Доклады Академии наук СССР
1976. Том 231, № 3

УДК 513.944

МАТЕМАТИКА

А. С. МИЩЕНКО, А. Т. ФОМЕНКО

ОБ ИНТЕГРИРОВАНИИ УРАВНЕНИЙ ЭЙЛЕРА НА ПОЛУПРОСТЫХ АЛГЕБРАХ ЛИ

(Представлено академиком П. С. Александровым 5 VII 1976)

Пусть G — полупростая алгебра Ли, $\langle X, Y\rangle$ обозначает форму Картана — Киллинга на алгебре G. С каждой гладкой функцией f на алгебре G можно связать гамильтонову систему на пространстве кокасательного расслоения $T^*\mathcal{G}$ к группе $\mathcal{G}$, ассоциированной с алгеброй G, продолжив функцию f до функции Гамильтона на $T^*\mathcal{G}$, являющейся левоинвариантной функцией. Соответствующая гамильтонова система тоже левоинвариантна ([1], [2]), и распадается в две системы, одна из которых задается на кокасательном пространстве в единице группы, изоморфном алгебре G, и называется системой уравнений Эйлера.

Уравнения Эйлера имеют следующее простое описание. Пусть grad f обозначает векторное поле, двойственное относительно формы Киллинга к дифференциалу df, т. е. $\langle \operatorname{grad} f, \xi\rangle = \xi(f)$. Тогда уравнения Эйлера имеют следующий коммутаторный вид:

$$\dot{x} = [x, \operatorname{grad} f(x)]. \tag{1}$$

Особый интерес представляет случай потока геодезических для левоинвариантных метрик на группе $\mathcal{G}$. В этом случае функция f является невырожденной квадратичной формой на алгебре G, а $\operatorname{grad} f(x)$ является самосопряженным линейным оператором в алгебре G

$$\operatorname{grad} f(x) = \varphi(x).$$

В ([2]) рассматривались аналоги движения твердого тела с закрепленной точкой для динамических систем высоких размерностей, так называемые движения «n-мерного твердого тела», и были найдены серии квадратичных интегралов уравнений Эйлера для движения n-мерного твердого тела. Эти аналоги являлись системами на алгебре Ли группы $SO(n)$. Случай группы $SO(4)$ рассматривался также в ([3]). В работе ([4]), используя результаты Дубровина (см. изложение в работе ([5])), была предъявлена для группы $SO(n)$ новая серия интегралов и показана интегрируемость уравнений Эйлера движения n-мерного твердого тела, причем решения выражались через Θ-функции некоторых римановых поверхностей. Вопрос о полной интегрируемости таких систем на орбитах общего положения оставался открытым.

В настоящей работе прослеживается четкий алгебраический механизм возникновения интегралов для уравнений Эйлера на полупростых алгебрах Ли, устанавливается инволютивность и независимость этих интегралов.

Рассмотрим комплексную полупростую алгебру Ли G и ее картановскую подалгебру H. Пусть $\Sigma = \{\alpha\}$ — множество корней алгебры G, рассматриваемых как векторы в подалгебре H, X_α — собственные векторы, соответствующие корням α. Пусть векторы a, b лежат в подалгебре H и $\langle a, \alpha\rangle \neq 0$; $\langle b, \alpha\rangle \neq 0$ для любого $\alpha \in \Sigma$. Будем говорить, что вектор a (или b) в этом случае находится в общем положении. Подпространство V, порожденное собственными векторами X_α, ортогонально к подалгебре H и инвариантно относительно операторов ad_a, $a \in H$. Более того, если вектор $a \in H$ находится в общем положении, то ограничение $ad_a|_V$ является изоморфизмом. Рассмотрим

самосопряженный относительно формы Киллинга невырожденный оператор φ: $G \to G$, задаваемый в представлении $G = H \oplus V$ матрицей

$$\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 & 0 \\ 0 & \varphi_2 \end{pmatrix},$$

где φ_1: $H \to H$ — произвольный самосопряженный оператор, а $\varphi_2(x) = (ad_b)^{-1} \circ ad_a(x)$. Тогда в алгебре G выполнено тождество

$$[\varphi(x), b] = [x, a]. \tag{2}$$

Если положить $f(x) = {}^1/_2 \langle x, \varphi(x) \rangle$, то уравнение (1) примет вид

$$\dot{x} = [x, \varphi(x)], \tag{3}$$

причем векторное поле $\dot{x}$ касательно к орбитам алгебры G.

Теорема 1. а) *Система* (3) *вполне интегрируема на орбитах алгебры G, находящихся в общем положении.*

б) *Пусть f — инвариантная (относительно присоединенного представления) функция на алгебре G. Тогда функции*

$$\bar{f}_\lambda(x) = f(x + \lambda b) \tag{4}$$

являются интегралами движения для любых чисел λ. Любые два интеграла $\bar{f}_\lambda(x)$ и $\bar{g}_\mu(x)$ находятся в инволюции на орбите алгебры G, находящейся в общем положении, причем число независимых интегралов указанного вида равно половине размерности орбиты.

Пусть G_u — компактная вещественная форма полупростой комплексной алгебры Ли G, τ — соответствующая антикомплексная инволюция, множество неподвижных точек которой совпадает с G_u. Тогда инвариантная подалгебра Картана H разлагается в прямую сумму $H = H_u \oplus iH_u$, причем τ на H_u тождественно, а на iH_u меняет знак векторов. Если при этом векторы a, $b \in H_u$, то соответствующий оператор φ переводит G_u в себя, если φ_1 сохраняет разложение подалгебры H. Тогда уравнения Эйлера (3) оставляют инвариантным компактную вещественную форму G_u.

Теорема 2. *Система* (3) *вполне интегрируема на орбитах компактной алгебры G_u и полный набор инволютивных интегралов задается ограничением полного набора инволютивных интегралов на алгебре G, определенных в теореме* 1.

Пусть G_0 — нормальная вещественная форма полупростой комплексной алгебры Ли G, σ — соответствующая ей инволюция. Тогда инволюции τ и σ коммутируют, а композиция $\tau\sigma$ является комплексной инволюцией. Множество неподвижных точек $G^{\tau\sigma}$ инволюции $\tau\sigma$ совпадает с комплексификацией пересечения $G_u \cap G_0$.

Теорема 3. а) *Система* (3) *оставляет инвариантным подалгебру $G_u \cap G_0$.*

б) *Число независимых интегралов* (4) *на $G_u \cap G_0$ равно k — числу положительных корней алгебры G, разлагающихся в сумму нечетного числа простых корней. Число независимых интегралов* (4) *на $G^{\tau\sigma}$ равно $2k$.*

в) *Если $G = GL(n; \mathbf{c})$, то $G_u \cap G_0 = so(n)$. В этом случае система* (3) *совпадает с уравнениями Эйлера движения n-мерного твердого тела и вполне интегрируема на орбитах алгебры $so(n)$, находящихся в общем положении.*

Развитая нами методика фактически основана на ценном наблюдении Манакова о применимости для исследования уравнений Эйлера $(L-A)$-пары, зависящей от спектрального параметра. Оказывается, что такая $(L-A)$-пара существует и для произвольной полупростой алгебры Ли. При этом инволютивность интегралов является довольно простым следствием некоторых алгебраических тождеств в алгебрах Ли. С независимостью интегралов дело обстоит значительно сложнее, поскольку априорное число интегралов оказывается больше, чем действительное число функционально независимых интегралов. Предложенный нами метод оценки снизу числа функционально независимых интегралов, позволяющий дока-

зать теоремы 1, 2, 3, основан на использовании глубоких фактов из теории полупростых алгебр Ли. Это обстоятельство, по-видимому, не случайно, поскольку известное нам доказательство полной интегрируемости некоторых матричных систем (см. ([5])) также является весьма нетривиальным и требует привлечения не менее глубокого анализа обратных задач теории рассеяния, а также абелевых многообразий.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
2 VI 1976

ЛИТЕРАТУРА

[1] *В. И. Арнольд,* Математические методы в классической механике, 1974. [2] *А. С. Мищенко,* Функц. анализ и его прилож., т. 4, в. 3, 73 (1970). [3] *Michel Langlois,* Thèse présentée a la faculté des sciences de l'université de Besançon, 1971. [4] *С. В. Манаков,* Функц. анализ и его прилож., т. 10, в. 4 (1976). [5] *Б. А. Дубровин, В. Б. Матвеев, С. П. Новиков,* УМН, т. 24, в. 1 (187), 55 (1976).