4.25}$$

В соответствии с результатом теоремы 4.1 оператор

$$VR_0(\mu \pm i0)\colon \mathfrak{H}^{(r)} \to \mathfrak{H}^{(r)}, \quad 2r = \rho,$$

компактен и непрерывно зависит от $\mu \in \delta$. Отсюда и из (4.23) вытекает, что последовательность $\{g_k\}$ компактна в $\mathfrak{H}^{(r)}$ (и тем более — в $\mathfrak{H}$). Мы установим теперь, что последовательность элементов $\omega_k = R_0(\mu_k \pm i0)g_k$ компактна в $\mathfrak{H}$, что и приведет нас к противоречию. Пусть $\eta > 0$, $\Delta_\eta = [\mu_0 - \eta, \mu_0 + \eta] \cap \delta$, $\Delta'_\eta = \mathbb{R} \setminus \Delta_\eta$. Для $\{\mathcal{E}_0(\Delta'_\eta)\omega_k\}$ компактность следует из компактности $\{g_k\}$. Остается показать равномерную по k малость $\mathcal{E}(\Delta_\eta)\omega_k$ при $\eta \to 0$. Из (4.25) следует, что

$$\|\mathcal{E}_0(\Delta_\eta)\omega_k\|^2 = \int_{\Delta_\eta} |\mu - \mu_k|^{-2}\pi(g_k; \mu)\, d\mu \leqslant C(\theta) \int_{\Delta_\eta} |\mu - \mu_k|^{-2+2\theta}\, d\mu. \tag{4.26}$$

Число θ можно выбрать так, что $2\theta - 2 > -1$, а потому оценка (4.26) дает требуемое.

Сформулируем теперь результат теоремы 4.2 с полученными добавлениями.

Теорема 4.7. *Пусть выполнено условие* (4.1). *Тогда на δ существует разве лишь конечное число собственных значений оператора H. Эти собственные значения конечнократны. Их совокупность совпадает с множеством $\mathcal{N}$, входящим в формулировку теоремы* 4.1. *Сингулярный непрерывный спектр на δ у оператора H отсутствует. Весь промежуток δ заполнен абсолютно непрерывным спектром оператора H.*

§5. Волновые операторы. Матрица рассеяния

1. Результаты §4 позволяют построить *теорию рассеяния* для пары H_0, H на промежутке δ по известной схеме. При изложении материала доказательства в существенном сводятся к подходящим ссылкам.

Обозначим через $\mathcal{E}(\cdot)$ спектральную меру и через P_a — проектор на абсолютно-непрерывное подпространство оператора H. Следствием принципа предельного поглощения (теорема 4.1) является существование и полнота *волновых операторов*. Именно, справедлива

Теорема 5.1. *Пусть выполнены предположение* 2.2 *и условие* (4.1), *и пусть* $\delta = \delta(\lambda, \varepsilon)$ — *промежуток, определенный в п.* 2.3. *Тогда существуют и полны волновые операторы*

$$W_\pm(\delta) = W_\pm(H, H_0; \delta) = \operatorname*{s-lim}_{t\to\pm\infty} \exp(iHt)\exp(-iH_0t)\mathcal{E}_0(\delta). \tag{5.1}$$

Напомним, что коль скоро пределы (5.1) существуют, $\operatorname{Ran} W_\pm(\delta) \subset \mathcal{E}(\delta)P_a\mathfrak{H}$. Полнота операторов (5.1) означает, что

$$\operatorname{Ran} W_\pm(\delta) = \mathcal{E}(\delta)P_a\mathfrak{H}. \tag{5.2}$$

Теорема 5.1 выводится из теоремы 4.1 с помощью общих средств математической теории рассеяния (см., например, [Ya1]), без учета специфики периодических операторов.

2. *Оператор рассеяния* $\mathcal{S}$ для пары H_0, H и промежутка δ определяется формулой

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}(\delta) = W_+^*(\delta)W_-(\delta). \tag{5.3}$$

Из (5.2) следует, что оператор (5.3) унитарен на подпространстве $\mathcal{E}_0(\delta)\mathfrak{H}$. Далее, оператор $\mathcal{S}$ *перестановочен* с H_0, а потому *разложим* относительно прямого интеграла, построенного в п. 2.3. Более определенно, оператор $U\mathcal{S}U^*$ действует в $L_2(\delta; \mathfrak{N})$ как оператор умножения на унитарнозначную оператор-функцию

$$S(\mu)\colon \mathfrak{N} \to \mathfrak{N}, \quad \text{п.в. } \mu \in \delta. \tag{5.4}$$

Оператор-функция (5.4) называется *матрицей рассеяния* для пары H_0, H на промежутке δ.

Сказанное опирается только на существование пределов (5.1) и соотношение (5.2). Содержащиеся в теоремах 4.1, 4.7 дополнительные сведения о резольвентах $R_0(z)$, $R(z)$ позволяют дать „явное“ выражение для S-матрицы (5.4). Именно, пусть оператор $J(\mu)$ определен в (2.16), преобразование Ψ — в (2.10). Имеет место

Теорема 5.2. *В условиях теоремы* 5.1 *для всех* $\mu \in \delta \setminus \mathcal{N}$ (*т.е. для всех* $\mu \in \delta$, *не являющихся собственными значениями оператора* H) *справедливо представление*

$$\Theta(\mu) := (2\pi i)^{-1}(S(\mu) - I_{\mathfrak{N}}) = -J(\mu)\Psi(V - VR(\mu + i0)V)\Psi^* J(\mu)^*, \quad \mu \in \delta \setminus \mathcal{N}. \tag{5.5}$$

Оператор-функция (5.5) гельдеровски непрерывна относительно $\mu \in \delta$ *вне любой окрестности множества* $\mathcal{N}$.

Замечание 5.3. Выражение в правой части (5.5) требует содержательной реализации. Это будет пояснено в следующем пункте за счет подходящей факторизации каждого из двух слагаемых. Отметим, что представления вида (5.5) имеют общую природу и с формальной стороны были известны давно. Точный смысл им был придан впервые в [Ф] (в рамках модели Фридрихса–Фаддеева) и в [БЭ1, 2] (в рамках „ядерного“ подхода). Для возмущений эллиптических операторов с постоянным символом аналогичные вопросы рассмотрены в [К]. Современное состояние теории изложено в [Ya1]. Имеющиеся там результаты автоматически приводят к теореме 5.2, коль скоро доказаны теоремы 4.1, 4.7 и построен прямой интеграл (см. п. 2.3), однозначно фиксирующий отображение (5.4).

3. Наша дальнейшая цель — изучение спектральных свойств оператора $S(\mu)$, $\mu \in \delta/\mathcal{N}$. Для упрощения обозначений будем считать $\mu = \lambda$. (Тогда, например, *оператор* $J(\mu)$ *переходит в оператор сужения* $\mathcal{I}$ *на поверхность* G). В связи с этим примем

Предположение 5.4. *Точка λ не является собственным значением оператора H, т.е. $\lambda \overline{\in} \mathcal{N}$.*

Это предположение фактически не уменьшает общности, так как роль точки λ может играть любая точка $\mu \in \delta \setminus \mathcal{N}$.

Приведем теперь оценки, которые, в частности, позволят придать точный смысл представлению (5.5). Положим

$$\varkappa := (d-1)/(\rho-1). \tag{5.6}$$

В п. 6.4 будет установлена

Лемма 5.5. *Имеет место включение*

$$\mathcal{I}\Psi X_r \in \Sigma_{2\varkappa}(\mathfrak{H}, \mathfrak{N}), \quad 2r = \rho > 1. \tag{5.7}$$

Запишем V в виде $V = X_r \mathcal{V}_0 X_r$, где $\mathcal{V}_0 \in L_\infty$ и $2r = \rho$. Обозначим

$$Z = \mathcal{I}\Psi V(\mathcal{I}\Psi)^*. \tag{5.8}$$

В силу (5.7), очевидно,

$$Z = (\mathcal{I}\Psi X_r)\mathcal{V}_0(\mathcal{I}\Psi X_r)^* \in \Sigma_\varkappa(\mathfrak{N}). \tag{5.9}$$

Далее, в соответствии с (5.5)

$$\Theta(\lambda) + Z = (\mathcal{I}\Psi X_r)\mathcal{V}_0(X_r R(\lambda + i0)X_r)\mathcal{V}_0(\mathcal{I}\Psi X_r)^*. \tag{5.10}$$

В силу теоремы 4.1 оператор $X_r R(\lambda + i0)X_r$ компактен. Поэтому справедлива

Лемма 5.6. *Пусть выполнены предположения* 2.2, 5.4 *и условие* (4.1). *Тогда оператор $\Theta(\lambda) = (2\pi i)^{-1}(S(\lambda) - I_{\mathfrak{N}})$ имеет представление, определяемое формулами* (5.8), (5.10). *При этом выполнено* (5.9), *а также включение*

$$\Theta(\lambda) + Z \in \Sigma^0_\varkappa(\mathfrak{N}). \tag{5.11}$$

Соотношения (5.9), (5.11) означают, что оператор $(-Z)$ представляет собой „главную часть“ оператора $\Theta(\lambda)$.

§6. Асимптотика фаз матрицы рассеяния

1. В соответствии с (5.9), (5.11) оператор $\Theta(\lambda)$ компактен. Поэтому спектр $S(\lambda)$ (он лежит на окружности $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$) дискретен и имеет единственную точку накопления $z = 1$. Пусть $\exp(\mp 2i\varphi_k^\pm)$ — собственные числа оператора $S(\lambda)$, лежащие соответственно на нижней или верхней полуокружностях. Считаем $\varphi_k^\pm \in (0, \pi/2]$, $\varphi_{k+1}^\pm \leqslant \varphi_k^\pm$; собственные числа нумеруются с учетом кратностей. Наша главная цель состоит в получении асимптотики фаз $\varphi_k^\pm$ при $k \to \infty$. При этом условие (4.1) заменяется более сильным. Именно,

$$V \in L_\infty(\mathbb{R}^d); \qquad V(x) = |x|^{-\rho} F\Big(\frac{x}{|x|}\Big) + o(|x|^{-\rho}), \quad |x| \to \infty, \ \rho > 1, \ F \in C^\infty(\mathbb{S}^{d-1}). \tag{6.1}$$

Задача об асимптотике фаз рассматривалась авторами в [БЯ1]. Предполагалось, что H_0 — ПДО в $\mathbb{R}^d$ с постоянным символом (в частности, $H_0 = -\Delta$). Сейчас оператор H_0 есть оператор (2.1), и вместо *преобразования Фурье* Φ в выкладках возникает преобразование Ψ вида (2.10). В итоге, однако, выясняется, что в асимптотику фаз не входит явно ядро $\overline{\psi(\xi,x)} = \exp(-i\xi x)\overline{\varphi(\xi,x)}$ оператора Ψ. Именно обоснованию этого обстоятельства ниже уделяется основное внимание. Напротив, когда использованные в [БЯ1] соображения могут быть перенесены на рассматриваемый здесь случай без фактических изменений, мы ограничиваемся отсылками к [БЯ1].

2. В первую очередь мы обсудим асимптотику спектра оператора Z. Это (см. (5.8)) самосопряженный компактный оператор в пространстве $\mathfrak{N} = L_2(G; d\sigma)$. Временно вместо (6.1) примем условие

$$V \in C^\infty(\mathbb{R}^d); \qquad V(x) = |x|^{-\rho}F(x/|x|), \quad |x| \geqslant 1, \ \rho > 1. \tag{6.2}$$

Ядро оператора Z, очевидно, есть (ср. с (3.4))

$$(2\pi)^{-d} \int\limits_{\mathbb{R}^d} e^{i(\tilde{\xi}-\xi)x}\overline{\varphi(\xi,x)}\varphi(\tilde{\xi},x)V(x)\,dx, \quad \tilde{\xi},\xi \in G. \tag{6.3}$$

В соответствии с (3.5), (3.7) ядро (6.3) сводится к сумме

$$(2\pi)^{-d/2} \sum_{m\in\mathbb{Z}^d} b_m(\xi,\tilde{\xi})\widehat{V}(\xi - \tilde{\xi} - 2\pi m), \quad \widehat{V} = \Phi V. \tag{6.4}$$

Обозначим через Y_m операторы с ядрами $\widehat{V}(\xi-\tilde{\xi}-2\pi m)$, а через Z_m — операторы, отвечающие отдельным слагаемым в сумме (6.4). Таким образом,

$$Z = \sum_m Z_m. \tag{6.5}$$

При условии (6.2) к функции V применимо все сказанное в замечании 1.8. Поэтому $Y_m \in \Sigma_t$, $|m| = |m_1|\cdots + |m_d| > d$, при любом $t > 0$ и верна оценка

$$|Y_m|_t \leqslant C(N,t)(1+|m|)^{-N}, \quad |m| > d, \ \forall N > 0, \ \forall t > 0. \tag{6.6}$$

Уже отмечалось (см. п. 3.2), что функция $\varphi(\xi,x)$ — кусочно-гладкая по переменной $\xi \in G_*$. Из (3.7) следует, что кусочно-гладкими (по ξ и $\tilde{\xi}$) являются ядра b_m. При этом теорема 1.4 и замечание 1.6 позволяют оценить *равномерно по* m мультипликаторные квазинормы ядер b_m в классах Σ_t. Поэтому *оценка* (6.6) *переносится на операторы* Z_m. Далее, с помощью (1.5) можно оценить в классе Σ_t сумму операторов Z_m, $|m| > d$. Таким образом, установлено

Предложение 6.1. *При условии* (6.2)

$$\sum_{|m|>d} Z_m \in \Sigma_t, \quad \forall t > 0. \tag{6.7}$$

Займемся теперь оператором Y_0 с ядром $(2\pi)^{-d/2}\widehat{V}(\xi - \tilde{\xi})$. Этот оператор есть ПДО отрицательного порядка $1-\rho$ на кусочно-гладкой поверхности G_*. Именно для таких операторов исследовалась асимптотика собственных значений[7] в п. 3.2, 3.3 статьи [БЯ1]. Мы можем поэтому прямо использовать соответствующий результат из [БЯ1].

[7]Для компактного самосопряженного оператора T через $\nu_k^+(T)$ (через $-\nu_k^-(T)$) будем обозначать последовательные положительные (отрицательные) собственные значения оператора T.

Введем необходимые обозначения. Для $\xi \in G$ обозначим через $n(\xi) = |\nabla E(\xi)|^{-1}\nabla E(\xi)$ единичную нормаль к G; через $L_\xi = \{\eta \in \mathbb{R}^d : n(\xi)\eta = 0\}$ — касательное пространство к G в точке ξ. Для $\xi \in G$, $\eta \in L_\xi \cap \mathbb{S}^{d-1}$ положим

$$2\pi\Xi(\xi,\eta) = |\nabla E(\xi)|^{-1} \int_0^\pi F(n(\xi)\cos\omega + \eta\sin\omega)\sin^{\rho-2}\omega\, d\omega \tag{6.8}$$

и введем постоянные

$$g_\pm = \pi(2\pi)^{1-\rho}(d-1)^{-\gamma}\left[\int_G dG(\xi) \int_{L_\xi\cap\mathbb{S}^{d-1}} (\Xi(\xi,\eta))_\pm^{\varkappa}\, d\eta\right]^\gamma, \quad \gamma\varkappa = 1. \tag{6.9}$$

Напомним, что $\varkappa$ — показатель (5.6), dG — евклидова мера на G.

Предложение 6.2. [БЯ1]. *При условии* (6.1) *имеет место асимптотика*

$$\lim_{k\to\infty} k^\gamma \nu_k^\pm(Y_0) = \pi^{-1}g_\pm, \quad \gamma\varkappa = 1. \tag{6.10}$$

Замечание 6.3. В [БЯ1] асимптотика (6.8)-(6.10) сначала устанавливается при условии (6.2), а затем распространяется на случай условия (6.1). При этом влияние члена $o(|x|^{-\rho})$ в (6.1) оценивается (со сколь угодно малым коэффициентом) на основании все той же асимптотики, полученной при условии (6.2). Такой эффект „самоулучшения“ результата мы используем ниже и в случае оператора Z.

Замечание 6.4. Отметим, что постоянные (6.9) инвариантно определены на G. При их вычислении не нужно переходить от G к G_*. Далее, они строятся лишь по функции $E(\cdot)$, но не зависят от соответствующей собственной функции ψ.

3. Следующий этап состоит в получении асимптотики спектра для оператора Z_0. Чтобы иметь дело только с гладкими ядрами, будем считать выполненным условие (6.2).

Сначала кратко опишем схему вычисления в [БЯ1] спектральной асимптотики для операторов типа Y_0. 1. Соответствующая поверхность разбивается на достаточно мелкие кусочно-гладкие области G^j, допускающие выпрямление. Соответственно этому оператор Y_0 представляется в виде $Y_0 = \Sigma_{ij}Y_0^{ij}$, где $Y_0^{ij}: L_2(G^i, d\sigma) \to L_2(G^j, d\sigma)$. 2. Оператор Y_0^{jj} имеет вид ПДО, задаваемого некоторой гладкой *амплитудой* $A_j(\overline{x};\xi,\tilde{\xi})$, где $\overline{x} \in \mathbb{R}^{d-1}$. Старший член разложения этого ПДО по гладкости определяется *главным символом* $A_j(\overline{x};\xi,\xi)$; лишь от него зависит главный член асимптотики спектра. Асимптотика спектра вычисляется по главному символу в соответствии с основным результатом статьи [БСЗ]. 3. Показывается, что

$$Y_0' := \sum_{i\neq j} Y_0^{ij} \in \Sigma_\varkappa^0, \tag{6.11}$$

а потому Y_0' не оказывает влияния на главный член спектральной асимптотики. 4. Вклады в асимптотику функции распределения чисел ν_k^+ (чисел ν_k^-) от операторов Y_0^{jj} суммируются по j, что и приводит к асимптотике (6.10).

Ядро оператора Z_0 отличается от ядра оператора Y_0 множителем $b_0(\xi,\tilde{\xi})$. Применим описанную схему к оператору Z_0. Так как b_0 — мультипликатор, то соотношение (6.11) переносится на оператор Z_0:

$$Z_0' := \sum_{i\neq j} Z_0^{ij} \in \Sigma_\varkappa^0.$$

Для операторов Z_0^{jj} амплитуда есть $b_0(\xi,\tilde{\xi})A_j(\overline{x};\xi,\tilde{\xi})$, а главный символ — $A_j(\overline{x};\xi,\xi)$. Здесь учтено, что в силу (3.7), (2.8), (2.9) $b_0(\xi,\xi)=1$. Поэтому на Z_0 переносится асимптотика (6.10).

Предложение 6.5. *При условии* (6.2) *справедлива асимптотика* (6.10) *с заменой* Y_0 *на* Z_0.

Остается оценить операторы Z_m при $0<|m|\leqslant d$. Для соответствующих операторов Y_m выполнено $Y_m\in\Sigma^0_\varkappa$. Это получается так же, как включение $Y_0^{ij}\in\Sigma^0_\varkappa$ для „соседних“ G^i, G^j. Подробнее по этому поводу см. п. 3.3 в [БЯ1]. Учитывая, что ядра b_m — мультипликаторы в $\Sigma^0_\varkappa$, получаем

Предложение 6.6. *При условии* (6.2) *выполнено*

$$Z_m\in\Sigma^0_\varkappa,\quad 0<|m|\leqslant d. \tag{6.12}$$

4. При условии (6.2) из (6.5), (6.7), (6.12) следует, что $Z-Z_0\in\Sigma^0_\varkappa$. Тогда из предложения 6.5 вытекает, что на Z переносится асимптотика (6.10). Полученную асимптотику затем можно распространить (см. замечание 6.3, а также п. 3.3 в [БЯ1]) на случай условия (6.1). Таким образом, установлена

Теорема 6.7. *При условии* (6.1)

$$\lim_{k\to\infty}k^\gamma\nu_k^\pm(Z)=\pi^{-1}g_\pm,\quad \gamma\varkappa=1, \tag{6.13}$$

где числа $g_\pm$ *определены в* (6.8), (6.9).

Асимптотика (6.13), в частности, означает, что $Z\in\Sigma_\varkappa$. При $V(x)=(1+|x|^2)^{-\rho/2}$ это равносильно (5.7). *Тем самым доказана и лемма* 5.5.

Нам остается добавить следующее простое утверждение общего характера.

Лемма 6.8. *Пусть S — унитарный оператор, $\Theta=(2\pi i)^{-1}(S-I)$, $Z=Z^*$ и $\Theta+Z\in\Sigma^0_\varkappa$. Пусть для Z при $\gamma>0$ справедлива асимптотика* (6.13). *Тогда для фаз $\varphi_k^\pm$ оператора S справедлива асимптотика*

$$\lim_{k\to\infty}k^\gamma\varphi_k^\pm=g_\pm,\quad \gamma\varkappa=1. \tag{6.14}$$

Приведенная лемма фактически совпадает с леммой 1 из [БЯ1]. (Совсем простой прием для доказательства предложений такого типа указан в [Ya2]).

Объединим теперь теорему 6.7 с леммой 6.8 и оценкой (5.11). Это приведет нас к нашему основному результату.

Теорема 6.9. *Пусть выполнены предположения* 2.2, 5.4 *и условие* (6.1). *Пусть $S(\lambda)$ — матрица рассеяния для пары H_0, H. Тогда для фаз рассеяния $\varphi_k^\pm$ оператора $S(\lambda)$ справедлива асимптотика* (6.14), *где $\varkappa$ и $g_\pm$ определены в* (5.6), (6.8), (6.9).

5. В заключение обсудим, как могут быть ослаблены ограничения, содержащиеся в предположении 2.2. Пусть рассматриваемое значение $\lambda\in\mathbb{R}$ попадает *внутрь нескольких зон* Λ_j, $j=l,\dots,l+s$, а от остальных зон отделено. Пусть соответствующие поверхности

$$G_j=\{\,\xi\in\mathbb{T}^d:E_j(\xi)=\lambda\,\},\quad j=l,\dots l+s, \tag{6.15}$$

не имеют критических точек. Если они при этом попарно не пересекаются, то вся проведенная выше схема сохраняется. Требуются лишь формальные изменения в записи. В частности, в выражении вида (6.9) для $g_\pm$ вклады от отдельных поверхностей G_j должны суммироваться: $\int_G \dots$ заменяется на $\sum_j \int_{G_j} \dots$. Если какие-либо из поверхностей (6.15) пересекаются, то требуются дальнейшие существенные ограничения. Приходится *предполагать* гладкость всех функций E_j и кусочную гладкость соответствующих собственных функций ψ_j вблизи G_j. При этих предположениях схема снова проходит. Сказанное имеет много общего с рассмотрением матричных ПДО в §4 статьи [БЯ1].

Список литературы

[БС1] Бирман М. Ш., Соломяк М. З., *Двойные операторные интегралы Стилтьеса.* III. *Предельный переход под знаком интеграла*, Пробл. мат. физ. (1973), № 6, 27–53.

[БС2] Бирман М. Ш., Соломяк М. З., *Оценки сингулярных чисел интегральных операторов*, Успехи мат. наук **32** (1977), № 1, 17–84.

[БС3] Бирман М. Ш., Соломяк М. З., *Асимптотика спектра псевдодифференциальных операторов с анизотропно-однородными символами*, Вестн. ЛГУ (1977), № 13, 13–21; (1979), № 13, 5–10.

[БЭ1] Бирман М. Ш., Энтина С. Б., *О стационарном подходе в абстрактной теории рассеяния*, ДАН СССР **155** (1964), № 3, 506–508.

[БЭ2] Бирман М. Ш., Энтина С. Б., *Стационарный подход в абстрактной теории рассеяния*, Изв. АН СССР. Сер. Мат. **31** (1967), № 2, 401–430.

[БЯ1] Бирман М. Ш., Яфаев Д. Р., *Асимптотика спектра матрицы рассеяния*, Зап. науч. семинаров ЛОМИ **110** (1981), 3–29.

[БЯ2] Бирман М. Ш., Яфаев Д. Р., *Асимптотика спектра s-матрицы при потенциальном рассеянии*, ДАН СССР **255** (1980), № 5, 1085–1087.

[БЯ3] Бирман М. Ш., Яфаев Д. Р., *Асимптотика предельных фаз при рассеянии на потенциале без сферической симметрии*, ТМФ **51** (1982), № 1, 44–53.

[ЛУ] Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н., *Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа*, Наука, М., 1964.

[Ск] Скриганов М. М., *Геометрические и арифметические методы в спектральной теории многомерных периодических операторов*, Тр. МИАН **171** (1985).

[Ф] Фаддеев Л. Д., *О модели Фридрихса в теории возмущений непрерывного спектра*, Тр. МИАН **73** (1964), 292–313.

[A] Agmon S., *Spectral properties of Schrödinger operators and scattering theory*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa **2** (1975), no. 4, 151–218.

[Be] Bentosela F., *Scattering for impurities in a crystal*, Comm. Math. Phys. **46** (1976), 153–166.

[C] Calderon A. P., *Intermediate spaces and interpolation, the complex method*, Studia Math. **24** (1964), 113–190; рус. пер.: Математика **9** (1965), №3, 56–129.

[K] Kuroda S. T., *Scattering theory for differential operators*, J. Math. Soc. Japan **25** (1973), no. 1, 75–104; no. 2, 222–234.

[Si] Simon B., *Phase space analysis of simple scattering systems*, Duke Math. J. **46** (1979), no. 1, 119–168.

[Sk] Skriganov M. M., *The spectrum band structure of the threedimensional Schrödinger operator with periodic potential*, Invent. Math. **80** (1985), 107–121.

[T] Triebel H., *Interpolation theory, functional spaces, differential operators*, North-Holland, Amsterdam etc., 1978.

[Ya1] Yafaev D. R., *Mathematical scattering theory. General theory*, Transl. math. monographs AMS **105** (1992).

[Ya2] Yafaev D. R., *On the asymptotics of scattering phases for the Schrödinger equation*, Ann. Inst. Henri Poincaré **53** (1990), no. 3, 283–299.

Поступило 14 февраля 1994 г.