Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 314, 2004 г.

Н. В. Бударина

ДЕФОРМАЦИИ ДИОФАНТОВЫХ СИСТЕМ ДЛЯ КВАДРАТИЧНЫХ ФОРМ РЕШЕТОК КОРНЕЙ A_n

Теория склейки, представляющая собой способ конструирования решетки $L = L_1 \overset{[y]}{\oplus} L_2$ из решеток L_1, L_2 добавлением фактора склейки $y = y_1 + y_2$, где y_i выбираются из фактор-множества дуальных векторов L_i^*/L_i, восходит к Кнезеру [1] и Витту [2]. Локальный вариант метода склейки применен в работах В. Г. Журавлева [3, 4] к нахождению числа решений матричных уравнений $Q[X] = {}^tXQX = A$ для положительно определенных квадратичных форм Q и A.

Конвей и Слоэн [5] применили метод дополнения для конструирования квадратичных форм меньших размерностей из известных форм, который является обращением метода склейки Витта–Кнезера. В работах Журавлева [6] и автора [7, 8] разработан метод деформации диофантовых квадратичных систем, позволяющий получать не только сечения матричных квадратичных уравнений $Q[X] = A$ для квадратичных форм Q кубических решеток $\mathbb{Z}^n$, но и формулы для числа представлений форм соответствующими сечениями.

В настоящей статье показано, что метод деформации является общим и применяется к n-мерной решетке корней с нулевой суммой A_n, представляющую собой четную подрешетку решетки $\mathbb{Z}^{n+1}$: $A_n = \{x \in \mathbb{Z}^{n+1} : x_0 + x_1 + \ldots + x_n = 0\}$.

Исследуются деформации матричных квадратичных уравнений

$$Q_{A_n}[T] = {}^tTQ_{A_n}T = A, \quad \text{где} \quad T \in M_{n,m}(\mathbb{Z}), \tag{1}$$

специализациями квадратичных форм A. Используя метод ортогонального дополнения в решетках $\mathbb{Z}^{n+1}$ к вектору ${}_{n+1}1 = (1 \ldots 1)$ для получения форм Q_{A_n} подрешеток A_n, преобразуем матрич-

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант No. 02-01-00368.

ное уравнение (1) в систему

$$\begin{cases} Q_{\mathbb{Z}^{n+1}}[X] = A, \\ {}_{n+1}1 Q_{\mathbb{Z}^{n+1}} X = 0, \end{cases} \qquad (2)$$

где $Q_{\mathbb{Z}^{n+1}}$ – единичная матрица порядка $n+1$.

Однородные специализации форм $A = A' \oplus A''$ трансформируют систему (2) в системы того же вида

$$\begin{cases} Q_{K'}[Y] = A'', \\ {}_{n+1}1 M_{K'} Y = 0 \end{cases} \qquad (3)$$

и преобразуют левую часть формулы для числа целых решений $r(A; Q_{A_n})$ уравнения (1) (см. [9])

$$r(A; Q_{A_n}) = o(Q_{A_n}) \operatorname{std}(n-m) \alpha_2(A; Q_{A_n}) \prod_{p \mid |A|,\ p \neq 2} \alpha_p(A; Q_{A_n}) \qquad (4)$$

к виду

$$r(A; Q_{A_n}) = o(Q_{A_n}) \sum_{\langle X' \rangle} \frac{r(A''; Q_{K'})}{\operatorname{stab}(X'; {}_{n+1}1)}, \qquad (5)$$

где $r(A''; Q_{K'})$ – число целых решений системы (3) и $o(Q_{A_n})$ обозначает порядок группы целых автоморфизмов формы Q_{A_n}. Здесь $M_{K'}$ – порождающая матрица решетки, ортогональной некоторой орбите $\langle X' \rangle$, которую образуют представления $X' : Q_{A_n}[X'] = A'$, удовлетворяющие условию ${}_{n+1}1 Q_{\mathbb{Z}^{n+1}} X' = 0$. Функция $\operatorname{std}(n-m)$ зависит только от разности размерностей $n-m$ [9], и все локальные множители $\alpha_p(A; Q_{A_n})$ в правой части (4) явно вычисляются.

Суть метода деформации поясним на примере из п. 2, выбирая тернарную форму A бесквадратного определителя и

$$Q_{A_4} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Вкладывая решетку A_4 в решетку $\mathbb{Z}^5$, преобразуем матричное уравнение (1) в систему

$$\begin{cases} Q_{\mathbb{Z}^5}[X] = A, \\ {}_5 1 Q_{\mathbb{Z}^5} X = 0. \end{cases} \qquad (6)$$

Специализацией возьмем форму $A = A' \oplus A''$ с блоком $A' = 2$. Множество решений $X' \in M_{5,1}(\mathbb{Z})$ системы

$$\begin{cases} Q_{\mathbb{Z}^5}[X'] = 2, \\ {}_5 1 Q_{\mathbb{Z}^5} X' = 0 \end{cases} \tag{7}$$

имеет одну орбиту $\langle X' \rangle$ с представителем ${}^t X' = (1\ -1\ 0\ 0\ 0)$. Ортогональное дополнение к X' – форма с матрицей Грама $Q_{K'} = 1_3 \oplus 2$. Учитывая равенство (4), преобразуем формулу (5) к виду

$$r(A''; Q_{K'}) = 3\left(1 - \left(\frac{|A''|}{5}\right)\right) \prod_{p\,|\,|A''|,\ p\neq 2,5} \left(1 + \epsilon_1(A'')\left(\frac{-10}{p}\right)\right). \tag{8}$$

Здесь $r(A''; Q_{K'})$ – число целых решений системы диофантовых уравнений

$$\begin{cases} y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + 2y_4^2 = a_1, \\ y_5^2 + y_6^2 + y_7^2 + 2y_8^2 = a_3, \\ y_1 y_5 + y_2 y_6 + y_3 y_7 + 2y_4 y_8 = a_2, \\ y_1 + y_2 + y_3 + 2y_4 = 0, \\ y_5 + y_6 + y_7 + 2y_8 = 0 \end{cases} \tag{9}$$

являющейся координатной записью системы (3), полученной в результате деформации уравнения (1).

1. Как обычно, под решеткой L понимается свободный $\mathbb{Z}$-модуль конечного ранга с невырожденной симметрической билинейной формой $(\cdot,\cdot)_L$, принимающей целые значения. Если для решетки L выбрать базис $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$, то $Q_L = ((e_i, e_j)_L)_{n\times n}$ – ее матрица Грама, которая является целой и невырожденной. Если матрица Q_L положительно определена, то решетка L также называется положительно определенной. Фиксируя базис, можем отождествить L с решеткой $\mathbb{Z}^n = M_{n,1}(\mathbb{Z})$, для которой $(x,y)_L = {}^t x Q_L y$ $(x, y \in \mathbb{Z}^n)$. Пусть $M = \mathbb{Z}^m$ – другая решетка размерности $m \leqslant n$ с формой $(x', y')_M = {}^t x' Q_M y'$. Вложение решетки $\iota : M \hookrightarrow L$ – это вложение $\mathbb{Z}$-модуля M в L с условием $(x', y')_M = (\iota(x'), \iota(y'))_L$. Из определения следует, что $\iota(x') = X \cdot x'$ для $X \in M_{n,m}(\mathbb{Z})$ и при этом

$$Q_L[X] = Q_M. \tag{10}$$

Обратно, любое целое решение X уравнения (10) задает вложение. Если решетка L положительно определенная, то M также положительно определенная, число $r(M;L)$ всех вложений ι конечно и равно числу решений $r(Q_M;Q_L)$ матричного уравнения (10):

$$r(M;L) = r(Q_M;Q_L). \tag{11}$$

Рассмотрим представления

$$Q_{A_n}[T] = {}^tTQ_{A_n}T = A, \quad \text{где} \quad T \in M_{n,m}(\mathbb{Z}), \tag{12}$$

квадратичных форм A размерности m формами $Q_{A_n}={}^tM_{A_n}M_{A_n}$ решеток корней A_n с порождающей матрицей ${}^tM_{A_n}=\begin{pmatrix} -1 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Методом ортогонального дополнения в решетках $\mathbb{Z}^{n+1}$ получим формы Q_{A_n} подрешеток A_n, для которых при $n \leqslant 7$ род $[Q_{A_n}]$ состоит из одного класса. В этом случае матричное уравнение (12) преобразуется в систему

$$\begin{cases} Q_{\mathbb{Z}^{n+1}}[X] = A, \\ {}_{n+1}1Q_{\mathbb{Z}^{n+1}}X = 0, \end{cases} \tag{13}$$

где ${}_{n+1}1$ – строка, состоящая из $n+1$ единиц.

Выберем однородную специализацию формы $A = \begin{pmatrix} A' & 0 \\ 0 & A'' \end{pmatrix}$, равную прямой сумме форм A' и A'', и пусть матрица $X = (X'X'')$ разбита на блоки соответствующим образом. Тогда система (13) принимает вид

$$\begin{cases} Q_{\mathbb{Z}^{n+1}}[X'] = A', \\ {}_{n+1}1Q_{\mathbb{Z}^{n+1}}X' = 0, \\ ----------- \\ {}^tX'Q_{\mathbb{Z}^{n+1}}X'' = 0, \\ Q_{\mathbb{Z}^{n+1}}[X''] = A'', \\ ----------- \\ {}_{n+1}1Q_{\mathbb{Z}^{n+1}}X'' = 0. \end{cases} \tag{14}$$

Решения X' подсистемы (14.1)–(14.2) образуют орбиты $\langle X_i' \rangle$ относительно группы автоморфизмов $O(Q_{\mathbb{Z}^{n+1}})$ над кольцом целых рациональных чисел $\mathbb{Z}$. Для каждой орбиты $\langle X_i' \rangle$ строим ортогональное дополнение $Q_{K_i'} = {}^tM_{K_i'}M_{K_i'}$, где $M_{K_i'}$ – порождающая матрица решетки, ортогональной $\langle X_i' \rangle$. Поскольку определители $|A'|$ и $|Q_{\mathbb{Z}^{n+1}}|$ взаимно простые, то дополнительные формы $Q_{K_i'}$ имеют определитель $|Q_{K_i'}| = |A'| \cdot |Q_{\mathbb{Z}^{n+1}}| = |A'|$.

Деформации матричных квадратичных уравнений $Q_{\mathbb{Z}^{n+1}}[X] = A$ однородными специализациями формы $A = A' \oplus A''$ переводят систему (13) в системы того же вида

$$\begin{cases} Q_{K_i'}[Y] = {}^tY{}^tM_{K_i'}M_{K_i'}Y = A'', \\ {}_{n+1}1M_{K_i'}Y = 0. \end{cases}. \tag{15}$$

Пусть определители форм Q, A' и A'' попарно взаимно простые и бесквадратные. Найдем взвешенное число целых решений $r(A''; Q_{K_i'})$ систем (15).

Используя метод деформации [8] диофантовых квадратичных систем в решетках $\mathbb{Z}^n$ ($n \leqslant 8$), получаем формулу

$$r(A; Q_{\mathbb{Z}^{n+1}}) = o(Q_{\mathbb{Z}^{n+1}}) \sum_{\{X'\}} \frac{r(A''; Q_{K''})}{\mathrm{stab}(X')} \tag{16}$$

для числа целых решений $r(A; Q_{\mathbb{Z}^{n+1}})$ уравнения (13.1), где X' пробегает представления $Q_{\mathbb{Z}^{n+1}}[X'] = A'$, $\{X'\}$ – соответствующая $O(Q_{\mathbb{Z}^{n+1}})$-орбита, $Q_{K''} \perp X'$. Здесь $o(Q_{\mathbb{Z}^{n+1}})$ и $\mathrm{stab}(X')$ обозначают порядки группы $O(Q_{\mathbb{Z}^{n+1}})$ и стабилизатора $\mathrm{Stab}(X')$. Стабилизатор $\mathrm{Stab}(X')$ состоит из автоморфизмов $M \in O(Q_{\mathbb{Z}^{n+1}})$, для которых $MX' = X'$. Группа автоморфизмов $O(Q_{\mathbb{Z}^{n+1}})$ порождается $(n+1)!$ перестановками и 2^{n+1} переменами знаков координат. Это позволяет легко определять количество орбит представлений.

Учитывая линейное условие (13.1) и эквивалентность матричного уравнения (12) и системы (13), записываем

$$r(A; Q_{A_n}) = o(Q_{A_n}) \sum_{\langle X' \rangle} \frac{r(A''; Q_{K'})}{\mathrm{stab}(X'; {}_{n+1}1)}, \tag{17}$$

где $r(A; Q_{A_n})$ – количество представлений T (см. (12)), $o(Q_{A_n})$ – порядок группы $O(Q_{A_n})$, $\mathrm{stab}(X'; {}_{n+1}1)$ – порядок подгруппы тех $N \in \mathrm{Stab}(X')$, для которых ${}_{n+1}1N = \pm_{n+1}1$.

Ограничимся рассмотрением случая нечетной коразмерности $n - m$ и четного определителя $|A|$. Для числа представлений

$r(A; Q_{A_n})$ имеется общая формула [9]:

$$\frac{r(A; Q_{A_n})}{o(Q_{A_n})} = \tag{18}$$
$$= \mathrm{std}(n-m) 2^{c-\alpha(d)-n'/2} \prod_{q|d,\ q\neq 2} (q^{n'/2} + \delta_q) \prod_{p|\,|A|,\ p\neq 2} (p^{n'/2} + \epsilon_p),$$

где

$$\delta_q = \epsilon_1(Q_{A_n}) \left(\frac{(-1)^{n'/2}|A|}{q} \right), \quad \epsilon_p = \epsilon_1(A) \left(\frac{(-1)^{n'/2-1}d}{p} \right),$$

$d = |Q_{A_n}| = n+1$, $\alpha(d)$ – число нечетных простых делителей d, $n' = n - m - 1$, $c = -2$ для $n' = 0$ и $c = -1$ для $n' > 0$. Знак $\epsilon_1(A) = \left(\frac{A_1}{p}\right)$ определяется из жорданова разложения в прямую сумму над кольцом целых p-адических чисел $\mathbb{Z}_p$ [10]:

$$A \sim_{\mathbb{Z}_p} A_1 \oplus p^{\alpha} A_{p^{\alpha}}.$$

Отсюда следует

Теорема 1. *Пусть целые положительно определенные формы Q_{A_n}, где $n \leqslant 7$, и $A = A' \oplus A''$ имеют бесквадратные и взаимно простые определители. Кроме того, пусть $Q_{K'}$ – форма, ортогональная представлениям X', удовлетворяющим системе уравнений (14.1)–(14.2). Тогда взвешенное число решений $r(A''; Q_{K'})$ систем (15) равно*

$$\sum_{\langle X' \rangle} \frac{r(A''; Q_{K'})}{\mathrm{stab}(X'; {}_{n+1}1)} = \tag{19}$$
$$= \mathrm{std}(n-m) 2^{c-\alpha(d)-n'/2} \prod_{q|d,\ q\neq 2} (q^{n'/2} + \delta_q) \prod_{p|\,|A|,\ p\neq 2} (p^{n'/2} + \epsilon_p).$$

Если решения X' системы (14.1)–(14.2) образуют одну орбиту $\langle X' \rangle$ относительно группы автоморфизмов $O(Q_{\mathbb{Z}^{n+1}})$ над кольцом $\mathbb{Z}$, то полностью решается вопрос о числе решений деформированной системы (15).

2. Рассмотрим представления (12) тернарной формы A бесквадратного определителя $|A|$ кватернарной формой

$$Q_{A_4} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Существование вложения решетки A_4 в $\mathbb{Z}^5$ позволяет перейти от задачи (12) представления формами для решеток A_n к задаче (13) представления формами для решеток $\mathbb{Z}^n$, что дает возможность работать с автоморфизмами решеток $\mathbb{Z}^n$.

Начнем со специализации $A = A' \oplus A''$ с блоком $A' = 2$ и блоком A'' определителя $|A''|$, не делящегося на 2 и 5.

Решения X' системы

$$\begin{cases} Q_{\mathbb{Z}^5}[X'] = 2, \\ {}_51 Q_{\mathbb{Z}^5} X' = 0, \end{cases} \tag{20}$$

образуют одну орбиту $\langle X' \rangle$ с представителем ${}^tX' = (1\ {-1}\ 0\ 0\ 0)$ и $\mathrm{stab}(X'; {}_51) = 3!2 = 12$. Выбирая минимальный базис, находим порождающую матрицу $M_{K'} = \begin{pmatrix} 0&0&0&1 \\ 0&0&0&1 \\ 0&0&1&0 \\ 0&1&0&0 \\ 1&0&0&0 \end{pmatrix}$ подрешетки, ортогональной к X', и матрицу Грама $Q_{K'} = {}^tM_{K'_i} M_{K'_i} = 1_3 \oplus 2$. Ортогональное дополнение $Q_{K'}$ имеет определитель $|Q_{K'}| = 2$ и $Q_{K'}$ принадлежит нечетному роду $[Q_{K'_I}]$ с 2-символом $1^{+3}_{I,3} 2^{+1}_{I,1}$.

Левая часть формулы (19) включает представления только формой $Q_{K'}$, а правая часть преобразуется в соответствии с размерностями и p-адическими инвариантами форм A и Q_{A_4}[9]. Форма Q_{A_4} имеет p-адические символы $2_{Q_{A_4}} = 1^{-4}_{II,0}$, $5_{Q_{A_4}} = 1^{+3}5^{+1}$, $p_{Q_{A_4}} = 1^{\left(\frac{5}{p}\right)4}$ для $p \neq 2, 5$, и $\mathrm{std}(1) = 2$. Осталось найти знаки δ_5 и ϵ_p в формуле (19). Поскольку $A = 2 \oplus A''$, то $\epsilon_1(A) = \epsilon_1(A'') \left(\frac{2}{p}\right)$ для $p \neq 2$, $\epsilon_p = \epsilon_1(A'') \left(\frac{-10}{p}\right)$ для $p \neq 2, 5$ и $\delta_5 = \left(\frac{|A|}{5}\right) = \left(\frac{2}{5}\right) \left(\frac{|A''|}{5}\right) = -\left(\frac{|A''|}{5}\right)$. Отсюда вытекает

Предложение 1. *Для бесквадратного $|A''|$, не делящегося на 2 и 5, система*

$$\begin{cases} Q_{K'}[Y] = A'' = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 \end{pmatrix}, \\ {}_51 M_{K'} Y = 0, \end{cases} \tag{21}$$

равносильная системе диофантовых уравнений (9), *имеет число ре-*

шений $Y \in M_{4,2}(\mathbb{Z})$, *равное*

$$r(A''; Q_{K'}) = \\ = 3\left(1 - \left(\frac{|A''|}{5}\right)\right) \prod_{p\,|\,|A''|,\, p\neq 2,5} \left(1 + \epsilon_1(A'')\left(\frac{-10}{p}\right)\right). \quad (22)$$

Второй пример касается деформации уравнения (12) в решетке A_6 специализацией тернарной формы $A = A' \oplus A''$ с блоком $A' = 10$ и блоком A'' определителя $|A''|$, не делящегося на 2, 5 и 7. Здесь рассматривается случай существования нескольких орбит $\langle X_i' \rangle$ решений системы (14.1)–(14.2).

Строя ортогональное дополнение к вектору ${}_71$ в решетке $\mathbb{Z}^7$, получим квадратичную форму Q_{A_6} решетки A_6, тогда матричное уравнение (12) преобразуется в систему (13).

Множество решений X' системы уравнений (14.1)–(14.2) распадается на две орбиты с представителями ${}^tX_1' = (2\ {-2}\ 1\ {-1}\ 0\ 0\ 0)$ и ${}^tX_2' = (2\ {-1}\ {-1}\ {-1}\ {-1}\ 1\ 1)$, для которых $\mathrm{stab}(X_1'; {}_71) = 3!2 = 12$ и $\mathrm{stab}(X_2'; {}_71) = 2!4! = 48$. Подбирая минимальные базисы, находим порождающие матрицы решеток, ортогональных X_i':

$$M_{K_1'} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_{K_2'} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ортогональные дополнения

$$Q_{K_1'} = 1_3 \oplus \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad Q_{K_2'} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

имеют определитель $|Q_{K_1'}| = |Q_{K_2'}| = 10$ и принадлежат одному нечетному роду $[Q_{K_I'}]$ с p-символами $2_{Q_{K_I'}} = [1^{-5}2^{+1}]_{I,6}$, $5_{Q_{K_I'}} = 1^{+5}5^{+1}$. Форма $Q_{K_2'}$ не представляет единичную матрицу 1_3, значит, класс $\{Q_{K_1'}\}$ неэквивалентен классу $\{Q_{K_2'}\}$.

Левая часть формулы (19) редуцируется к представлениям двумя формами $Q_{K_1'}$ и $Q_{K_2'}$, правая часть преобразуется в соответствии с инвариантами форм A и Q_{A_6}. Форма Q_{A_6} имеет p-адические символы $2_{Q_{A_6}} = 1^{+6}_{II,0}$, $7_{Q_{A_6}} = 1^{-5}7^{-1}$, $p_{Q_{A_6}} = 1^{\left(\frac{7}{p}\right)6}$ для $p \neq 2, 7$, и $\mathrm{std}(3) = \frac{1}{6}$. Найдем далее знаки δ_7, ϵ_5 и ϵ_p в формуле (19). Поскольку форма $A = 10 \oplus A''$, то $\epsilon_1(A) = \epsilon_1(A'')\left(\frac{10}{p}\right)$ для $p \neq 2, 5$, $\epsilon_p = \epsilon_1(A)\left(\frac{7}{p}\right) = \epsilon_1(A'')\left(\frac{10}{p}\right)\left(\frac{7}{p}\right) = \epsilon_1(A'')\left(\frac{70}{p}\right)$ для $p \neq 2, 5, 7$, $\epsilon_5 = \epsilon_1(A)\left(\frac{7}{5}\right) = -\epsilon_1(A'') = -\left(\frac{|A''|}{5}\right)$ и $\delta_7 = \left(\frac{6}{7}\right)\left(\frac{-|A|}{7}\right) = \left(\frac{|A|}{7}\right) = -\left(\frac{|A''|}{7}\right)$. Отсюда следует

Предложение 2. *Для бесквадратного $|A''|$, не делящегося на 2, 5 и 7, взвешенное число решений $Y \in M_{6,2}(\mathbb{Z})$ систем*

$$\begin{cases} Q_{K_1'}[Y] = A'', \\ {}_7 1 M_{K_1'} Y = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} Q_{K_2'}[Y] = A'', \\ {}_7 1 M_{K_2'} Y = 0, \end{cases}$$

полученных в результате деформации уравнения (12) *в решетке* A_6 *специализацией формы* $A = A' \oplus A''$ *с блоком* $A' = 10$*, равно*

$$4r(A''; Q_{K_1'}) + r(A''; Q_{K_2'}) =$$
$$= \left(5 - \left(\frac{|A''|}{5}\right)\right)\left(7 - \left(\frac{|A''|}{7}\right)\right) \prod_{p \mid |A''|,\, p \neq 2,5,7} \left(p + \epsilon_1(A'')\left(\frac{70}{p}\right)\right).$$

Литература

1. M. Knezer, *Über die Ausnahme-Isomorphismem zwischen endlicken klassishen Gruppen,* ASUH **31** (1967), 136–140.
2. E. Witt, *Spiegelungsgruppen und Aufzählung halbeinfacher Liescher Ringe,* ASUH **14** (1941), 289–322.
3. В. Г. Журавлев, *Орбиты представлений чисел локальными квадратичными формами,* Тр. МИРАН **218** (1997), 151–164.
4. В. Г. Журавлев, *Примитивные вложения в локальные решетки простого определителя,* Алгебра и анализ **11**, No. 1 (1999), 87–117.
5. J. Conway, N. Sloan, *Quadratic forms of small determinant,* Proc. Roy. Soc. London A**418** (1988), 17–41.
6. В. Г. Журавлев, *Деформации диофантовых квадратичных систем,* Изв. РАН. Сер. мат. **65**, No. 6 (2001), 5–56.
7. Н. В. Бударина, *О числе решений неоднородных уравнений,* Чебышевский сборник **2** (2001), Тула, 19–30.

8. Н. В. Бударина, *Деформации диофантовых квадратичных систем для квадратичных форм кубических решеток,* Зап. научн. семин. ПОМИ. **286** (2002), 5–36.
9. В. Г. Журавлев, *Представление квадратичных форм родом квадратичных форм,* Алгебра и анализ **8**, No. 1 (1996), 21–112.
10. Дж. Касселс, *Рациональные квадратичные формы,* М., 1982.

Владимирский государственный
педагогический университет

Поступило 15 июля 2004 г.