K. A. Mirzoev, T. A. Safonova, Ordinary differential operators and the integral representation of sums of certain power series, *Tr. Mosk. Mat. Obs.*, 2019, Volume 80, Issue 2, 157–177

Обыкновенные дифференциальные операторы и интегральное представление сумм некоторых степенных рядов

К. А. Мирзоев, Т. А. Сафонова

Посвящается 70-летию А. А. Шкаликова

Собственные значения и собственные функции некоторых операторов, порождённых симметрическими дифференциальными выражениями с постоянными коэффициентами и самосопряжёнными граничными условиями в пространстве квадратично интегрируемых по Лебегу функций на отрезке, явно вычисляются, а резольвенты этих операторов являются интегральными операторами. Из спектральной теоремы следует, что для ядер резольвент этих операторов справедлива билинейная формула. Кроме того, каждое из этих ядер является функцией Грина некоторой самосопряжённой граничной задачи, и хорошо известна процедура её построения. Таким образом, для функций Грина этих задач справедливы формулы разложения в ряды по собственным функциям. В работе полученные этим способом тождества применяются для интегрального представления сумм некоторых степенных рядов и специальных функций и, в частности, для вычисления сумм некоторых сходящихся числовых рядов.

Библиография: 11 названий. *УДК*: 517.927.25, 517.521.15, 517.589. *MSC2010*: 34B27, 34L10, 33E20. *Ключевые слова*: функция Грина, полилогарифмы и ассоциированные с ними функции, интегральное представление степенных рядов, ζ-функция Римана, дигамма-функция Эйлера.

§ 1. Введение

Пусть L — самосопряжённый оператор, порождённый в гильбертовом пространстве $\mathscr{L}^2[0,\pi]$ — пространстве всех классов попарно п. в. равных между собой комплекснозначных измеримых функций y, таких, что $|y|^2$ интегрируема по Лебегу на $[0,\pi]$ — симметрическим дифференциальным выражением с постоянными вещественными коэффициентами $l_{2n}[y]$ порядка $2n$ и самосопряжёнными граничными условиями $U_j(y)=0$, $j=1,\dots,2n$. Символами λ_k и $\phi_k(x)$, $k=1,2,\dots$, обозначим собственные значения и соответствующие им ортонормированные собственные функции оператора L. Хорошо известно, что собственные значения λ_k (возможно кратные) являются вещественными числами, а вещественнозначные функции $\phi_k(x)$ образуют ортонормированный базис в пространстве $\mathscr{L}^2[0,\pi]$.

Результаты, представленные в §§ 1–3, получены при поддержке РНФ (грант № 17-11-01215), а результаты, представленные в §§ 4–5, получены при поддержке РФФИ (грант № 18-01-00250).

Предположим, что число $\lambda = 0$ является регулярной точкой оператора L, т. е. 0 не является собственным значением этого оператора, и рассмотрим его резольвенту $R_\lambda(L)$ при $\lambda = 0$. Известно также, что эта резольвента является интегральным оператором, и для его ядра $\mathbb{G}(x,t)$ справедлива билинейная формула

$$\mathbb{G}(x,t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\phi_k(x)\phi_k(t)}{\lambda_k}. \tag{1}$$

С другой стороны, ядро $\mathbb{G}(x,t)$ является функцией Грина самосопряжённой граничной задачи

$$\begin{cases} l_{2n}[y] = f, \\ U_j(y) = 0, \quad j = 1,2,\ldots,2n, \end{cases} \tag{2}$$

и хорошо известна процедура её построения (см., например, [2], часть вторая, гл. I, § 1.5), а именно: пусть $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_{2n}(x)$ — фундаментальная система решений уравнения $l_{2n}[y] = 0$ и

$$g(x,t) = \frac{(-1)^n \operatorname{sign}(x-t)}{2a_0 W} \begin{vmatrix} y_1(t) & \ldots & y_{2n}(t) \\ y_1'(t) & \ldots & y_{2n}'(t) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(2n-2)}(t) & \ldots & y_{2n}^{(2n-2)}(t) \\ y_1(x) & \ldots & y_{2n}(x) \end{vmatrix},$$

где a_0 — старший коэффициент выражения $l_{2n}[y]$, а W — вронскиан функций $y_1, y_2, \ldots, y_{2n}$. Тогда

$$\mathbb{G}(x,t) = \frac{1}{\det D} \begin{vmatrix} g(x,t) & y_1(x) & \ldots & y_{2n}(x) \\ U_1(g) & & & \\ \vdots & & D & \\ U_{2n}(g) & & & \end{vmatrix}, \tag{3}$$

где матрица $D := (U_s(y_l))_{s,l=1}^{2n}$, а $U_j(g)$, $j = 1, 2 \ldots, 2n$, — значение формы U_j на функции $g(x,t)$ при фиксированном значении x.

Таким образом, для функций Грина задачи (2) справедливо разложение в ряд по собственным функциям (см. (1)) и представление (3), т. е. справедливо равенство

$$\frac{1}{\det D} \begin{vmatrix} g(x,t) & y_1(x) & \ldots & y_{2n}(x) \\ U_1(g) & & & \\ \vdots & & D & \\ U_{2n}(g) & & & \end{vmatrix} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\phi_k(x)\phi_k(t)}{\lambda_k}. \tag{4}$$

Как известно, и в случае, когда число ноль является собственным значением оператора L, также можно построить теперь уже обобщённую функцию Грина (см. [2], часть вторая, гл. I, § 1.7 или [10], Ch. 3, § 3.7), для которой будет справедлив аналог формулы (4). Однако этот случай более разнообразен за счёт возможной кратности собственного числа ноль и, по-видимому, является темой дальнейших исследований, а в рамках данной статьи рассматриваться не будет.

Символами S и T обозначим самосопряжённые операторы, порождённые в пространстве $\mathscr{L}^2[0,\pi]$ выражением $-y''$ и граничными условиями $y(0)=y(\pi)=0$ и $y(0)=y'(\pi)=0$ соответственно. Пусть далее $p_m(x)$ — многочлен степени $m\geqslant 1$ с вещественными коэффициентами. В настоящей работе, применяя тождество (4) для функций Грина самосопряжённых операторов $p_m(S)$ и $p_m(T)$, получены интегральные представления сумм некоторых степенных рядов (§ 3, теоремы 2–4) и специальных функций (§ 4, следствия 3 и 4), а также найдены формулы для вычисления сумм некоторых сходящихся числовых рядов (следствия 1, 2, 6 и 8). Особо отметим, что хорошо известные классические формулы для сумм, например для значений ζ-функции Римана в целых точках (см. формулы (40)–(43)), вписываются в схему настоящей работы, т. е. являются частными случаями доказываемых нами теорем.

Для целей, указанных выше, тождество (4) впервые было использовано в работе [3], а затем — в [4]. Часть результатов данной работы в этих статьях приведена без доказательств.

§ 2. Разложение по собственным функциям функции Грина оператора $p_m(S)$

Рассмотрим в $\mathscr{L}^2[0,\pi]$ самосопряжённый оператор S, порождённый выражением $l_2[y]:=-y''$ и граничными условиями Дирихле, т. е. условиями $y(0)=0$, $y(\pi)=0$. Хорошо известно, что числа $\mu_{2,k}:=k^2$ являются собственными значениями, а функции

$$\varphi_k(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin kx,\quad k=1,2,\ldots,$$

— соответствующими им ортонормированными собственными функциями оператора S (см., например, [2], часть третья, гл. II, задача 2.9).

Пусть далее $p_m(x)$ — многочлен степени $m\geqslant 1$ с вещественными коэффициентами. Рассмотрим оператор $p_m(S)$. Легко показать, что область определения $\mathscr{D}(p_m(S))$ этого оператора —

$$\mathscr{D}(p_m(S))=\bigl\{y\mid y^{(j-1)}\in AC[0,\pi];\ V_j(y)=0,\ j=1,\ldots,2m\bigr\},$$

где линейные формы $V_j(y)$ определяются равенствами

$$V_{j+1}(y):=y^{(2j)}(0),\quad V_{j+m+1}(y):=y^{(2j)}(\pi),\quad j=0,\ldots,m-1. \tag{5}$$

При этом если $y\in\mathscr{D}(p_m(S))$, то

$$p_m(S)y=p_m\Bigl(-\frac{d^2}{dx^2}\Bigr)y=:l_{2m}[y].$$

Таким образом, оператор $p_m(S)$ является самосопряжённым оператором, порождённым в $\mathscr{L}^2[0,\pi]$ дифференциальным выражением $l_{2m}[y]$ и условиями $V_j(y)=0$, где $j=1,2,\ldots,2m$.

Если положить $p_1(x)=x$, то оператор $p_1(S)$, очевидно, совпадёт с оператором S.

Спектр $\sigma(p_m(S))$ этого оператора является дискретным и имеет вид

$$\sigma(p_m(S)) = \{\mu \mid \mu=\mu_{2m,k} := p_m(k^2),\ k=1,2,\ldots\},$$

при этом собственному значению $\mu_{2m,k}$ соответствует собственная функция $\varphi_k(x)$.

Предположим теперь, что число $\mu=0$ является регулярной точкой оператора $p_m(S)$ (т. е. $0\notin\sigma(p_m(S))$), и рассмотрим его резольвенту $R_\mu(p_m(S))$ при $\mu=0$. Эта резольвента, как мы уже отмечали выше, является интегральным оператором с ядром $G(x,t)$, которое определяется по формуле

$$G(x,t) = \frac{1}{\det D}\begin{vmatrix} g(x,t) & y_1(x) & \ldots & y_{2m}(x) \\ V_1(g) & & & \\ \vdots & & D & \\ V_{2m}(g) & & & \end{vmatrix}, \tag{6}$$

где матрица $D:=(V_s(y_l))_{s,l=1}^{2m}$, а значения форм $V_j(g)$ $(j=1,\ldots,2m)$ находятся по формулам

$$V_{j+1}(g) = \left.\frac{\partial^{(2j)}g(x,t)}{\partial x^{(2j)}}\right|_{x=0}, \quad V_{j+m+1}(g) = \left.\frac{\partial^{(2j)}g(x,t)}{\partial x^{(2j)}}\right|_{x=\pi}, \quad j=0,\ldots,m-1.$$

Таким образом, для функции Грина $G(x,t)$ оператора $p_m(S)$ справедливы равенства (1) и (6) и, следовательно, тождество (4). Итак, мы доказали справедливость следующей теоремы.

Теорема 1. *Пусть многочлен $p_m(x)$ такой, что $p_m(k^2)\neq 0$ при $k=1,2,\ldots$ Тогда для функции Грина $G(x,t)$, определяемой формулой* (6), *справедливо тождество*

$$G(x,t) = \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\sin kx\sin kt}{p_m(k^2)}. \tag{7}$$

Полагая далее $t=x$ и $t=\pi-x$ в формуле (7), находим, что

$$G(x,x) = \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1-\cos 2kx}{p_m(k^2)} \tag{8}$$

и

$$G(x,\pi-x) = \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k-1}\frac{1-\cos 2kx}{p_m(k^2)}. \tag{9}$$

В частности, интегрирование этих равенств по отрезку $[0,\pi/2]$ приводит к справедливости следствия 1.

Следствие 1. *Пусть выполняются условия теоремы* 1. *Тогда справедливы тождества*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{p_m(k^2)} = 2 \int_0^{\pi/2} G(x, x)\, dx \tag{10}$$

и

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{p_m(k^2)} = 2 \int_0^{\pi/2} G(x, \pi - x)\, dx. \tag{11}$$

Справедливо также следующее утверждение.

Следствие 2. *Пусть выполняются условия теоремы* 1. *Тогда*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{p_m((2k-1)^2)} = \frac{\pi}{2} G\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \tag{12}$$

и

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)p_m((2k-1)^2)} = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi/2} G\left(x, \frac{\pi}{2}\right) dx. \tag{13}$$

Доказательство. Полагая $t = \pi/2$ в формуле (7), получим, что

$$G\left(x, \frac{\pi}{2}\right) = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1} \sin(2k-1)x}{p_m((2k-1)^2)}. \tag{14}$$

В частности, взяв и $x = \pi/2$, заключаем, что справедливо равенство (12). Если же проинтегрировать равенство (14) по отрезку $[0, \pi/2]$, то получим справедливость равенства (13). Следствие 2 доказано. □

Отметим, что формулы (7) и (10) приведены также в работе авторов [3].

§ 3. Интегральные представления сумм степенных рядов. Случай произвольного многочлена $p_m(x)$

В этом параграфе с помощью известных разложений в ряды Фурье некоторых элементарных функций, зависящих от параметра, и равенств (8) и (9) будут получены интегральные представления рядов вида

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{z^k}{P(k)},$$

где $P(k)$ — многочлен специального вида с вещественными коэффициентами. Сначала докажем, что справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть функции $p_m(x)$ и $G(x, t)$ те же, что и в формулировке теоремы* 1. *Тогда при $z \in [-1, 1]$ справедливо равенство*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{z^k}{k p_m(k^2)} = 2 \int_0^{\pi/2} G(x, x) \ln(1 - 2z \cos 2x + z^2)\, dx, \tag{15}$$

а при $z \in (-1, 1]$ — *равенство*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{z^k}{p_m(k^2)} = 4 \int\limits_0^{\pi/2} G(x, x) \frac{z^2 - z\cos 2x}{1 - 2z\cos 2x + z^2}\, dx. \tag{16}$$

Доказательство. Рассмотрим сначала случай, когда $-1 < z < 1$. Известно, что справедливо следующее разложение в ряд Фурье

$$\ln(1 - 2z\cos 2x + z^2) = -2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n} \cos 2nx, \quad 0 < x < \pi \tag{17}$$

(см. [1], гл. 1, п. 1.448, формула (2), или [5], гл. 5, п. 5.4.9, формула (13)).

С другой стороны, учитывая равенства (8) и (10), находим, что

$$G(x, x) = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{\pi/2} G(t, t)\, dt - \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\cos 2kx}{p_m(k^2)}. \tag{18}$$

Перемножая равенства (17) и (18) и интегрируя полученное равенство в пределах от 0 до $\pi/2$, т. е. применяя обобщённое равенство Парсеваля для скалярного произведения двух функций (из пространства $\mathscr{L}^2[0, \pi/2]$), находим, что справедливо равенство (15).

Далее, заметив, что ряд, стоящий в левой части равенства (15) допускает почленное дифференцирование, а интеграл, стоящий в правой части этого равенства, — дифференцирование под знаком интеграла, и дифференцируя обе части равенства (15) по параметру z, а затем умножая на z полученное соотношение, приходим к справедливости равенства (16).

Теперь рассмотрим случай, когда $z = 1$. Исходя из известной формулы

$$\ln(2\sin x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos 2nx}{n}, \quad 0 < x < \pi$$

(см. [1], гл. 1, п. 1.441, формула (2), или [5], гл. 5, п. 5.4.2, формула (9)) и равенства (18) и рассуждая так же, как в случае $-1 < z < 1$, приходим к справедливости равенства

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k p_m(k^2)} = 4 \int\limits_0^{\pi/2} G(x, x) \ln(2\sin x)\, dx,$$

т. е. справедливости равенства (15) при $z = 1$. При этом значении z равенство (16) есть не что иное, как равенство (10), справедливость которого мы уже установили.

Пусть теперь $z = -1$. Используя разложение

$$\ln(2|\cos x|) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} \cos 2nx}{n}, \quad 0 < x < \pi$$

(см. [1], гл. 1, п. 1.448, формула (2) при $p=-1$, или [5], гл. 5, п. 5.4.2, формула (10)) и равенство (18), заключаем, что справедливо равенство (15) при $z=-1$. Теорема 2 доказана. □

Формулировка теоремы 2 приведена также в работе авторов [3].

Замечание. Особо отметим, что формула (16) при $z=-1$ не справедлива. Формулу же для суммы ряда, стоящего в левой части (16) при этом значении z мы уже установили в следствии 1 (см. формулу (11)).

Теперь докажем, что справедливо следующее утверждение.

Теорема 3. *Пусть многочлен* $p_m(x)$ *такой, что* $p_m(k^2)\neq 0$ *при* $k=1,2,\ldots,$ *и пусть* $G(x,t)$ — *функция Грина, определяемая формулой* (6). *Тогда при* $z\in[-1,1]$ *справедливы равенства*

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}z^{2k-1}}{(2k-1)p_m((2k-1)^2)}=\int_0^{\pi/2}G\Big(x,\frac{\pi}{2}\Big)\operatorname{arctg}\frac{2z\sin x}{1-z^2}\,dx,\tag{19}$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}z^{2k-1}}{p_m((2k-1)^2)}=2\int_0^{\pi/2}G\Big(x,\frac{\pi}{2}\Big)\frac{(z+z^3)\sin x}{1-2z^2\cos 2x+z^4}\,dx\tag{20}$$

и

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{z^{2k-1}}{(2k-1)p_m((2k-1)^2)}=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}G\Big(x,\frac{\pi}{2}\Big)\ln\frac{1+2z\sin x+z^2}{1-2z\sin x+z^2}\,dx,\tag{21}$$

а при $z\in(-1,1)$ — *равенство*

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{z^{2k-1}}{p_m((2k-1)^2)}=2\int_0^{\pi/2}G\Big(x,\frac{\pi}{2}\Big)\frac{(z-z^3)\sin x}{1+2z^2\cos 2x+z^4}\,dx.\tag{22}$$

Доказательство. Сначала рассмотрим случай $-1<z<1$. В этом случае справедливость утверждений теоремы 3 (т. е. равенств (19)–(22)) устанавливается так же, как и в случае теоремы 2, с той лишь разницей, что вместо формулы (8) для функции $G(x,x)$ используется тождество (14) для функции $G(x,\pi/2)$, а вместо ряда Фурье (17) — следующие ряды Фурье:

$$\operatorname{arctg}\frac{2z\sin x}{1-z^2}=2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{z^{2n-1}\sin(2n-1)x}{2n-1},\quad 0<x<\pi$$

(см., например, [1], гл. 1, п. 1.448, формула (3)), и

$$\ln\frac{1+2z\sin x+z^2}{1-2z\sin x+z^2}=4\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}z^{2n-1}\sin(2n-1)x}{2n-1},\quad 0<x<\pi$$

(см., например, [1], гл. 1, п. 1.448, формула (5)).

Заметим, что из справедливости формул (19)–(21) при $z=1$ следует, очевидно, что они справедливы и при $z=-1$, и рассмотрим случай, когда $z=1$.

Отметим, что при $x \in (0, \pi)$ функция $\sin x$ положительна, поэтому

$$\lim_{z \to 1-0} \operatorname{arctg} \frac{2z \sin x}{1-z^2} = \frac{\pi}{2}. \tag{23}$$

Далее переходя к пределу при $z \to 1-0$ почленно в левой части равенства (19) и под знаком интеграла в правой части этого равенства с учётом (23), приходим к уже доказанному равенству (13), т. е. равенство (19) справедливо при $z=1$.

Теперь покажем, что при $z=1$ равенство (20) также справедливо. Пусть $m>1$. Применяя равенство (14), подынтегральное выражение в правой части равенства (20) (при $z=1$) представим в виде

$$\frac{1}{\sin x} G\Big(x, \frac{\pi}{2}\Big) = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{p_m((2k-1)^2)} \cdot \frac{\sin(2k-1)x}{\sin x}. \tag{24}$$

С другой стороны, из элементарного тождества

$$\frac{\sin(2k-1)x}{\sin x} = 1 + 2 \sum_{j=1}^{k-1} \cos(2jx), \tag{25}$$

очевидно, следует, что

$$\left| \frac{\sin(2k-1)x}{\sin x} \right| \leqslant 2k-1, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Таким образом, общий член ряда, стоящего в правой части (24), по абсолютной величине не превосходит

$$\frac{2k-1}{|p_m((2k-1)^2)|}, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

т. е. ряд (24) мажорируется сходящимся положительным числовым рядом, и поэтому, согласно теореме Вейерштрасса, сходится абсолютно и равномерно на $[0, \pi]$. Следовательно, ряд в (24) можно почленно интегрировать по отрезку $[0, \pi]$. Сделав это с учётом равенства

$$\int_0^\pi \frac{\sin(2k-1)x}{\sin x} \, dx = \pi,$$

следующего из формулы (25), после некоторых элементарных преобразований находим, что тождество (20) справедливо при $z=1$ и $m>1$.

Пусть теперь $m=1$, и пусть $p_1(x) = x + a$, где a некоторое вещественное число, такое, что $k^2 + a \neq 0$ при $k = 1, 2, \ldots$

Применив тождества (24) и (25), находим, что

$$\frac{1}{\sin x} G\Big(x, \frac{\pi}{2}\Big) = \frac{2}{\pi} \bigg(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)^2 + a} + 2 \sum_{k=2}^{+\infty} A_k(x) \bigg), \tag{26}$$

где

$$A_k(x) := \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)^2+a} \sum_{j=1}^{k-1} \cos(2jx), \quad k = 2, 3, \ldots$$

Меняя порядок суммирования, заметим, что

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} A_k(x) = \sum_{j=n}^{n+p-1} \left(\sum_{k=j+1}^{n+p} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)^2+a} \right) \cos(2jx)$$

и поэтому

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} A_k(x) \right| \leqslant \sum_{j=n}^{n+p-1} \left| \sum_{k=j+1}^{n+p} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)^2+a} \right|.$$

С другой стороны, легко показать, что если $x_1, x_2, \ldots, x_s$ — возрастающая последовательность положительных чисел, то

$$\sum_{j=1}^{s} \left| \sum_{k=j}^{s} (-1)^{k-1} x_{s+1-k} \right| \leqslant \sum_{j=1}^{s+1} x_j,$$

и, следовательно,

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} A_k(x) \right| \leqslant \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{(2k-1)^2+a}.$$

Таким образом, применяя критерий Коши сначала для сходящегося числового ряда с общим членом $1/((2k-1)^2+a)$, а затем для функционального ряда с общим членом $A_k(x)$, заключаем, что последний равномерно сходится на отрезке $[0, \pi/2]$. Далее, интегрируя равенство (26) почленно по отрезку $[0, \pi/2]$, приходим к справедливости равенства (20) при $z=1$ и $m=1$.

Остаётся только установить справедливость (21) при $z=1$. В этом случае правая часть (21) легко преобразуется к виду

$$\int_0^{\pi/2} G\Big(x, \frac{\pi}{2}\Big) \ln \operatorname{tg}\Big(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\Big)\, dx.$$

Используя далее формулу (14) и разложение

$$\ln \operatorname{tg}\Big(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\Big) = 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} \sin(2n-1)x}{2n-1}, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}$$

(см., например, [1], гл. 1, п. 1.442, формула (3)), и рассуждая так же, как в доказательстве теоремы 2, т. е. используя обобщённое равенство Парсеваля, получим справедливость формулы (21) при $z=1$. Теорема 3 доказана. □

Отметим, что условия $p_m(k^2) \neq 0$ при $k = 1, 2, \ldots$ в формулировке теоремы 3, очевидно, избыточны и их можно заменить другими условиями. Вкратце покажем, как это можно сделать.

Символом T обозначим оператор, порождённый тем же выражением $l_2[y]=-y''$ и граничными условиями Дирихле — Неймана, т. е. условиями

$$y(0)=0, \quad y'(\pi)=0,$$

в пространстве $\mathscr{L}^2[0,\pi]$. Хорошо известно, что числа $\nu_{2,k}:=(k-1/2)^2$ являются собственными значениями этого оператора, а функции

$$\psi_k(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin\Big(k-\frac{1}{2}\Big)x, \quad k=1,2,\ldots,$$

— соответствующими им ортонормированными собственными функциями. Пусть, как и раньше, $p_m(x)$ — многочлен m-го порядка с вещественными коэффициентами, но теперь такой, что $p_m((k-1/2)^2)\neq 0$ при $k=1,2,\ldots$ Как и в случае оператора $p_m(S)$, оператор $p_m(T)$ является самосопряжённым оператором со спектром

$$\sigma(p_m(T))=\Big\{\nu \mid \nu=\nu_{2m,k}:=p_m\Big(\Big(k-\frac{1}{2}\Big)^2\Big),\ k=1,2,\ldots\Big\},$$

и при этом собственному значению $\nu_{2m,k}$ соответствует собственная функция $\psi_k(x)$. Таким образом, число $\nu=0$ является регулярной точкой оператора $p_m(T)$. Символом $K(x,t)$ обозначим ядро резольвенты этого оператора. Рассуждая так же, как и в случае оператора $p_m(S)$, можно доказать, что для этого ядра справедлив аналог теоремы 1, т. е. для ядра $K(x,t)$, определяемого процедурой, описанной в § 1 (см. формулу (3)), справедливо тождество

$$K(x,t)=\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\sin(k-1/2)x\sin(k-1/2)t}{p_m((k-1/2)^2)}. \tag{27}$$

Это тождество позволяет установить справедливость следующей теоремы.

Теорема 4. *Пусть многочлен $p_m(x)$ такой, что $p_m(k-1/2)^2\neq 0$ при $k=1,2,\ldots$, и пусть $K(x,t)$ — функция Грина граничной задачи*

$$\begin{cases} p_m\Big(-\dfrac{d^2}{dx^2}\Big)[y]=f, \\ y^{(2j)}(0)=y^{(2j+1)}(\pi)=0, \quad j=0,1,\ldots,m-1. \end{cases}$$

Тогда при $z\in[-1,1]$ справедливы равенства

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}z^{2k-1}}{(2k-1)p_m((k-1/2)^2)}=2\int_0^{\pi/2}K(x,\pi-x)\operatorname{arctg}\frac{2z\sin x}{1-z^2}\,dx, \tag{28}$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}z^{2k-1}}{p_m((k-1/2)^2)}=4\int_0^{\pi/2}K(x,\pi-x)\frac{(z^3+z)\sin x}{1-2z^2\cos 2x+z^4}\,dx, \tag{29}$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{z^{2k-1}}{(2k-1)p_m((k-1/2)^2)}=\int_0^{\pi/2}K(x,\pi-x)\ln\frac{1+2z\sin x+z^2}{1-2z\sin x+z^2}\,dx, \tag{30}$$

а при $z \in (-1, 1)$ — *равенство*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{z^{2k-1}}{p_m((k-1/2)^2)} = 4 \int_0^{\pi/2} K(x, \pi - x) \frac{(z-z^3)\sin x}{1+2z^2\cos 2x + z^4}\, dx. \tag{31}$$

Доказательство. Теорему 4 можно доказать по той же схеме, что и теорему 3, взяв за основу разложение (27) для функции $K(x, t)$. □

В кратком сообщении авторов [4] приведена формула (27), формулировка теоремы 4 и некоторые следствия из неё (см. [4], теоремы 1 и 2, следствия 2 и 3).

Замечание. Отметим, что утверждения теорем 2–4 остаются справедливыми и при комплексных z, таких, что $|z| < 1$. Более того, правые части формул (15)–(16) теоремы 2, формул (19)–(22) теоремы 3 и формул (28)–(31) теоремы 4 можно использовать, очевидно, для аналитического продолжения сумм рядов, стоящих в левых частях этих формул, на всю комплексную плоскость за исключением некоторых точек.

§ 4. Случай многочлена $p_m(x) = x^m$. Полилогарифмы и ассоциированные с ними функции

В этом параграфе речь пойдёт о специальных функциях $\mathrm{Li}_j(z)$ и ассоциированных с ними функциях $\mathrm{Ti}_j(z)$ с использованием многочленов и чисел Бернулли $B_n(x)$ и B_n, а также многочленов и чисел Эйлера $E_n(x)$ и E_n. Для удобства напомним их определения.

Функция $\mathrm{Li}_j(z)$ — полилогарифмическая функция порядка j от аргумента z — определяется как сумма степенного ряда

$$\mathrm{Li}_j(z) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{z^k}{k^j},$$

где $z, j \in \mathbb{C}$, причём $|z| < 1$ (см., например, [11], гл. 7, п. 7.1, формула (7.1)).

Функция $\mathrm{Ti}_j(z)$ — функция, ассоциированная с полилогарифмом $\mathrm{Li}_j(z)$, — определяется как сумма степенного ряда

$$\mathrm{Ti}_j(z) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1} z^{2k-1}}{(2k-1)^j},$$

где $z, j \in \mathbb{C}$, причём $|z| < 1$ (см., например, [11], гл. 7, п. 7.1, формула (7.4)).

Многочлены Бернулли $B_n(x)$ и Эйлера $E_n(x)$ определяются как коэффициенты разложений в степенные ряды следующих функций:

$$\frac{te^{tx}}{e^t - 1} = \sum_{n=0}^{+\infty} B_n(x) \frac{t^n}{n!}, \quad |t| < 2\pi, \qquad \text{и} \qquad \frac{2e^{tx}}{e^t + 1} = \sum_{n=0}^{+\infty} E_n(x) \frac{t^n}{n!}, \quad |t| < \pi$$

(см., например, [7], п. 23, формулы (23.1.1)).

Наконец, числа Бернулли B_n и числа Эйлера E_n при $n=0, 1, \ldots$ определяются равенствами

$$B_n = B_n(0) \quad \text{и} \quad E_n = 2^n E_n\left(\frac{1}{2}\right)$$

соответственно (см., например, [7], п. 23, формулы (23.1.2)).

Везде в этом параграфе мы будет предполагать, что $p_m(x)=x^m$, $m=1, 2, \ldots$ Функция Грина $G(x, t) =: G_m(x, t)$ для этого многочлена определяется, очевидно, по формуле (6), где

$$y_j(x) = \frac{x^{j-1}}{(j-1)!}, \quad j = 1, 2, \ldots, 2n; \qquad g(x, t) = (-1)^n \operatorname{sign}(x-t)\frac{(x-t)^{2n-1}}{2(2n-1)!},$$

а линейные формы $V_j(y)$ — равенствами (5).

Отметим, что при $m=1$ функция Грина $G_1(x, t)$ вычисляется по формуле

$$G_1(x, t) = \begin{cases} \dfrac{t}{\pi}(\pi-x), & t < x, \\ \dfrac{x}{\pi}(\pi-t), & t \geqslant x \end{cases}$$

(см., например, [10], Ch. 3, problem 10), а для функции $G_m(x, t)$ справедливы рекуррентные формулы

$$G_m(x, t) = \int_0^\pi G_{m-1}(x, \tau)G_1(\tau, t)\, d\tau, \quad m = 2, 3, \ldots$$

Таким образом, мы показали, что функция $G_m(x, t)$, определяемая этой формулой, выражается также через определитель (6).

Формулу (8) в этом случае можно записать в виде

$$G(x, x) = \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^{2m}} - \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\cos 2kx}{k^{2m}} \tag{32}$$

С другой стороны, известно, что

$$B_{2m}\left(\frac{x}{\pi}\right) = (-1)^{m-1}\frac{2(2m)!}{(2\pi)^{2m}}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\cos 2kx}{k^{2m}}, \quad m = 1, 2, \ldots, \ 0 \leqslant x \leqslant \pi,$$

и, в частности,

$$B_{2m} = (-1)^{m-1}\frac{2(2m)!}{(2\pi)^{2m}}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^{2m}}$$

(см., например, [7], п. 23, формула (23.1.18), или [5], гл. 5, п. 5.4.2, формула (7)). Сравнение равенства (32) и этих формул позволяет заключить, что

$$G(x, x) = (-1)^m\frac{(2\pi)^{2m-1}}{(2m)!}\left(B_{2m}\left(\frac{x}{\pi}\right) - B_{2m}\right). \tag{33}$$

Используя равенство (33) и определение полилогарифмической функции $\mathrm{Li}_j(z)$, докажем, что справедливо следующее следствие теоремы 2.

Следствие 3. *При* $z\in[-1,1]$ *справедливо тождество*

$$\operatorname{Li}_{2m+1}(z)=(-1)^{m+1}\frac{(2\pi)^{2m+1}}{(2m+1)!}\int_0^1 B_{2m+1}(x)\,\frac{z\sin 2\pi x}{1-2z\cos 2\pi x+z^2}\,dx, \tag{34}$$

а при $z\in(-1,1]$ — *тождество*

$$\operatorname{Li}_{2m}(z)=(-1)^{m+1}\frac{(2\pi)^{2m}}{(2m)!}\int_0^1 (B_{2m}(x)-B_{2m})\,\frac{z(\cos 2\pi x-z)}{1-2z\cos 2\pi x+z^2}\,dx. \tag{35}$$

Доказательство. В рассматриваемом случае левые части равенств (15) и (16), очевидно, равны $\operatorname{Li}_{2m+1}(z)$ и $\operatorname{Li}_{2m}(z)$, а правые приобретают вид

$$(-1)^m\frac{(2\pi)^{2m}}{2(2m)!}\int_0^1 (B_{2m}(x)-B_{2m})\ln(1-2z\cos 2\pi x+z^2)\,dx$$

и

$$(-1)^{m+1}\frac{(2\pi)^{2m}}{(2m)!}\int_0^1 (B_{2m}(x)-B_{2m})\,\frac{z(\cos 2\pi x-z)}{1-2z\cos 2\pi x+z^2}\,dx$$

соответственно, т. е. равенство (35) справедливо. Далее, интегрируя по частям в первом из этих интегралов с учётом равенств

$$\int_0^\pi \ln(1-2z\cos 2x+z^2)\,dx=0 \tag{36}$$

(см., например, [5], гл. 2, п. 2.6.36, формула (14)) и

$$B'_{2m+1}(x)=(2m+1)B_{2m}(x),\quad B_{2m+1}(0)=-B_{2m+1}(1)=B_{2m+1}=0$$

(см., например, [7], п. 23, формулы (23.1.5), (23.1.19) и (23.1.20)), находим, что равенство (34) также справедливо. Итак, следствие 3 доказано. □

Отметим, что при $z\in(-1,1)$ справедливость следствия 3 была установлена ранее в работе [8].

Далее, сравнение формулы (14) и разложения многочлена Эйлера

$$E_{2m-1}\Big(\frac{x}{\pi}+\frac{1}{2}\Big),\quad m=1,2,\ldots,$$

в ряд Фурье, т. е. разложения

$$E_{2m-1}\Big(\frac{x}{\pi}+\frac{1}{2}\Big)=(-1)^{m-1}\frac{4(2m-1)!}{\pi^{2m}}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}\sin(2k-1)x}{(2k-1)^{2m}},\quad -\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$$

(см., например, [5], гл. 5, п. 5.4.6, формула (4)), позволяет заключить, что

$$G\Big(x,\frac{\pi}{2}\Big)=(-1)^{m-1}\frac{(\pi)^{2m-1}}{2(2m-1)!}E_{2m-1}\Big(\frac{x}{\pi}+\frac{1}{2}\Big). \tag{37}$$

Из этого тождества следует, что справедливо следующее следствие теоремы 3.

Следствие 4. *При* $z \in [-1, 1]$ *справедливы тождества*

$$\mathrm{Ti}_{2m+1}(z) = \frac{(-1)^m \pi^{2m}}{2(2m-1)!} \int\limits_0^{1/2} E_{2m-1}(x) \operatorname{arctg} \frac{2z \cos \pi x}{1-z^2}\, dx \tag{38}$$

и

$$\mathrm{Ti}_{2m}(z) = \frac{(-1)^m \pi^{2m}}{(2m-1)!} \int\limits_0^{1/2} E_{2m-1}(x) \frac{(z^3+z)\cos \pi x}{1+2z^2 \cos 2\pi x + z^4}\, dx. \tag{39}$$

Доказательство. В рассматриваемом случае левая часть равенства (19), очевидно, равна $\mathrm{Ti}_{2m+1}(z)$, а правую, используя равенство (37), преобразуем следующим образом:

$$\int\limits_0^{\pi/2} G\Big(x, \frac{\pi}{2}\Big) \operatorname{arctg} \frac{2z \sin x}{1-z^2}\, dx = \frac{(-1)^{m-1}\pi^{2m}}{2(2m-1)!} \int\limits_0^{1/2} E_{2m-1}\Big(x+\frac{1}{2}\Big) \operatorname{arctg} \frac{2z \sin \pi x}{1-z^2}\, dx =$$

$$= \frac{(-1)^m \pi^{2m}}{2(2m-1)!} \int\limits_0^{1/2} E_{2m-1}(x) \operatorname{arctg} \frac{2z \cos \pi x}{1-z^2}\, dx,$$

т. е. справедливо тождество (38).

Аналогичными рассуждениями устанавливается справедливость тождества (39). Следствие 4 доказано. $\square$

Отметим, что справедливость формул (38) и (39) следует, очевидно, также из формул (28) и (29) теоремы 4 (см. [3]).

Замечание. При доказательстве следствий 3 и 4 использованы связи между многочленами Бернулли $B_{2m}(x/\pi)$ и функцией Грина $G_m(x,t)$ при $0 \leqslant x \leqslant \pi$ и $t = x$ (см. формулу (33)) и между многочленами Эйлера $E_{2m-1}(x/\pi + 1/2)$ и функцией Грина $G_m(x,t)$ при $0 \leqslant x \leqslant \pi/2$ и $t = \pi/2$ (см. формулу (37)) соответственно. Таким образом, многочлены Бернулли $B_{2m}(x/\pi)$ и Эйлера $E_{2m-1}(x/\pi + 1/2)$ линейно выражаются через $G_m(x,x)$ и $G_m(x, \pi/2)$.

Несложно показать, что формула (35) при $z = 1$ совпадает с классической формулой Эйлера для значений ζ-функции Римана в точках вида $2m$, где $m = 1, 2, \ldots$, т. е.

$$\zeta(2m) = (-1)^m \frac{(2\pi)^{2m}}{2(2m)!} B_{2m} \tag{40}$$

(см. [7], гл. 23, формула (23.2.16)), а формула (34) при $z = 1$ и $z = -1$ и формула (21) при $z = 1$ совпадают с известными формулами для значений ζ-функции Римана в точках вида $2m+1$, где $m = 1, 2, \ldots$, т. е.

$$\zeta(2m+1) = \frac{(-1)^{m+1}(2\pi)^{2m+1}}{2(2m+1)!} \int\limits_0^1 B_{2m+1}(x) \operatorname{ctg} \pi x\, dx \tag{41}$$

(см. [7], гл. 23, формула (23.2.17)),

$$\zeta(2m+1) = \frac{(-1)^{m-1}(2\pi)^{2m+1}}{2(1-2^{-2m})(2m+1)!} \int_0^1 B_{2m+1}(x) \operatorname{tg} \pi x \, dx \tag{42}$$

и

$$\zeta(2m+1) = \frac{(-1)^{m}(\pi)^{2m+1}}{4(1-2^{-2m-1})(2m)!} \int_0^1 \frac{E_{2m}(x)}{\sin \pi x} \, dx \tag{43}$$

(см. [9], теорема 1).

Кроме того, формулы (38) и (39) при $z=1$ совпадают с классическими формулами

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)^{2m+1}} = (-1)^m \frac{(\pi/2)^{2m+1}}{2(2m)!} E_{2m}, \quad m = 0, 1, \ldots,$$

и

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)^{2m}} = \frac{(-1)^m (\pi)^{2m}}{4(2m-1)!} \int_0^1 \frac{E_{2m-1}(x)}{\cos \pi x} \, dx, \quad m = 1, 2, \ldots$$

(см. [7], Ch. 23, формулы (23.2.22) и (23.2.23)).

Таким образом, перечисленные выше классические формулы являются частными случаями следствий 1, 2 и теорем 2, 3 для многочлена $p_m(x)=x^m$ в них и значений параметра $z=\pm1$. Следовательно, формулы (10)–(13) следствий 1, 2, формулы (15)–(16) теоремы 2 и формулы (19)–(21) теоремы 3 являются обобщениями классических формул на произвольный допустимый многочлен $p_m(x)$.

Кроме того, из следствия 3 (теоремы 2) и следствия 4 (теоремы 3) получаем, что ряды, стоящие в левых частях равенств (15)–(16) теоремы 2 и (19)–(20) теоремы 3 можно трактовать как обобщения полилогарифмических и ассоциированных с ними функций.

В заключение отметим, что доказательство с использованием функции $G_1(x,t)$ (см. выше) формулы Эйлера (40) при $m=1$, т. е. формулы

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots = \frac{\pi^2}{6},$$

содержится в книге Ф. Трикоми (см. [6], гл. III, § 3.10, формула (22)). Там же (см. упр. 16, с. 288) в качестве задачи предложено вычислить $\zeta(2m)$, используя функции $G_m(x,t)$, где $m=2,3,\ldots$

Формула (33) и следствие 3 приведены также в работе авторов [3], а формула (37) и следствие 4 (в несколько ином виде) — в кратком сообщении авторов [4].

§ 5. Случай многочлена $p_1(x)=x\pm a^2$. Производящие функции для некоторых специальных функций

В этом параграфе рассматривается случай $m=1$, т. е. $p_1(x)=x+b$. Случай $b=0$ мы уже подробно обсуждали в предыдущем параграфе. Здесь же сначала рассмотрим случай $b=-a^2$, т. е. $p_-(x)=x-a^2(=:p_1(x))$, где $0<a<1$. Хорошо известно, что в этом случае функция Грина $G_-(x,t)$ задачи Дирихле для оператора $p_-(S)$ имеет вид

$$G_-(x,t)=\begin{cases}\dfrac{\sin(at)\sin a(\pi-x)}{a\sin(a\pi)}, & t<x,\\[2mm] \dfrac{\sin(ax)\sin a(\pi-t)}{a\sin(a\pi)}, & t\geqslant x\end{cases}\tag{44}$$

(см., например, [10], гл. 3, табл. 3.3.1). Из этой формулы заключаем, что

$$G_-(x,x)=\frac{\sin(ax)\sin a(\pi-x)}{a\sin(a\pi)}.\tag{45}$$

Применяя теорему 2, находим, что справедливо следующее следствие из неё.

Следствие 5. *При* $z\in(-1,1)$ *справедливы равенства*

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{z^k}{k(k^2-a^2)}=\frac{\ln(1-z)}{a^2}+\frac{2z}{a^2\sin(a\pi)}\int_0^{\pi/2}\sin(2ax)\frac{\sin 2x}{1+2z\cos 2x+z^2}\,dx\tag{46}$$

и

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{z^k}{k^2-a^2}=\frac{2z}{a\sin(a\pi)}\int_0^{\pi/2}\cos(2ax)\frac{z+\cos 2x}{1+2z\cos 2x+z^2}\,dx.\tag{47}$$

Доказательство. Докажем справедливость равенства (46). Применяя теорему 2 (см. равенство (15) при $|z|<1$) с учётом равенств (36) и (45), получим, что справедлива формула

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{z^k}{k(k^2-a^2)}=\frac{1}{a\sin(a\pi)}\int_0^{\pi/2}\cos(2ax)\ln(1+2z\cos 2x+z^2)\,dx.$$

Далее интегрируя по частям в интеграле, стоящем в правой части этого равенства, приходим к справедливости формулы (46).

Теперь докажем справедливость равенства (47). Применяя ещё раз теорему 2 (см. равенство (16) при $|z|<1$) с учётом равенства (45), получим, что справедлива формула

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{z^k}{k^2-a^2}=\frac{4}{a\sin(a\pi)}\int_0^{\pi/2}\sin(ax)\sin a(\pi-x)\,\frac{z^2-z\cos 2x}{1-2z\cos 2x+z^2}\,dx.$$

Остаётся только учесть известное тождество

$$\int_0^{\pi/2} \frac{z-\cos 2x}{1-2z\cos 2x+z^2}\,dx = 0,$$

справедливость которого, в частности, следует из равенства (17). Следствие 5 доказано. □

Теперь докажем, что при $z=\pm 1$ равенство (15) теоремы 2 приводит к следующему следствию.

Следствие 6. *Справедливы равенства*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k^2-a^2)} = \frac{\ln 2}{a^2} + \frac{1}{a^2\sin(a\pi)} \int_0^{\pi/2} (\sin(2ax)-\sin(a\pi))\operatorname{tg} x\,dx \tag{48}$$

и

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k(k^2-a^2)} = \frac{\ln 2}{a^2} - \frac{1}{a^2\sin(a\pi)} \int_0^{\pi/2} \sin(2ax)\operatorname{ctg} x\,dx. \tag{49}$$

Доказательство. Применяя теорему 2 (см. равенство (15) при $z=1$) с учётом равенства (45) и интегрируя по частям, получаем, что равенство (48) справедливо. Если положить $z=-1$ в формуле (15), то аналогичные рассуждения приводят к справедливости равенства (49). Следствие 6 доказано. □

Отметим, что из следствия 6, в свою очередь, вытекает, что формула (46) остаётся справедливой и при $z=-1$.

Отметим также, что применение формулы (16) теоремы 2 в случае $z=1$ приводит к хорошо известному тождеству

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2-a^2} = \frac{1}{2a^2} - \frac{\pi\operatorname{ctg}(a\pi)}{2a} \tag{50}$$

(см., например, [5], гл. 5, п. 5.1.25, формула (4)), т. е. формула (47) справедлива и при $z=1$.

Из формулы (44) также следует, что при $x\in[0,\pi/2]$

$$G_-\left(x,\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sin(ax)}{2a\cos(a\pi/2)}. \tag{51}$$

Применяя далее теорему 3 с учётом этого равенства, заключаем, что справедливо следующее утверждение.

Следствие 7. *При* $z\in(-1,1)$ *справедливы равенства*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}z^{2k-1}}{(2k-1)((2k-1)^2-a^2)} + \frac{1}{2a^2}\operatorname{arctg}\frac{2z}{1-z^2} = \\ = \frac{z-z^3}{a^2\cos(a\pi/2)} \int_0^{\pi/2} \frac{\cos(ax)\cos x}{1-2z^2\cos 2x+z^4}\,dx, \tag{52}$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}z^{2k-1}}{(2k-1)^2-a^2}=\frac{z+z^3}{a\cos(a\pi/2)}\int_0^{\pi/2}\frac{\sin(ax)\sin x}{1-2z^2\cos 2x+z^4}\,dx, \tag{53}$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{z^{2k-1}}{(2k-1)((2k-1)^2-a^2)}+\frac{1}{2a^2}\ln\frac{1+z}{1-z}=\frac{z+z^3}{a^2\cos(a\pi/2)}\int_0^{\pi/2}\frac{\cos(ax)\cos x}{1+2z^2\cos 2x+z^4}\,dx \tag{54}$$

и

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{z^{2k-1}}{(2k-1)^2-a^2}=\frac{z-z^3}{a\cos(a\pi/2)}\int_0^{\pi/2}\frac{\sin(ax)\sin x}{1+2z^2\cos 2x+z^4}\,dx. \tag{55}$$

Доказательство. Справедливость равенств (52)–(55) устанавливается так же, как и справедливость равенств (46)–(47) следствия 5 с той лишь разницей, что вместо формулы (45) нужно использовать формулу (51), а вместо теоремы 2 — теорему 3. □

Отметим, что при $z=1$ (или $z=-1$) равенство (19) теоремы 3 приводит к известному тождеству

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)((2k-1)^2-a^2)}=\frac{\pi}{4a^2}\left(\frac{1}{\cos(a\pi/2)}-1\right) \tag{56}$$

(см., например, [5], гл. 5, п. 5.1.26, формула (11)).

Отметим также, что формулы (52) и (53) в несколько ином виде приведены и в работе авторов [4].

Теперь докажем, что справедливо следующее утверждение.

Следствие 8. *Справедливы равенства*

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)^2-a^2}=\frac{1}{2a\cos(a\pi/2)}\int_0^{\pi/2}\frac{\sin(ax)}{\sin x}\,dx \tag{57}$$

и

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(2k-1)((2k-1)^2-a^2)}=\frac{1}{2a^2\cos(a\pi/2)}\int_0^{\pi/2}\frac{\cos(ax)-\cos(a\pi/2)}{\cos x}\,dx. \tag{58}$$

Доказательство. Применяя равенство (20) теоремы 3 при $z=1$ (или $z=-1$) с учётом равенства (51), получим, что равенство (57) справедливо. Полагая далее в рассматриваемом случае $z=1$ (или $z=-1$) в формуле (21) и интегрируя по частям, придём к справедливости равенства (58). Следствие 8 доказано. □

Отметим, что из следствия 8, в свою очередь, вытекает, что формула (53) остаётся справедливой и при $z=\pm1$.

Сумму ряда, стоящего в левой части (22), при $z=\pm1$ (с учётом равенства (51)) можно вычислить, используя равенство (12) следствия 2, а именно, справедливо тождество

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k-1)^2-a^2} = \frac{\pi \operatorname{tg}(a\pi/2)}{4a} \tag{59}$$

(см., например, [5], гл. 5, п. 5.1.26, формула (1)).

Замечание 1. При $-1<z<1$ левые части равенств (46) и (47) являются производящими функциями для полилогарифмов $\mathrm{Li}_{2m+1}(z)$ и $\mathrm{Li}_{2m}(z)$, а ряды, стоящие в левых частях равенств (52) и (53), — производящими функциями для $\mathrm{Ti}_{2m+1}(z)$ и $\mathrm{Ti}_{2m}(z)$ соответственно. Таким образом, правые части равенств (46), (47), функция

$$-\frac{1}{2a^2} \operatorname{arctg} \frac{2z}{1-z^2} + \frac{z-z^3}{a^2\cos(a\pi/2)} \int_0^{\pi/2} \frac{\cos(ax)\cos x}{1-2z^2\cos 2x+z^4}\,dx$$

и правая часть равенства (53) являются производящими функциями для соответствующих специальных функций. Следовательно, разложение этих функций в ряды по степеням a приведёт к ещё одному доказательству равенств (34), (35), (38) и (39).

Замечание 2. Хорошо известно, что правые части равенств (50), (56) и (59) являются производящими функциями для сумм

$$\zeta(2m), \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)^{2m+1}} \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^{2m}} \quad (=(1-2^{-2m})\zeta(2m)),$$

а в следствиях 6 и 8 установлено, что этот список можно продолжить, а именно: правые части равенств (48), (49) и (58) являются производящими функциями для $\zeta(2m+1)$ (см. формулы (41), (42) и (43) соответственно), а правая часть равенства (57) является производящей функцией для суммы

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)^{2m}}.$$

Пусть, как и раньше, $0<a<1$, но теперь $p_+(x)=x+a^2$. Тогда имеем при $0\leqslant x, t\leqslant \pi$

$$G_+(x,t) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sh}(at)\operatorname{sh} a(\pi-x)}{a\operatorname{sh}(a\pi)}, & t<x, \\[2ex] \dfrac{\operatorname{sh}(ax)\operatorname{sh} a(\pi-t)}{a\operatorname{sh}(a\pi)}, & t\geqslant x \end{cases}$$

(см., например, [10], гл. 3, табл. 3.3.1), т. е. функция $G_+(x,t)$ получается из соответствующих функций $G_-(x,t)$ заменой a на ai. Исходя из этого можно доказать, что все утверждения следствий 5–8 остаются справедливыми и в этом случае с той лишь только разницей, что всюду a надо заменить на ai. Однако формулы, которые при этом получаются, мы здесь перечислять не будем, ограничимся лишь аналогом равенства (57), а именно

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)^2+a^2} = \frac{1}{2a\,\mathrm{ch}(a\pi/2)} \int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{sh}(ax)}{\sin x}\,dx.$$

Теперь докажем, что справедлива следующая теорема.

Теорема 5. *При* $0<a<1$ *для дигамма-функции Эйлера* $\psi(a)$ *справедливо тождество* (γ — *постоянная Эйлера*)

$$\psi(a) = -\gamma-\ln 2-\frac{1}{2a}-\frac{\pi}{2}\,\mathrm{ctg}(a\pi)-\frac{1}{\sin(a\pi)}\int_0^{\pi/2}(\sin(2ax)-\sin(a\pi))\,\mathrm{tg}\,x\,dx.$$

Доказательство. Напомним, что дигамма-функция Эйлера определяется как логарифмическая производная Г-функции Эйлера, и хорошо известно, что для неё справедливо тождество

$$\psi(a) = -\gamma+\sum_{k=0}^{+\infty}\Big(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+a}\Big)$$

(см., например, [5], приложение II.2). Из этого представления дигамма-функции следует известная формула

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k(k^2-a^2)} = -\frac{1}{2a^2}\big(\psi(1+a)+\psi(1-a)+2\gamma\big)$$

(см., например, [5], гл. 5, п. 5.1.24 формула (6)). Приравнивая правые части этой формулы и формулы (48) следствия 6, получим

$$\psi(1+a)+\psi(1-a) = -2\gamma-2\ln 2-\frac{2}{\sin(a\pi)}\int_0^{\pi/2}(\sin(2ax)-\sin(a\pi))\,\mathrm{tg}\,x\,dx.$$

Известно также, что

$$\psi(1+a)-\psi(1-a) = \frac{1}{a}-\pi\,\mathrm{ctg}(a\pi)$$

(см., например, [5], приложение II.2). Далее, складывая две последние формулы и учитывая равенство $\psi(1+a)=\psi(a)+1/a$ (см., например, [5], приложение II.2), приходим к справедливости утверждения теоремы 5. □

Теперь докажем справедливость следующего следствия теоремы 5.

Следствие 9. *При* $0<a<1$ *справедливо равенство*

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k+a} = \frac{1}{2a(a+1)}+\frac{\pi}{2\sin(a\pi)}+\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\Big(\frac{\sin(ax)}{\sin(a\pi/2)}-\frac{\sin(a+1)x}{\cos(a\pi/2)}\Big)\,\mathrm{tg}\,x\,dx.$$

Доказательство. Как известно,

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k+a} = \frac{1}{2}\Big(\psi\Big(\frac{a+1}{2}\Big)-\psi\Big(\frac{a}{2}\Big)\Big)$$

(см., например, [5], приложение II.3). Применяя далее формулу для дигамма-функции $\psi(a)$ из теоремы 5, приходим к справедливости утверждения следствия 9. $\square$

Учитывая формулу Эйлера

$$\frac{\pi}{\sin(a\pi)} = \frac{1}{a} + \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \Big(\frac{1}{k+a} - \frac{1}{k-a}\Big),$$

полученное равенство можно преобразовать к виду

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k-1} \frac{k}{k^2-a^2} = \frac{1}{2(a+1)} - \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \Big(\frac{\sin(ax)}{\sin(a\pi/2)} - \frac{\sin(a+1)x}{\cos(a\pi/2)}\Big) \operatorname{tg} x \, dx.$$

Таким образом, мы получили, очевидно, ещё одну производящую функцию для чисел $\zeta(2m+1)$ (см. замечание 2 на с. 175).

Замечание. Отметим, что часть результатов этого параграфа можно распространить и на случай, когда числа a и z принадлежат комплексной плоскости за исключением некоторых множеств на ней (см. замечание на с. 167).

Список литературы

[1] *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматлит, 1963.
[2] *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1976.
[3] *Мирзоев К. А., Сафонова Т. А.* Функция Грина обыкновенных дифференциальных операторов и интегральное представление сумм некоторых степенных рядов // Доклады РАН. 2018. Т. 482, № 5. С. 500–503.
[4] *Мирзоев К. А., Сафонова Т. А.* Об интегральном представлении сумм некоторых степенных рядов // Матем. заметки. 2019. Т. 106, вып. 3. С. 470–475.
[5] *Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И.* Интегралы и ряды: В 3 т. Т. 1. Элементарные функции М.: Физматлит, 2002.
[6] *Трикоми Ф.* Интегральные уравнения. М.: ИИЛ, 1960.
[7] *Abramowitz M., Stegun I. A.* Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables. New York: Dover, 1972.
[8] *Cvijović D.* New integral representations of the polylogarithm function // Proc. R. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci. 2007. Vol. 463, № 2080. P. 897–905.
[9] *Cvijović D., Klinowski J.* Integral representations of the Riemann zeta function for odd-integer arguments // J. Comput. Appl. Math. 2002. Vol. 142, № 2. P. 435–439.
[10] *Duffy Dean G.* Green's functions with applications. CRC Press, 2001. (Studies in Advanced Math.).
[11] *Lewin L.* Polylogarithms and associated functions. New York. Oxford: Elsevier Science Ltd, 1981.

Представлено в редакцию 15.04.2019

Карахан Агахан оглы Мирзоев
МГУ им. М. В. Ломоносова,
механико-математический факультет
E-mail: mirzoev.karahan@mail.ru

Татьяна Анатольевна Сафонова
Архангельск, Северный (Арктический)
федеральный университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: t.Safonova@narfu.ru