

Общероссийский математический портал

В. П. Осипов, Ю. Г. Рыков, Б. Н. Четверушкин, Математические аспекты понятия влияния в концепции когнитивного моделирования, *Искусственный интеллект и принятие решений*, 2021, выпуск 2, 3–10

DOI: 10.14357/20718594210201

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.14.86

19 января 2025 г., 02:29:42



Математические аспекты понятия влияния в концепции когнитивного моделирования *

В. П. Осипов, Ю. Г. Рыков, Б. Н. Четверушкин

Федеральный исследовательский центр «Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН», Москва, Россия

Аннотация. Рассматриваются математические аспекты алгоритмов оценки влияния внешних факторов при когнитивном моделировании сложных систем. Системы представляются в виде ориентированных графов, вершинам и ребрам которых присваиваются веса. Традиционно влияние внешних факторов (входных вершин) на состояние (вес) элементов системы (внутренних вершин) вычисляются последовательно на множестве всех путей методом аддитивной свертки параметров входных вершин и соответствующих ребер. Для каждой внутренней вершины предлагается по-новому определять такое влияние как частную производную соответствующей графу функциональной зависимости. Приведены формулы расчета коэффициента влияния, учитывающие структуру графа, разбиения на циклы и пути между соответствующими вершинами. На примере простой когнитивной модели для оценки воздействия на население и производство некоей вирусной инфекции и мер противодействия ей приведено сравнение результатов применения предлагаемого метода и традиционного подхода. Описанное понятие влияния допустимо и для более сложных, нелинейных, формул, а также при использовании нечетких характеристик.

Ключевые слова: сложная система, когнитивное моделирование, взвешенный орграф, аддитивная свертка, разбиение графа на циклы, пути в графе.

DOI 10.14357/20718594210201

Введение

В настоящее время существенно увеличивается сложность задач управления в различных сферах человеческой деятельности. Практически все подсистемы общественного устройства превратились в так называемые «сложные системы» (СС). Растет уровень неопределенности в оценке обстановки, количество влияющих факторов и необходимость прогнозирования поведения системы в слабо структурированных ситуациях.

Широкое применение в России и за рубежом получили методы когнитивного моделирования [1-5], предназначенные для формализации, качественного анализа и интерпретации слабо структурированных систем и процессов, раз-

работки и оценки альтернатив управляющих решений. Структура современных когнитивных моделей (когнитивных карт) представляется в виде нечетких орграфов, вершины (концепты) которых представляют системные факторы (параметры, переменные), а дуги – отношения влияния (причинно-следственные отношения) между ними. Когнитивные модели строятся экспертами предметной области. Несмотря на определенную субъективность, сам процесс построения такой модели и последующий анализ в значительной мере помогают структурировать и наглядно представить ситуацию. Преимуществами когнитивных карт являются их простота и наглядность, адаптивность к усложнению системы и неопределенности исходных данных.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 20-04-60160_Вирусы.

✉ Осипов Владимир Петрович. E-mail: osipov@keldysh.ru

При практическом анализе ситуаций, опирающемся на модели когнитивных карт, решаются статические и динамические задачи. В рамках данной публикации нас будет интересовать только статический анализ когнитивных карт, как базис для формулировки характеристик состояний СС, которые могут достигаться в процессе динамической эволюции. Согласно [1] основу такого анализа составляет изучение структуры влияния одних факторов на другие. Математическим аппаратом анализа является теория знаковых и нечетких орграфов.

В статье иллюстрируется математически обоснованный метод расчета влияния концептов друг на друга на основе вычислительной процедуры получения весов (характеристик) вершин графа. Полученные формулы могут быть интерпретированы в терминах структурных элементов графа: разбиений графа на циклы и структуры множества всех путей, соединяющих пары вершин. Новым элементом в данной постановке является обнаружение важности циклических структур графа при определении понятия влияния. В дальнейшем предполагается изучение нелинейных вычислительных процедур, что обуславливает связь данной тематики с теорией нейронных сетей.

1. Общее представление об объекте

Будем представлять себе СС как совокупность множества системных факторов $A = \{A_j, j = 1, \dots, N\}$, которые мы будем называть «компонентами сложной системы» (КСС). КСС связаны между собой отношениями зависимости, которые представлены множеством E упорядоченных пар $e_{ij} \equiv (A_i, A_j)$. Совокупность (A, E) будем интерпретировать как орграф S . Элементам e_{ij} приписывается некоторая числовая величина $-1 \leq a_{ij} \leq 1$, характеризующая степень влияния КСС A_i на A_j (отметим, что, вообще говоря, условие $|a_{ij}| \leq 1$ можно и не соблюдать). Далее обозначим $V_{A_j} = \{i : e_{ij} \in E\}$ и поставим в соответствие каждой вершине графа S функцию $A_j = \Phi_j(\{A_k, a_{kj}\})$, $k \in V_{A_j}$, которая позволяет вычислить значение КСС A_j , если

известны значения тех КСС, от которых A_j зависит, и степени влияния этих зависимостей. Отметим, что в рамках описанной конструкции веса СС могут иметь и более сложную природу.

Введем строгие определения согласованности элементов СС и степени влияния КСС в СС. Пусть существуют такие $j = \omega_1, \dots, \omega_\Omega$, что $V_{A_j} = \emptyset$. Это означает, что КСС $A_{\omega_1}, \dots, A_{\omega_\Omega}$ являются входными параметрами, и значения других КСС, вообще говоря, могут быть выражены через значения этих входных КСС, то есть $A_j = F_j(A_{\omega_1}, \dots, A_{\omega_\Omega})$, $j \neq \omega_1, \dots, \omega_\Omega$.

Определение 1. СС является согласованной, если функции F_j определены для всех j .

Определение 2. Степенью влияния входного КСС с номером ω_k на КСС с номером j называется величина $|\partial F_j / \partial A_{\omega_k}|$.

2. Строгий анализ модели в случае использования линейных связей для расчета значений КСС

Будем предполагать, что для вычисления значений КСС используется операция аддитивной свертки. Пусть матрицей смежности S служит матрица $\{a_{ij}\}$, где a_{ij} являются весами ребер, идущих от КСС с номером i к КСС с номером j . Если $a_{ij} = 0$, то КСС в данную сторону не связаны. В соответствии с правилами аддитивной свертки характеристики вершин A_j вычисляются по формуле:

$$A_j = \sum_{i=1}^N a_{ij} A_i, j = 1, \dots, N \quad (1)$$

Пусть для $j = 1, \dots, n_1$ $a_{ij} = 0 \forall i$. То есть, КСС A_j , $j = 1, \dots, n_1$ являются входами, значения которых можно задать произвольно. Выделим эти КСС и, реорганизуя слагаемые, получим из (1):

$$\sum_{i=n_1+1}^N (\delta_{ij} - a_{ij}) A_i = \sum_{i=1}^{n_1} a_{ij} A_i, j = n_1 + 1, \dots, N, \quad (2)$$

где δ_{ij} – символ Кронекера.

Пусть $m \equiv N - n_1$. Выполняя при необходимости перенумерацию, обозначим

$$S = \{s_{ij} \equiv a_{ij}\}, \Lambda = \{\alpha_{ij} \equiv \delta_{ij} - s_{ij}\}, \quad i, j = 1, \dots, m;$$

$$R_j \equiv \sum_{i=1}^{n_j} a_{ij} A_i, \quad j = 1, \dots, m.$$

Тогда (2) можно переписать в виде:

$$\sum_{i=1}^m \alpha_{ij} A_i = R_j, \quad j = 1, \dots, m. \quad (3)$$

Отметим, что система (3), а значит и система (1), разрешима, если $\det \Lambda \neq 0$. То есть не нулевой $\det \Lambda$ определяет согласованность СС в соответствии с Определением 1. Далее всюду предполагается, что $\det \Lambda \neq 0$.

Определение 3. Одинарным циклом длины K назовем последовательность КСС $A_{i_k}, k = 1, \dots, K + 1$ с различными i_k при $k \neq K + 1$, $\{i_k\} \subset \{1, \dots, N\}$, такую что $a_{i_k i_{k+1}} \neq 0$, $k = 1, \dots, K$ и $i_{K+1} = i_1$.

Матрица Λ представляет собой матрицу смежности для орграфа \bar{S} , состоящего из КСС $\{A_i, i = 1, \dots, m\}$. Этот орграф состоит из тех КСС исходного графа S , которые не являются входными, и, кроме того, вследствие соотношений (2) значения $\alpha_{ii}, i = 1, \dots, m$, вообще говоря, не равны нулю, так что в \bar{S} к связям S добавлены соответствующие петли.

Определение 4. Разбиением множества $\{1, \dots, m\}$ на циклы по отношению к графу \bar{S} назовем такой набор множеств $I_l \subset \{1, \dots, m\}, l = 1, \dots, L$; $I_{l_1} \cap I_{l_2} = \emptyset, l_1 \neq l_2$; $\bigcup_{l=1}^L I_l = \{1, \dots, m\}$, что $\forall l \{A_i, i \in I_l\}$ является циклом. Каждое разбиение будем обозначать как $\{I_l\}$, а величина $L(\{I_l\})$ является количеством циклов в разбиении.

Набор всевозможных разбиений графа \bar{S} на циклы характеризует структуру рассматриваемой СС и далее будет использоваться для расчета показателей согласованности СС и степени влияния вершин.

Ниже приводится известный классический результат в форме Леммы 1, являющийся вспомогательным утверждением для основного результата работы – Теоремы 1. Приведенная формулировка Леммы 1 подчеркивает тот факт, что согласованность СС зависит от ее структуры. Подробное обсуждение доказательств Лем-

мы 1 и Теоремы 1 с акцентом на описание того, насколько указанные понятия линейной алгебры отражают структурные элементы СС, приведено в [6].

Лемма 1. Определитель $\det \Lambda$ можно вычислить следующим образом:

$$\det \Lambda = (-1)^m \sum_{\{I_l\}} (-1)^{L(\{I_l\})} \alpha_{1,i_1} \cdot \dots \cdot \alpha_{m,i_m}. \quad (4)$$

То есть каждый член в формуле представляет собой произведение элементов матрицы смежности графа \bar{S} , входящих в соответствующее разбиение \bar{S} на циклы с учетом знака.

Доказательство Леммы 1 основано на интерпретации формулы вычисления определителя с точки зрения разбиения перестановок на циклы.

Для вычисления параметров степени влияния решим систему (3) по формулам Крамера и проинтерпретируем результат в терминах структуры СС. То есть $A_i = \det \Lambda_i / \det \Lambda$, $i = 1, \dots, m$, где Λ_i представляет собой матрицу Λ , в которой строка i заменена вектором $\{R_j\}$.

Вектор $\{R_j\}$ содержит линейную комбинацию значений КСС, являющихся входными для исходного графа S . Обозначим их $\bar{A}_l, l = 1, \dots, n_1$, тогда можно записать, что

$$A_i = \frac{\det \Lambda_i}{\det \Lambda} = \sum_{l=1}^{n_1} \frac{F_{il}}{\det \Lambda} \bar{A}_l, \quad (5)$$

где F_{il} являются некоторыми коэффициентами, зависящими от значений $\{a_{ij}\}$. В соответствии с Определением 2 $|F_{il} / \det \Lambda|$ определяет степень влияния входного КСС \bar{A}_l на КСС A_i . Вследствие того, что $\det \Lambda$ входит в коэффициент влияния при всех i , при сравнении степени влияния его можно не учитывать. Поэтому займемся вычислением коэффициента F_{il} .

Определение 5. Весом пути от КСС A_i до КСС A_j в графе \bar{S} называется произведение весов всех ребер графа \bar{S} , входящих в путь. Если $i = j$, то получим вес одинарного цикла.

Для формулировки следующей теоремы, являющейся основным результатом статьи, рассмотрим граф \bar{S}_{i+} , отличающийся от \bar{S} тем, что элемент A_i связывается со всеми другими

КСС, если такой связи не было в графе \bar{S} . Значение веса новых ребер не важно. Пусть $\{I_q\}^{(i)}$ – совокупность разбиений на циклы по отношению к графу \bar{S}_{i+} , $L(\{I_q\}^{(i)})$ – количество циклов в соответствующем разбиении, $\{I_q\}^{(i)} = \{I_1^{(i)}, \dots, I_L^{(i)}\}$, где множества $I_1^{(i)}, \dots, I_L^{(i)}$ являются наборами индексов, образующих циклы в разбиении $\{I_q\}^{(i)}$.

Теорема 1. Справедлива формула

$$F_{il} = (-1)^m \sum_{\{I_q\}^{(i)}} (-1)^{L(\{I_q\}^{(i)})} \prod_{p,s \in I_1^{(i)}} \alpha_{ps} \cdot \dots \cdot \prod_{p,s \in I_{\kappa(i)}^{(i)}; p \neq i} \alpha_{ps} \cdot a_{is} \cdot \dots \cdot \prod_{p,s \in I_L^{(i)}} \alpha_{ps} \quad (6)$$

То есть в (6) для каждого разбиения на циклы графа \bar{S}_{i+} определяется цикл, содержащий КСС A_i , и величина α_{is} заменяется на величину a_{is} из матрицы $\{a_{ij}\}$.

Доказательство Теоремы 1 основано на использовании Леммы 1 для вычисления $\det \Lambda_i$ из (5) и вида вектора $\{R_j\}$.

Решение системы (2) можно формально записать для вектор-строк $\{A_j\}$ и $\{R_j\}$ в виде ряда для резольвенты:

$$\{A_j\} = \{R_j\} \cdot (E + S + S^2 + S^3 \dots). \quad (7)$$

Формула (7) описывает распространение влияния через все возможные пути, ведущие от входной вершины к какой-либо другой, например [7, 8]. Теорема 1 дает структурную интерпретацию выражения (7).

3. Пример расчета степени влияния

Рассмотрим простую когнитивную модель, иллюстрирующую, например, воздействие на население и производство распространения некоей вирусной инфекции и мер противодействия, в частности, карантинных (Рис. 1). Соответствующий граф S состоит из шести вершин: 1 – производство пункта А, 2 – производство пункта Б, 3 – население пункта А, 4 – население пункта Б, 5 – распространение вирусной инфекции, 6 – использование мер противодействия. Ненулевые элементы исходной матрицы смежности следующие:

$$a_{21}=0,6; a_{31}=0,4; a_{42}=1; a_{13}=0,6; a_{43}=0,2; a_{53}=0,2; a_{14}=0,6; a_{34}=0,1; a_{54}=0,2; a_{64}=0,1.$$

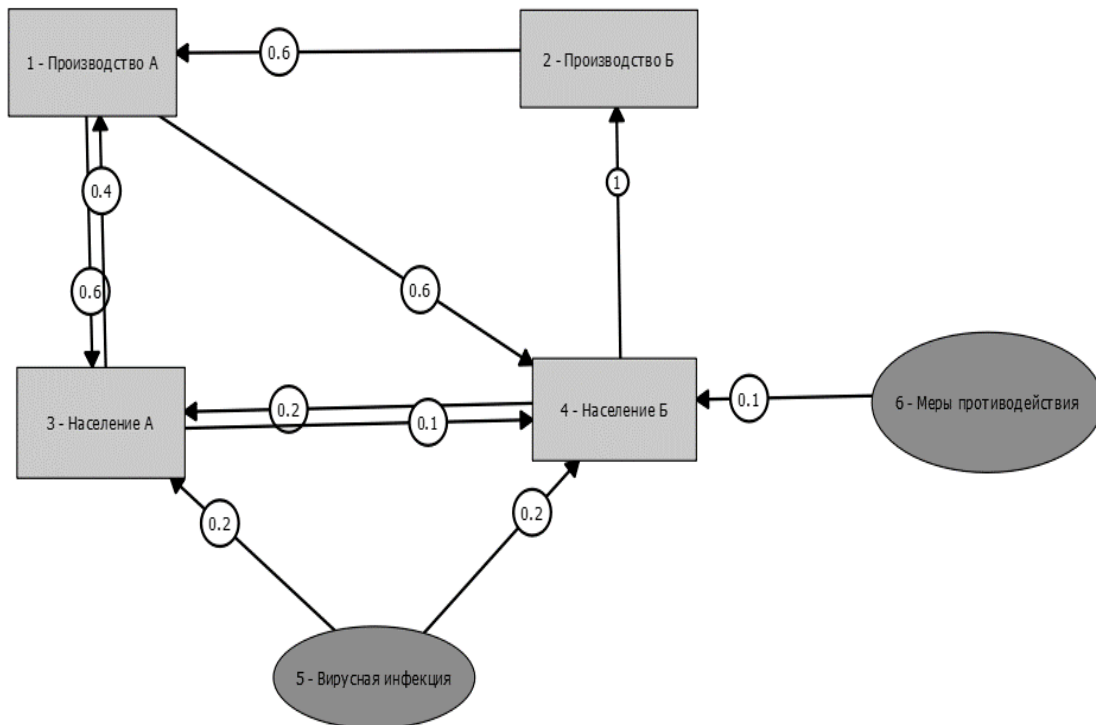


Рис. 1. Простая когнитивная модель

Ситуация, изображенная на Рис. 1, соответствует простейшим элементам производственного процесса, обеспечиваемого трудовыми ресурсами. При этом производство А направлено на товары народного потребления, а производство Б – на выпуск машин и оборудования. Вирусная инфекция, которая всегда присутствует в социотехнических системах, проявляется слабо, а меры противодействия имеют профилактический характер. Для иллюстрации отличий применения метода расчета по сумме весов и предлагаемого подхода дополнительно рассмотрим два случая:

I – влияние вируса усиливается, меры противодействия (остаются профилактическими) слабые;

II – усиление мер противодействия (вплоть до объявления карантина) и ограничение миграции населения.

В Табл. 1 приведено сравнение расчетов коэффициентов влияния входных вершин 5 и 6 на внутренние элементы системы для трех указанных случаев. Все значения нормированы на максимальную силу влияния в каждом случае. Для характеристики случаев I и II приведены только те значения силы связей, которые отличаются от показателей исходной матрицы смежности. В колонках слева расчет произведен по методике, изложенной в данной статье, в колонках справа – по формуле суммы весов путей, ведущих из вершин 5 или 6 в другую вершину.

Традиционная методика расчета силы влияния факторов, как суммы весов путей, ведущих от некоторого, например, внешнего фактора до рассматриваемого внутреннего элемента (фактора) системы, «выделяет» систему путей в виде дерева. Напомним, что соответствующие операции могут и не быть обычным сложением и умножением [1]. Нам представляется, что для сложных систем этого недостаточно.

Предлагаемая методика подсчета степени влияния рассматривает систему как совокупность набора состояний, каждое из которых представляет собой разбиение системы на набор взаимозависимых циклических структур [6]. При этом влияние фактора распространяется на все циклические структуры, что приводит к изменению характеристик влияния внешних факторов на внутренние элементы системы по сравнению с традиционной методикой.

Рассмотрим пример, представленный на Рис. 1, более подробно. Фактически здесь изображены две простейшие производственные системы «А» и «Б», которые состоят из производства и трудовых ресурсов. Производство «А» направлено на удовлетворение потребностей рабочих, занятых в секторах «А» и «Б», а производство «Б» обеспечивает средства производства для «А». Описанные отношения представлены соответствующими стрелками. Возникшая вирусная инфекция действует на рабочую силу обоих производств, а карантин-

Табл. 1. Пример расчета степени влияния

Метод, изложенный в статье			Традиционный метод по сумме весов путей		
Исходные данные (Рис. 1)					
	Вирусы	Карантин		Вирусы	Карантин
Производство А	0.950	0.283	Производство А	0.731	0.218
Производство Б	0.917	0.317	Производство Б	0.859	0.321
Население А	1.000	0.233	Население А	1.000	0.179
Население Б	0.917	0.317	Население Б	0.859	0.321
Случай I: $a_{13}=0,1; a_{53}=0,7; a_{14}=0,1; a_{54}=0,7$					
	5	6		5	6
Производство А	0.950	0.081	Производство А	0.905	0.077
Производство Б	0.917	0.114	Производство Б	0.905	0.113
Население А	1.000	0.031	Население А	1.000	0.029
Население Б	0.917	0.114	Население Б	0.905	0.113
Случай II: $a_{13}=0,4; a_{43}=0; a_{53}=0,6; a_{14}=0,1; a_{54}=0,4; a_{64}=0,4$					
	5	6		5	6
1- Производство А	0.782	0.364	1-Производство А	0.741	0.345
2 - Производство Б	0.636	0.509	2- Производство Б	0.695	0.575
3 - Население А	1.000	0.145	3- Население А	1.000	0.138
4 - Население Б	0.636	0.509	4- Население Б	0.695	0.575

ные меры – только на рабочую силу производства «Б».

Исходный вариант схемы отражает функционирование производственного процесса при начале распространения инфекции. Основными непосредственными связями, являются связи между трудовыми ресурсами и производствами активностей «А» и «Б» соответственно, а также поставки оборудования для производства «А». Важность связей выражена через их вес.

При традиционном расчете влияния фактора «Вирусная инфекция» наиболее сильное влияние оказывается на фактор «Население А», а следующее по силе влияние оказывается на фактор «Производство Б» и «Население Б», что с нашей точки зрения не совсем корректно, так как схема на Рис. 1 изначально была организована, как система взаимодействующих производств «А» и «Б». При расчете по предлагаемой методологии вторым по силе влияния фактора «Вирусная инфекция» оказывается фактор «Производство А».

При рассмотрении случая I резко усиливается воздействие фактора «Вирусная инфекция», а обеспечение потребностей рабочей силы понижается. В этой ситуации и традиционный, и предлагаемый расчет влияния фактора «Вирусная инфекция» дают наибольший уровень влияния на факторы, связанные с активностью «А». Однако при традиционном расчете «Вирусная инфекция» влияет одинаково на все факторы, кроме «Населения А», в то время как предлагаемая методология различает системы «А» и «Б».

В случае II предлагаемый метод показывает, что при примерно одинаковом влиянии «Вирусной инфекции» и «Мер противодействия» на кластер «Б» (что означает стабилизацию ситуации) ситуация с «Населением А» стала хуже, чем в базовом случае (меры противодействия стали меньше). Это означает, что необходимо непосредственно вводить меры противодействия и для кластера «А». В то же самое время традиционный расчет показывает, что ситуация с «Населением А» по сравнению с базовым случаем осталась практически неизменной, и выводы о необходимости введения специального карантина пока преждевременны. То есть использование разных методик расчета, вообще говоря, ведет к разным рекомендациям.

Таким образом, с нашей точки зрения, предлагаемый метод расчета влияния лучше отражает структурные особенности взаимодействия

внутренних элементов рассматриваемой системы, как совокупности различных циклических связей. При усложнении изучаемых систем различие результатов применения традиционной и предлагаемой схем расчетов будет возрастать, причем довольно существенно.

Заключение

Отличие метода расчета, изложенного в настоящей статье, от метода расчета по сумме весов путей заключается в том, что, если для данного пути существует цикл из вершин, не входящих в путь, то сила влияния дополнительно уменьшается на величину веса данного пути, умноженного на вес этого цикла [6]. Для нормированных величин, как это видно из Табл. 1, предложенный метод расчета может изменять оценку степени влияния входных факторов на другие.

Предлагаемое в работе определение понятия влияния достаточно общее и может быть применено в случае использования более сложных, нелинейных зависимостей влияния внешних и внутренних факторов, а также при использовании методов нечеткого описания процессов взаимодействия между ними.

Литература

1. Силов В.Б. Принятие стратегических решений в нечеткой обстановке. М.: ИНПРО-РЕС. 1995. 228 с.
2. Федулов А.С. Нечеткие реляционные когнитивные карты // Известия РАН. 2005. № 1. С. 120 – 133.
3. Робертс Ф. С. Дискретные модели с приложениями к социальным, биологическим и экологическим задачам. М.: Наука. 1986. 497 с.
4. Kosko B. Fuzzy cognitive maps // Int. J. Man-Mach. Studies. 1986. V. 24. P. 65 – 75.
5. Papageorgiou E. I. Fuzzy cognitive maps for applied sciences and engineering // Intell. Syst. Ref. Library. 2014. V. 54. 411 p.
6. Osipov V. P., Rykov Yu. G. On mathematical aspects of analyzing the structure of complex systems using weighted digraphs. Lobachevskii Journal of Mathematics. 2020. V. 41. № 11. P. 2231-2238.
7. Четверушкин Б.Н., Судаков В.А. Факторная модель для исследования сложных процессов // ДАН. 2019. Т. 489. № 1. С. 17 – 21.
8. Четверушкин Б.Н., Судаков В.А. Факторное моделирование для инновационно-активных предприятий // Математическое моделирование. 2020. Т. 32. № 3. С. 115 – 126.

Осипов Владимир Петрович. Кандидат технических наук, доцент. Ведущий научный сотрудник, Федеральное государственное учреждение "Федеральный исследовательский центр Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша Российской академии наук Области исследований: информационные технологии, вычислительная математика, принятие решений. E-mail: osipov@keldysh.ru

Рыков Юрий Германович. Кандидат физико-математических наук. Старший научный сотрудник, Федеральное государственное учреждение "Федеральный исследовательский центр Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша Российской академии наук". Области исследований: дифференциальные уравнения, математическая физика, теория систем. E-mail: yu-rykov@yandex.ru

Четверушкин Борис Николаевич. Академик РАН, доктор физико-математических наук, профессор, научный руководитель организации, Федеральное государственное учреждение "Федеральный исследовательский центр Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша Российской академии наук". Области исследований: вычислительная математика, параллельные алгоритмы, высокопроизводительные вычисления. E-mail: office@keldysh.ru

Mathematical Aspects of the Concept of Influence in the Cognitive Simulations

V.P. Osipov, Yu. G. Rykov, B. N. Chetverushkin

Keldysh Institute of Applied Mathematics of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

Abstract. Mathematical aspects of algorithms for assessing the influence of external factors in the cognitive modeling of complex systems are considered. Systems are represented in the form of directed graphs, the vertices and edges of which are assigned weights. Traditionally, the influence of external factors (input nodes) to the state (weight) of system elements (internal nodes) are computed successively for the set of all paths using the method of additive convolution of the input vertices and the corresponding edges. In this paper, for each internal vertex, it is proposed to define in a new way such influence as a partial derivative of the functional dependence corresponding to the graph. Formulas for calculating the influence coefficient are given, taking into account the structure of the graph, the partitions into cycles and the paths between the corresponding vertices. Using the example of a simple cognitive model for assessing the impact on the population and production of a certain viral infection and measures to counter it, the results of the proposed method and the traditional approach are compared. The specified definition of the concept of influence is also valid in the case of using more complex, nonlinear formulas, as well as when using fuzzy characteristics of vertices and edges.

Keywords: complex system, cognitive simulation, weighted digraph, additive convolution, graph partitioning, paths in a graph.

DOI 10.14357/20718594210201

References

1. Silov V.B. Prinyatie strategicheskikh resheniy v nechetkoy obstanovke. [Making strategic decisions in a fuzzy environment]. Moscow: INPRO-RES. 1995. 228 p.
2. Fedulov A.S. Nechetkie relyacionnye kognitivnye karty/ [Fuzzy Relational Cognitive Maps] Izvestiya RAN [Bulletin of the RAS]. 2005. No 1. P. 120-133.
3. Roberts F.S. Diskretnye modeli s prilozheniyami k socialnym, biologicheskim i ekologicheskim problemam. [Discrete mathematical models with application to social, biological and environmental problems]. Moscow. Nauka. 1986. 497 p.
4. Kosko B. Fuzzy cognitive maps // Int. J. Man-Mach. Studies. 1986. V. 24. P. 65 – 75.
5. Papageorgiou E. I. Fuzzy cognitive maps for applied sciences and engineering //Intell. Syst. Ref. Library. 2014. V.54. 411 p.
6. Osipov V. P, Rykov Yu. G. On mathematical aspects of analyzing the structure of complex systems using weighted digraphs. Lobachevskii Journal of Mathematics. 2020. V.41. No11. P. 2231-2238.
7. Chetverushkin B.N. Sudakov V.A. Faktornaya model dlya issledovaniya slozhnykh processov [Factor model for the study of complex processes]. DAN [Doklady Akademii Nauk]. 2019. T.489. No1. P.17-21.
8. Chetverushkin B.N. Sudakov V.A. Faktornoe modelirovanie dlya innovacionno-aktivnykh predpriyatiy [Factor modeling for innovational active enterprises] Matemat. Modelirovanie [Mathematical Models and Computer Simulations]. 2020. T.32. No3. P. 115-126.

Osipov Vladimir P. Candidate of technical sciences, docent. Leading researcher, Federal Research Center “Keldysh Institute of Applied Mathematics”, the Russian Academy of Sciences. Research areas: information technologies, computational mathematics, decision making. E-mail: osipov@keldysh.ru

Rykov Yuri G. Candidate of physical and mathematical sciences. Senior researcher, Federal Research Center “Keldysh Institute of Applied Mathematics”, the Russian Academy of Sciences. Research areas: differential equations, mathematical physics, the theory of systems. E-mail: yu-rykov@yandex.ru

Chetverushkina Boris N. Academician of the Russian Academy of Sciences, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, scientific director of the organization, Federal Research Center “Keldysh Institute of Applied Mathematics”, the Russian Academy of Sciences. Research areas: computational mathematics, parallel algorithms, high-performance computations. E-mail: office @keldysh.ru