В. Н. Шевченко, А. П. Ильичев, О минорах и перманентах некоторых (0,1)-матриц, *Дискрет. матем.*, 1991, том 3, выпуск 2, 96–102

Дискретная математика

том 3 выпуск 2 * 1991

УДК 519.

О МИНОРАХ И ПЕРМАНЕНТАХ НЕКОТОРЫХ (0, 1)-МАТРИЦ

В.Н. Шевченко, А.П. Ильичев

Рассматриваются подматрицы M n-го порядка матрицы B_n, составленной из всевозможных n-мерных столбцов с элементами, равными нулю или единице, и ее подматрицы B_{nk}, каждый столбец которой содержит k единиц. Получены экспоненциальные нижние оценки средних величин $(\det M)^2$ (для матриц B_n и B_{nk} при $k \geqslant 3$) $|\det M|$ (для B_n и B_{nk} при $k \geqslant 8$). Для B_{n2} получены формулы, позволяющие найти число подматриц M, для которых:

а) $|\det M| = j$;

б) перманент M равен j.

§ 1. Определения и обозначения

Пусть $A = (a_{ij})$ $(i = 1, \ldots, p;\ j = 1, \ldots, q)$ – целочисленная $(p \times q)$-матрица ранга p. Обозначим $x_\nu(p)$ количество миноров порядка p матрицы A, равных $\pm\nu$, и положим

$$S_0(A) = \sum_{\nu=0}^{m} x_\nu(p),\quad S_1(A) = \sum_{\nu=0}^{m} \nu x_\nu(p),\quad S_2(A) = \sum_{\nu=0}^{m} \nu^2 x_\nu(p),$$

где m – максимум из модулей миноров матрицы A. Заметим, что $S_0(A) = \binom{q}{p}$ – общее количество миноров порядка p матрицы A, $S_1(A)$ – сумма модулей этих миноров, а $S_2(A) = \det(AA^T)$ – сумма квадратов всех миноров порядка p матрицы A, что следует из формулы Бине–Коши [1, с. 35].

Величину $S_1(A)/S_0(A)\cdot$ $(S_2(A)/S_0(A))$ будем называть *средним значением миноров* (*квадратов миноров*) матрицы A.

Через B_n будем обозначать булеву $(n \times 2^n)$-матрицу, столбцами которой являются всевозможные n-мерные булевы векторы, через B_{nk} обозначим булеву $\left(n \times \binom{n}{k}\right)$-матрицу, столбцами которой являются всевозможные булевы векторы, содержащие k единиц.

Если $f_1(n), f_2(n)$ – функции натурального n, то будем писать $f_1(n) \sim f_2(n)$, если $\lim\limits_{n\to\infty} (f_1(n)/f_2(n)) = 1$. Будем писать $f_1(n) \gtrsim f_2(n)$, если для всех n, больших некоторого $n_0, f_1(n) \geqslant f_2(n)$.

В предлагаемой работе исследуются средние значения миноров и перманентов матриц B_n и B_{nk}. Детально исследуется случай $k = 2$.

§ 2. Средние характеристики миноров матриц B_n и B_{nk}

1. Очевидно, что $B_nB_n^T$ – матрица порядка n, на главной диагонали которой стоят числа 2^{n-1}, а остальные элементы равны 2^{n-2}. Отсюда следует, что

$$S_2(B_n) = \det(B_nB_n^T) = (n+1)\,2^{n^2-2n},$$

$$S_2(B_n)/S_0(B_n) = (n+1)2^{n^2-2n}\Big/\binom{2^n}{n} =$$

$$= (n+1)!\,2^{n^2-2n}\Big/\prod_{i=0}^{n-1}(2^n-i) > (n+1)!\,/2^{2n}.$$

Так как $n! > \left(\frac{4}{5}n^{1/2}e\left(\frac{n}{e}\right)^n\right)$ [2, с. 341],

$$S_2(B_n)/S_0(B_n) > \left(\frac{4}{5}\right)^{1/2}(n+1)^{3/2}\left(\frac{n+1}{4e}\right)^n,$$

и, следовательно, имеет место

Теорема 1. *Средняя величина квадрата минора матрицы B_n с ростом n стремится к бесконечности с экспоненциальной скоростью $(n/(4e))^n$.*

Оценим теперь величину $S_1(B_n)/S_0(B_n)$. Используя очевидное неравенство

$$S_2(A) = \sum_{\nu=0}^{m} \nu\nu x_\nu(p) \leqslant mS_1(A)$$

и известную оценку величины m [1, с. 46] для матрицы B_n:

$$m \leqslant 2^{-n}(n+1)^{(n+1)/2},$$

после очевидных преобразований получаем

$$S_1(B_n)/S_0(B_n) > \left(\frac{n+1}{4e^2}\right)^{n/2}.$$

Таким образом, справедлива

Теорема 2. *Средняя величина минора матрицы B_n с ростом n стремится к бесконечности с экспоненциальной скоростью* $(\sqrt{n}/(2e))^n$.

Замечание. Нетрудно проверить, что оценки, полученные в теоремах 1, 2, не изменятся, если равновероятным мы будем считать не появление минора, а появление любого из столбцов матрицы B_n или появление на месте каждого элемента числа 0 или 1.

2. Из определения B_{nk} следует, что $B_{nk}B_{nk}^T$ имеет на главной диагонали числа $\binom{n-1}{k-1}$, а остальные элементы равны $\binom{n-2}{k-2}$. Следовательно,

$$S_2(B_{nk})/S_0(B_{nk}) = k\binom{n-1}{k-1}\binom{n-2}{k-1}^{n-1}\Bigg/\binom{\binom{n}{k}}{n} =$$

$$= k^{n+1}(n-k)^{n-1}\binom{n}{k}^n n!/n^n(n-1)^{n-1}\prod_{i=0}^{n-1}\left(\binom{n}{k}-i\right)$$

и, поскольку $((n-k)/(n-1))^{n-1} \sim e^{1-k}$,

$$S_2(B_{nk})/S_0(B_{nk}) \gtrsim k^{n+1}/e^{n+k-1}.$$

Отсюда следует, что при $k \geqslant 3$ среднее значение квадратов миноров B_{nk} стремится к бесконечности. Если же $k=2$, то

$$\frac{S_2(B_{n2})}{S_0(B_{n2})} < 2^{n+1}\binom{n}{2}^n n!/n^n\left(\binom{n}{2}-n\right)^n < c(2/e)^{n+1},$$

где c – константа. Таким образом, $S_2(B_{n2})/S_0(B_{n2})$ с ростом n стремится к нулю.

Оценим величину $S_1(B_{nk})/S_0(B_{nk})$. В данном случае m не превосходит $k^{n/2}$ и, значит,

$$S_1(B_{nk})/S_0(B_{nk}) \gtrsim k^{n+1}/e^{k+n-1}k^{n/2} > \left(\frac{k}{e^2}\right)^{n/2}/e^{k-1}.$$

Отсюда следует

Теорема 3. *Среднее значение квадратов миноров матрицы B_{n2} с ростом n стремится к нулю. При фиксированном $k \geqslant 8$ ($k \geqslant 3$) среднее значение миноров (квадратов миноров) матрицы B_{nk} с ростом n стремится к бесконечности с экспоненциальной скоростью $(\sqrt{k}/e)^n$ $((k/e)^n)$.*

3. Обозначим $P(A)$ перманент матрицы A. В силу определения перманента, $P(A)$ совпадает с суммой перманентов всех подматриц порядка p матрицы A. Величину $P(A)/S_0(A)$ назовем средним значением перманента подматриц порядка p матрицы A.

Если A – булева матрица, то ее строки можно интерпретировать как характеристические векторы подмножеств множества из q элементов, а каждому ненулевому слагаемому $P(A)$ соответствует система различных представителей (СРП) этих подмножеств. Используя известные (см., например, [3, с. 338]) оценки Холла для числа СРП, мы получим в случае матриц B_n и B_{nk} ($k \geqslant 3$) следующие результаты:

$$\frac{P(B_n)}{S_0(B_n)} \geqslant \prod_{i=0}^{n-1}(2^{n-1}-i)\Big/\binom{2^n}{n} > \frac{n!}{2^n} \gtrsim \left(\frac{n}{2e}\right)^n,$$

$$\frac{P(B_{nk})}{S_0(B_{nk})} \geqslant \prod_{i=0}^{n-1}\left(\binom{n-1}{k-1}-i\right)\Big/\binom{\binom{n}{k}}{n} >$$

$$> n!\left(\binom{n-1}{k-1}-n\right)^n\Big/\binom{n}{k}^n \gtrsim n!\,k^n/n^n(2\pi n)^{1/2} \sim (k/e)^n.$$

Если же $k=2$, то

$$S_1(B_{n2})/S_0(B_{n2}) \leqslant P(B_{n2})/S_0(B_{n2}) \leqslant (n-1)^n\Big/\binom{\binom{n}{2}}{n} \leqslant$$

$$\leqslant e^3 n^{1/2} n(n-1)(n-2)^{-2}(2/e)^n.$$

Теорема 4. *С ростом n среднее значение перманента $(n \times n)$-подматрицы матрицы B_n и матрицы B_{nk} ($k \geqslant 3$) стремится к бесконечности с экспоненциальной скоростью, среднее значение перманента и детерминанта $(n \times n)$-подматрицы B_{n2} стремится к нулю.*

§ 3. Перечисление базисных миноров матрицы B_{n2}

Цель этого параграфа – вычисление величин $x_j(n)$ для матрицы B_{n2} при $n \geqslant 3$. Поскольку B_{n2} – матрица инциденций полного графа с n вершинами, то $x_j(n)$ обозначает число помеченных (n, n)-подграфов полного графа, определитель матрицы инциденций которых равен $\pm j$.

Если G – (n, n)-подграф полного графа, то через $\Gamma(G)$ будем обозначать группу его автоморфизмов, вектором $(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ будем обозначать степени его вершин.

Очевидно, что при соответствующей нумерации столбцов

$$B_{32} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

а при $n > 3$

$$B_{n2} = \begin{pmatrix} 1 \ldots 1 & 0 \ldots 0 \\ E_{n-1} & B_{n-1\,2} \end{pmatrix},$$

где E_{n-1} – единичная матрица порядка $n-1$.

Лемма 1. *Если M – невырожденная подматрица n-го порядка матрицы B_{n2}, то*

$$|\det M| \in \mathscr{D} = \{2, 2^2, \ldots, 2^{[n/3]}\}$$

и для каждого $j \in \mathscr{D}$ найдется M такая, что $|\det M| = j$.

Доказательство. Применим индукцию по $n \geqslant 3$. При $n = 3$ утверждение леммы очевидно. Пусть $n > 3$, M – произвольная подматрица порядка n матрицы B_{n2}, G – соответствующий этой подматрице (n, n)-граф. Поскольку $\sigma_1 + \ldots + \sigma_n = 2n$, то либо существует такое i, при котором $\sigma_i \leqslant 1$, либо $\sigma_1 = \ldots = \sigma_n = 2$. Во втором случае каждая из s компонент связности G есть простой цикл и $|\det M| = 2^s$, если все циклы имеют нечетную длину, и $|\det M| = 0$, если хотя бы один цикл четный. В первом случае, когда $\sigma_i = 0$, то очевидно, что $\det M = 0$; если же $\sigma_i = 1$, то, разложив M по строке, соответствующей вершине i, получим минор порядка $n-1$ из $B_{n-1\,2}$, и дальше можно применить предположение индукции. Из приведенных рассуждений вытекает и существование подматриц M, для которых $|\det M|$ принимает указанные в лемме значения.

Отметим, что для матриц, содержащих по две единицы в каждой строке и каждом столбце, утверждение, аналогичное лемме 1, но для перманентов, получено также в [4].

При $j \in \mathscr{D}$ обозначим через Y_j множество подматриц M матрицы B_{n2}, содержащих по две единицы в каждой строке и таких, что $|\det M| = j$, и положим $y_j(n) = |Y_j|$.

Теорема 5. *При $j \in \mathscr{D}$ справедлива формула*

$$x_j(n) = y_j(n) - \sum_{k=1}^{n-3} (-1)^k (n-k)^k \binom{n}{k} x_j(n-k). \tag{1}$$

Доказательство. Пусть M – произвольная базисная подматрица матрицы B_{n2} такая, что $|\det M| = j$. В соответствующем этой подматрице графе $\sigma_i \geqslant 1$ $(i = 1, \ldots, n)$, так как $\det M \neq 0$. Если $\sigma_i = 2$ $(i = 1, \ldots, n)$, то $M \in Y_j$. Далее применяем формулу включений и исключений. Подматрицам, входящим в Y_j, соответствуют графы без висячих вершин. Поэтому мы должны включить подматрицы, в графах которых есть хотя бы одна висячая вершина, исключить подматрицы, в графах которых есть хотя бы две висячие вершины, включить подматрицы, в графах которых есть хотя бы три висячие вершины, и так далее. Соответствующие количества подматриц на каждом шаге процесса определяются как раз слагаемыми под знаком суммы в формуле (1). Теорема доказана.

Теорема 6. *Справедлива следующая формула:*

$$x_j(n) = \sum_{k=0}^{n-3} \binom{n-1}{k} n^k y_j(n-k).$$

Доказательство. Проведем его индукцией по n, заметив, что при $n = 3$ формула очевидна. Используя предположение индукции и теорему 5, получим, что

$$x_j(n) = y_j(n) - \sum_{k=1}^{n-3} (-1)^k (n-k)^k \binom{n}{k} x_j(n-k) =$$

$$= y_j(n) - \sum_{k=1}^{n-3} (-1)^k (n-k)^k \binom{n}{k} \sum_{l=0}^{n-k-3} \binom{n-k-1}{l} (n-k)^l y_j(n-k-l).$$

Преобразуя суммы, получим, что

$$x_j(n) = y_j(n) + \sum_{k=1}^{n-3} \sum_{l=1}^{k} (-1)^{l-1} (n-l)^{k-1} \binom{n-l}{k-l} \binom{n}{l} (n-k) y_j(n-k).$$

Упростим коэффициент перед $y_j(n-k)$ $(1 \leqslant k \leqslant n-3)$:

$$\sum_{l=1}^{k} (-1)^{l-1} (n-l)^{k-1} \binom{n-l}{k-l} \binom{n}{l} (n-k) =$$

$$= (n-k) \sum_{l=1}^{k} (-1)^{l-1} (n-l)^{k-1} \binom{n}{k} \binom{k}{l} =$$

$$= (n-k) \binom{n}{k} \sum_{l=1}^{k} (-1)^{l-1} (n-l)^{k-1} \binom{k}{l} =$$

$$= (n-k) \binom{n}{k} \sum_{l=0}^{k} (-1)^{l-1} (n-l)^{k-1} \binom{k}{l} + (n-k) \binom{n}{k} n^{k-1}.$$

Так как $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)^m = 0$ при $m < n$ [3, с. 42],

$$\sum_{l=0}^{k} (-1)^{l-1} (n-l)^{k-1} \binom{k}{l} = 0.$$

Отсюда находим, что

$$x_j(n) = \sum_{k=0}^{n-3} \binom{n}{k} n^{k-1} (n-k) y_j(n-k) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-3} \binom{n-1}{k} n^k y_j(n-k).$$

Теорема доказана.

Опишем способ вычисления $y_j(n)$ $(j \in \mathcal{D})$. Из определения множества Y_j следует, что граф G, матрица инциденций которого принадлежит Y_j, имеет $l_j = \log_2 j$ компонент связности, каждая из которых есть простой нечетный цикл. Пусть t_ν –

количество циклов длины ν в графе $G(\nu = 3, \ldots, n)$. Тогда $t_\nu = 0$ при четном ν,

$$\sum_{\nu=3}^{n} t_\nu = l_j, \quad \sum_{\nu=3}^{n} \nu t_\nu = n \tag{2}$$

и согласно [5, с. 195]

$$|\Gamma(G)| = 2^{l_j} \prod_{\nu=3}^{n} (\nu^{t_\nu} t_\nu!).$$

Отсюда легко следует

Теорема 7. *Справедлива формула*

$$y_j(n) = n!\ \Sigma(2^{l_j} \prod_{\nu=3}^{n} (\nu^{t_\nu} t_\nu!))^{-1},$$

где суммирование ведется по всем решениям уравнений (2), *у которых* $t_\nu = 0$ *при четном* ν.

Теоремы 6, 7 решают вопрос о перечислении базисных миноров матрицы B_{n2}.

Отметим, что числа, аналогичные $y_j(n)$, получены также в [6] при подсчете числа неэквивалентных квадратных булевых матриц с двумя единицами в каждой строке и каждом столбце.

§ 4. О перманентах матрицы B_{n2}

Пусть $p_j(n)$ – количество (n, n)-подграфов полного графа, перманент матрицы инциденций которых равен j, $q_j(n)$ – количество (n, n)-подграфов полного графа, у которых $\sigma_1 = \ldots = \sigma_n = 2$ и перманент их матрицы инциденций равен j.

Проводя рассуждения, аналогичные рассуждениям § 3, и учитывая, что перманент матрицы инциденций как четного, так и нечетного циклов равен 2, получаем следующее утверждение.

Теорема 8. *При* $n \geqslant 3, j \in \mathscr{D}$ *справедливы следующие формулы*:

$$p_j(n) = \sum_{k=0}^{n-3} \binom{n-1}{k} n^k q_j(n-k),$$

$$q_j(n) = n!\, \Sigma(2^{l_j} \prod_{\nu=3}^{n} (\nu^{t_\nu} t_\nu!))^{-1},$$

где суммирование ведется по всем решениям системы уравнений (2).

Отметим, что $(n \times n)$-подматрицам матрицы B_{n2} с перманентами, равными j, соответствуют (n, n)-графы, состоящие из l_j компонент связности, каждая из которых является связным графом, содержащим одинаковое число вершин и ребер. Отсюда получаем

Следствие 1. *Число помеченных (n, n)-графов, состоящих из l_j ($j \in \mathscr{D}$) компонент связности, каждая из которых есть граф, содержащий одинаковое число вершин и ребер, равно $p_j(n)$.*

Следствие 2. *Перманент матрицы инциденций (n, n)-графа G равен нулю тогда и только тогда, когда G имеет компоненту связности, в которой число вершин не равно числу ребер.*

Учитывая, что $q_2(n) = (n-1)!/2$, мы можем получить хорошо известную формулу для числа связных графов, содержащих один цикл.

Следствие 3. *Число помеченных связных графов с n вершинами, содержащих один цикл, выражается формулой*

$$p_2(n) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-3} \binom{n-1}{k} n^k (n-k-1)!.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мишина А.П., Проскуряков Н.В. Высшая алгебра. – М.: Наука, 1965.
2. Данилов В.А. и др. Математический анализ. Функции, пределы, ряды, цепные дроби. – М.: Физматгиз, 1961.
3. Сачков В.Н. Введение в комбинаторные методы дискретной математики. – М.: Наука, 1982.
4. Большаков В.Н. О спектре перманента на Λ_n^k // Материалы Всесоюзного семинара по дискретной математике и ее приложениям / Под ред. О.Б. Лупанова. – М.: Изд-во МГУ. – 1986. – С. 65–73.
5. Харари Ф. Теория графов. – М.: Мир, 1973.
6. Тараканов В.Е. Комбинаторные задачи на бинарных матрицах // Комбинаторный анализ. Вып. 5. – М.: Изд-во МГУ. – 1980. – С. 4–15.

Статья поступила 29.01.90