А. И. Некрицухин, О представлениях группы узла Листинга, *Чебышевский сб.*, 2011, том 12, выпуск 4, 109–111

https://www.mathnet.ru/cheb114

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 12 Выпуск 4 (2011)

УДК 519.14

О ПРЕДСТАВЛЕНИЯХ ГРУППЫ УЗЛА ЛИСТИНГА

Некрицухин А. И. (г. Тула)

Аннотация

Даются новые значения x, для которых группа $\mathcal{G}_x$, порождаемая матрицами $A_x = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}$ и $B_x = \begin{pmatrix} \mu & 1 \\ \mu(x-\mu)-1 & x-\mu \end{pmatrix}$ с
$\lambda = \frac{1}{2}\left(x \pm \sqrt{x^2-4}\right)$, $\mu = \frac{\lambda z - x}{\lambda^2-1}$ и $z = \mathrm{tr}(A_x B_x)$,
дают неточное представление группы узла Листинга.

В статьях [1, 2] рассматриваются представления группы узла Листинга

$$L =< a, b | b^{-1}a^{-1}bab^{-1}aba^{-1}b^{-1}a = 1 > \tag{1}$$

матрицами из $SL(2,\mathbb{C})$ и ставится вопрос о точности этих представлений. Пусть как в [1] Λ — множество всех подгрупп в $SL(2,\mathbb{C})$, которые представляют L. Тогда [1]:

1. абелева подгруппа $G =< A, B >\in \Lambda$ тогда и только тогда, когда G — циклическая;

2. неабелева подгруппа $G =< A, B >\in \Lambda$ тогда и только тогда, когда

$$\mathrm{tr}(AB) = \frac{1}{2}\left(1 + x^2 \pm ((x^2-1)(x^2-5))^{\frac{1}{2}}\right), \tag{2}$$

где $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(B) = x$, и $\mathrm{tr}(C)$ — след матрицы C.

Для $x \in \mathbb{C}$ пусть $G_x =< A_x, B_x >$ — неабелева подгруппа из Λ с $\mathrm{tr}(A_x) = \mathrm{tr}(B_x) = x$, с x, удовлетворяющим (2). $G_{\pm 2}$ сопряжена с подгруппой $SL(2,\mathbb{C})$, порожденной матрицами

$$\pm\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \pm\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix}, \quad t = e^{i\pi\beta}. \tag{3}$$

Для $x \neq \pm 2$ подгруппа G_x порождается матрицами

$$A_x = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}, \quad B_x = \begin{pmatrix} \mu & 1 \\ \mu(x-\mu)-1 & x-\mu \end{pmatrix},$$
$$\lambda = \frac{1}{2}\left(x \pm (x^2-4)^{\frac{1}{2}}\right), \quad \mu = (\lambda z - x)/(\lambda^2-1), \quad z = \mathrm{tr}(AB). \tag{4}$$

В [2] отмечается, что в статье [3] доказывается точность представления (3). G_1, $G_{5\frac{1}{2}}$ неточны как указано в [1].

В данной статье показывается, что существуют другие значения x, для которых G_x из (4) дают неточные представления.

Будем использовать результаты статьи [4]. В этой статье изучается множество характеров представлений группы

$$\pi =< a, b|wa = bw >, \tag{5}$$

где $w = a^{\varepsilon_1}b^{\varepsilon_n}a^{\varepsilon_2}b^{\varepsilon_{n-1}}\dots a^{\varepsilon_n}b^{\varepsilon_1}$, $\varepsilon_i = \pm 1$. Если рассмотреть эту группу при $w = a^{-1}bab^{-1}$, то получается группа узла Листинга. Под характером понимается след матрицы в $SL(2,\mathbb{C})$. Кратко изложим результаты [4] о множестве характеров представления (5). Обозначим через $P(t_1, t_2)$ — многочлен от двух переменных, выражающий след любой матрицы $V(A, B)$ при представлении $a \to A$, $b \to B$ $(A, B \in SL(2,\mathbb{C}))$ через следы $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(B) = t_1$ и $\mathrm{tr}(AB) = t_2$.

Теорема 1. *[4] Множество характеров представлений группы π в $SL(2,\mathbb{C})$ определяется равенством $P_{bwa^{-1}} - P_w = 0$. Имеет место разложение*

$$P_{bwa^{-1}} - P_w = (t_1^2 - t_2 - 2)\Phi_w(t_1, t_2).$$

Для рассматриваемого случая группы узла Листинга вычисления дают

$$\Phi_w = \Phi_{a^{-1}bab^{-1}} = 2t_1^2 + t_2^2 - t_1^2 t_2 - t_2 - 1.$$

Значит, множество характеров представлений здесь определяется равенством

$$(t_1^2 - t_2 - 2)(2t_1^2 + t_2^2 - t_1^2 t_2 - t_2 - 1) = 0. \tag{6}$$

Первый множитель в левой части (6) определяет множество характеров абелевых представлений, второй — неабелевых. Одно из неабелевых матричных представлений

$$a \to A, \quad b \to B$$

в [4] задается матрицами

$$A = \begin{pmatrix} t & 1 \\ 0 & t^{-1} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} t & 0 \\ \beta & t^{-1} \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Это представление сопряжено с представлением (4):

$$A_x = T^{-1} \cdot A \cdot T, \quad B_x = T^{-1} \cdot B \cdot T, \quad T = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix},$$
$$a^2 = 2 - \frac{1}{\beta^2 - \beta + 1}, \quad b = \frac{1}{a(t - t^{-1})}.$$

Значит, вопрос о точности (4) переносится на представление (7). Соотношение $WA = BW$ при $W = A^{-1}BAB^{-1}$ дает равенство

$$t_1^2 = \frac{\beta^2 - 5\beta + 5}{1 - \beta}. \tag{8}$$

Вычисление следа матрицы AB определяет ещё одну связь:

$$t_2 = \mathrm{tr}(AB) = t^2 + t^{-1} + \beta = t_1^2 - 2 + \beta. \tag{9}$$

Если $\beta = -t_1^2 + t_2 + 2$ отсюда подставить в (8), то получается равенство:

$$2t_1^2 + t_2^2 - t_1^2 t_2 - t_2 - 1 = 0.$$

Как указано выше это равенство через равенство (6) определяет неабелево представление. Кроме того, как показано в [4], можно выбрать $t_2 \neq 2$, $\beta \neq 0$, $\beta \neq 1$. Теперь, чтобы получить неточное представление достаточно взять значение какого-нибудь следа t_1 или t_2 так, чтобы получилось нетривиальное соотношение в группе $< A, B >$.

Положим $t_1 = 0$. Из (8) получаем $\beta = \frac{5 \pm \sqrt{5}}{2}$. Рассмотрим случай $\beta = \frac{5+\sqrt{5}}{2}$. Из $t_1 = 0$ следует $t_1 = t + t^{-1} = 0$ и $t = i$, $t^{-1} = -i$. Матрицы A, B имеют вид:

$$A = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} i & 0 \\ \frac{5+\sqrt{5}}{2} & -i \end{pmatrix}.$$

Каждая из них имеет порядок 4. Значит, в образе группы узла Листинга кроме соотношения $WA = BW$ имеются соотношения $A^4 = 1$, $B^4 = 1$ и представление неточное.

В связи с полученным результатом возникает вопрос:

Имеются ли в Λ подгруппы, допускающие точное представление в L?

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] A. Whittemore On representations of the group of Listing's knot by subgroups of $SL(2\mathbb{C})$ // Proc. Amer. Math. Soc. 1973. V. 40, №2. P. 378 — 382

[2] W. Magnus Two generator subgroups of $PSL(2, \mathbb{C})$ // Nachr. Acad. Wiss. Göttingen II. Math.-phys. kl. 1975. №7. P. 1 — 13.

[3] R. Riley A quadratic parabolic group // Preprint 1974.

[4] Ле Ты Куок Тханг Многообразия представлений для групп узлов // Мат. сб. 1993. Т. 184. №2/ С. 57 — 82.

Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
Поступило 8.12.11