В. М. Храпченко, Новые соотношения между глубиной и задержкой, *Дискрет. матем.*, 1995, том 7, выпуск 4, 77–85

Дискретная математика

том 7 выпуск 4 * 1995

УДК 519.95

Новые соотношения между глубиной и задержкой

© 1995 г. В. М. Храпченко

Построена последовательность минимальных схем S_k, $k = 1, 2, \ldots$, у которых задержка $T(S_k)$ значительно меньше глубины $D(S_k)$, а именно

$$T(S_k) < \log_2 D(S_k) + 6.$$

Показано, что этот результат не может быть существенно улучшен.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 93–011–1525.

В работах [1, 2] было обнаружено, что задержка и глубина схемы представляют собой принципиально различные понятия, и было доказано, что даже в минимальной схеме задержка может быть почти в два раза меньше глубины (при одинаковых единицах измерения). Здесь будет показано, что разница между ними может быть гораздо больше.

Чтобы не загромождать изложение техническими деталями, будем считать, что задержка каждого элемента (по любому его входу) равна 1. Как и прежде, чтобы не допустить облегченной постановки задачи, будем рассматривать только схемы с одним выходом. Для этого частного случая мы и сформулируем все определения.

Схемой вычисления, как обычно, будем называть последовательность равенств вида

$$\begin{aligned} z_1 &= \varphi_1(y_{11}, \ldots, y_{1r_1}), \\ &\ldots \\ z_l &= \varphi_l(y_{l1}, \ldots, y_{lr_l}), \end{aligned} \tag{1}$$

где каждая переменная y_{ij}, $i = 1, \ldots, l$, $j = 1, \ldots, r_i$, — это либо одна из входных (независимых) переменных $x_1, \ldots, x_n$, либо одна из внутренних (зависимых) переменных $z_1, \ldots, z_{i-1}$, вычисленных на предыдущих шагах, причем все переменные $z_1, \ldots, z_l$ различны, а $\varphi_1, \ldots, \varphi_l$ — функции (операции) из некоторого заранее заданного множества B (как правило, конечного и притом чаще всего очень небольшого). Переменная z_l считается выходной. Множество B называют базисом, над которым построена схема.

Очевидно, что каждая из переменных $z_1, \ldots, z_l$ может быть выражена через входные переменные $x_1, \ldots, x_n$, т.е. представлена в виде

$$z_i = f_i(x_1, \ldots, x_n), \qquad i = 1, \ldots, l.$$

По определению, схема (1) вычисляет функцию $f_l(x_1, \dots, x_n)$, выражающую выходную переменную z_l.

Сложность схемы (1) полагается равной l, т.е. числу операций в ней. Схема (1) называется минимальной (в классе схем над базисом B), если ее сложность не больше сложности любой схемы над базисом B, вычисляющей функцию $f_l(x_1, \dots, x_n)$.

Схеме вычисления (1) естественным образом соответствует схема из функциональных элементов [3] (т. е. фактически, ориентированный ациклический граф, см., например, [4]), в которой на входы i-го элемента поступают переменные $y_{i1}, \dots, y_{ir_i}$, а на выходе его получается переменная z_i, вычисленная элементом в соответствии с i-м равенством схемы вычисления. Все понятия, введенные для схемы вычисления, переносятся на схему из функциональных элементов. Глубина схемы S из функциональных элементов определяется как максимум числа элементов в путях, идущих в схеме от ее входов $x_1, \dots, x_n$ к ее выходу z_l, и обозначается через $D(S)$.

Будем теперь считать, что каждая переменная зависит от времени t, пробегающего действительные значения: $x_i = x_i(t)$, $z_j = z_j(t)$, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, l$. При этом входные переменные $x_1, \dots, x_n$ принимают свои значения при $t = 0$ и затем не изменяются, т. е. при всех $t \geqslant 0$

$$x_i(t) = x_i(0) = x_i, \qquad i = 1, \dots, n, \tag{2}$$

а значения внутренних переменных $z_1, \dots, z_l$ определяются равенствами (1), но с задержкой равной 1, т. е. при всех $t \geqslant 1$

$$z_i(t) = \varphi_i(y_{i1}(t-1), \dots, y_{ir_i}(t-1)), \qquad i = 1, \dots, l. \tag{3}$$

В начальный промежуток времени $0 \leqslant t < 1$ значения внутренних переменных $z_1, \dots, z_l$, вообще говоря, могут быть произвольными.

Задержка схемы из функциональных элементов определяется как наименьшее число T такое, что для всех наборов значений входных переменных $x_1, \dots, x_n$ и для всех наборов значений внутренних переменных $z_1, \dots, z_l$ (для всех состояний схемы) в промежуток времени $0 \leqslant t < 1$ для всякого $t \geqslant T$

$$z_l(t) = z_l(T).$$

Такое число существует, так как в силу (2) и (3) при $t \geqslant D(S)$ (независимо от состояния схемы в начальный промежуток времени) имеет место равенство

$$z_l(t) = f_l(x_1, \dots, x_n).$$

Задержка схемы S обозначается через $T(S)$. Ясно, что

$$T(S) \leqslant D(S).$$

Рассмотрим наиболее интересный случай, когда переменные принимают два значения 0 и 1, а базис B состоит из булевых функций. Основной результат будет установлен для базиса $B_0 = \{\&, \vee, \bar{\ }\}$, хотя кажется весьма правдоподобным, что он имеет место для любых полных базисов.

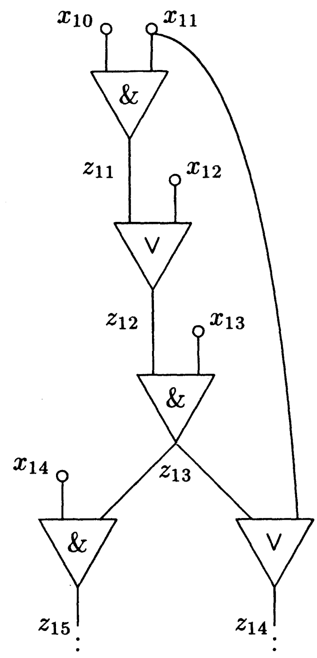


Рис. 1.

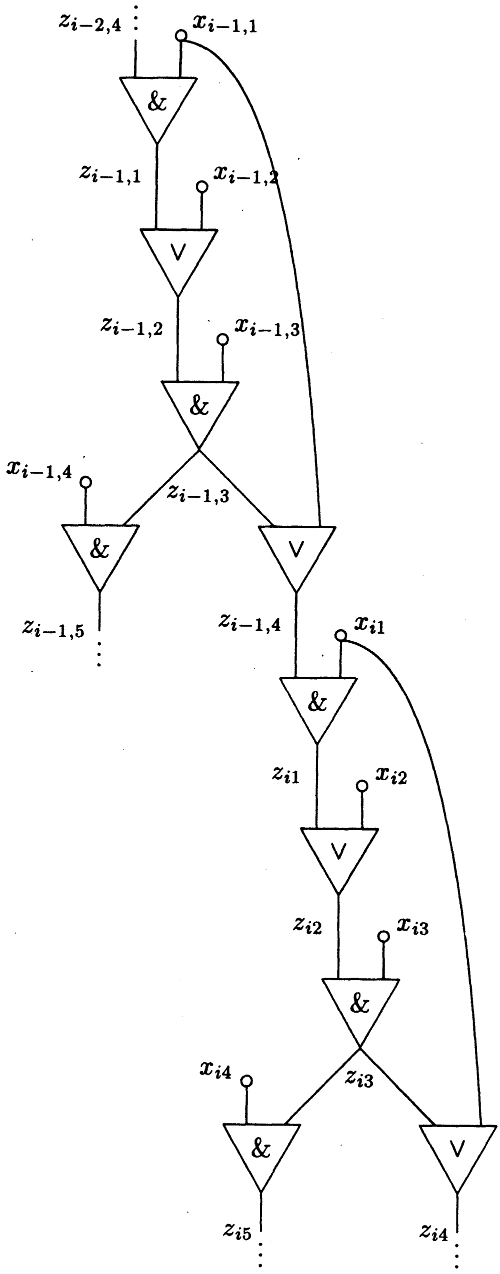
Теорема 1. *Существует последовательность минимальных схем* S_k, $k = 1, 2, \dots,$ *над базисом* B_0, *у которых*

$$D(S_k) = 4 \cdot 2^k + k,$$
$$T(S_k) = k + 8,$$

т. е.

$$T(S_k) < \log_2 D(S_k) + 6.$$

Доказательство. Положим $m = 2^k$. Схема S_k состоит из m последовательно соединенных почти одинаковых небольших блоков и одного большого однородного блока, вычисляющего m-местную дизъюнкцию соответствующих друг другу внутренних переменных, вычисленных небольшими блоками. Среди этих m блоков только первый и последний несколько отличаются от других: в первом блоке на левый вход первого элемента поступает входная переменная, а не внутренняя; в последнем блоке опущен правый из двух последних элементов. Все эти блоки содержат по пять элементов (за исключением последнего, содержащего, разумеется, 4 элемента). При изображении схемы S_k ее пришлось разделить на 3 части: верхнюю часть, содержащую первый блок (рис. 1), среднюю часть, в которой показаны два одинаковых соседних блока (рис. 2), и нижнюю часть, содержащую последний из небольших блоков и большой однородный блок (рис. 3). Во избежание недоразумений приведено и строгое формальное описание схемы



$z_{i-2,4}$
$x_{i-1,1}$
&
$z_{i-1,1}$
$x_{i-1,2}$
∨
$z_{i-1,2}$
$x_{i-1,3}$
&
$x_{i-1,4}$
$z_{i-1,3}$
&
∨
$z_{i-1,5}$
$z_{i-1,4}$
x_{i1}
&
z_{i1}
x_{i2}
∨
z_{i2}
x_{i3}
&
x_{i4}
z_{i3}
&
∨
z_{i5}
z_{i4}

Рис. 2.

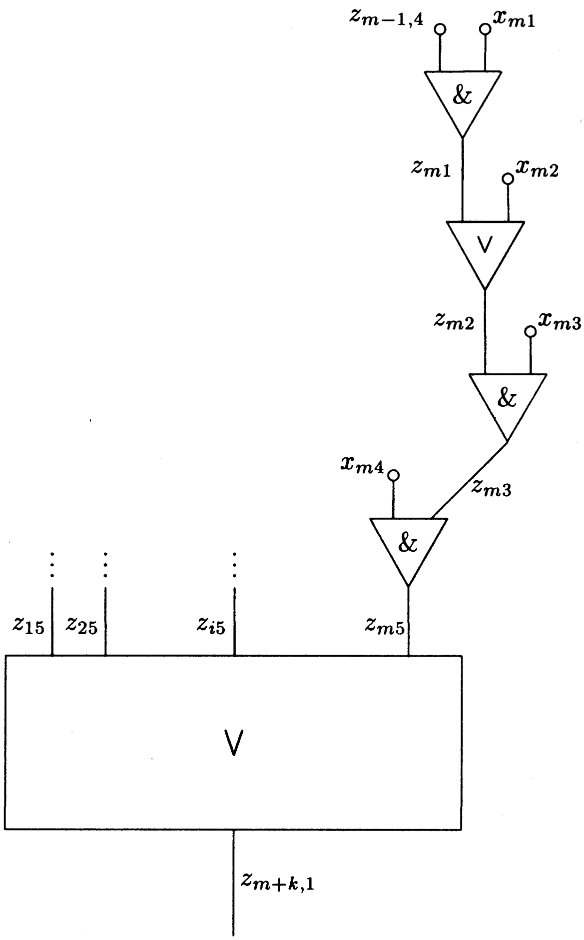


Рис. 3.

S_k в виде последовательности равенств, справедливых при $t \geqslant 1$ (в отличие от (1) переменные для удобства занумерованы здесь двойными индексами):

$$
\begin{aligned}
z_{11}(t) &= x_{10}(t-1) \,\&\, x_{11}(t-1),\\
z_{12}(t) &= z_{11}(t-1) \vee x_{12}(t-1),\\
z_{13}(t) &= z_{12}(t-1) \,\&\, x_{13}(t-1),\\
z_{14}(t) &= z_{13}(t-1) \vee x_{11}(t-1),\\
z_{15}(t) &= z_{13}(t-1) \,\&\, x_{14}(t-1),\\
&\dots\\
z_{i1}(t) &= z_{i-1,4}(t-1) \,\&\, x_{i1}(t-1),\\
z_{i2}(t) &= z_{i1}(t-1) \vee x_{i2}(t-1),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
z_{i3}(t) &= z_{i2}(t-1)\,\&\,x_{i3}(t-1),\\
z_{i4}(t) &= z_{i3}(t-1) \vee x_{i1}(t-1),\\
z_{i5}(t) &= z_{i3}(t-1)\,\&\,x_{i4}(t-1), \qquad 2 \leqslant i \leqslant m-1,\\
&\dots\\
z_{m1}(t) &= z_{m-1,4}(t-1)\,\&\,x_{m1}(t-1),\\
z_{m2}(t) &= z_{m1}(t-1) \vee x_{m2}(t-1),\\
z_{m3}(t) &= z_{m2}(t-1)\,\&\,x_{m3}(t-1),\\
z_{m5}(t) &= z_{m3}(t-1)\,\&\,x_{m4}(t-1),\\
z_{m+1,1}(t) &= z_{15}(t-1) \vee x_{25}(t-1),\\
&\dots\\
z_{m+1,m/2}(t) &= z_{m-1,5}(t-1) \vee x_{m5}(t-1),\\
z_{m+2,1}(t) &= z_{m+1,1}(t-1) \vee z_{m+1,2}(t-1),\\
&\dots\\
z_{m+2,m/4}(t) &= z_{m+1,(m/2)-1}(t-1) \vee z_{m+1,m/2}(t-1),\\
&\dots\\
z_{m+k,1}(t) &= z_{m+k-1,1}(t-1) \vee z_{m+k-1,2}(t-1).
\end{aligned}
\tag{4}
$$

Глубина $D(S_k)$, очевидно, достигается на пути, идущем от входа x_{10} к выходу $z_{m+k,1}$ через вершину z_{m5} (этот путь определяется однозначно). В каждом из m блоков данный путь проходит через четыре элемента, а всего — через $4m = 4\cdot 2^k$ элементов. В большом однородном блоке этот путь проходть еще через k элементов. Отсюда следует утверждение теоремы о глубине $D(S_k)$.

Подсчитаем теперь задержку $T(S_k)$. Сначала покажем, что все переменные z_{i5}, $i = 1,\dots,m$, вычисляются с задержкой, не большей 8. Вообще говоря, это можно увидеть на рис. 2, достаточно обратить внимание на то, что как при $x_{i-1,1} = 0$, так и при $x_{i-1,1} = 1$, переменная z_{i5} не зависит от $z_{i-2,4}$. Мы придадим этому рассуждению более строгую форму.

Исключая с помощью равенств (4) одну за другой внутренние переменные и учитывая (2), получим (знак & опускаем):

$$
\begin{aligned}
z_{i5}(t) &= z_{i3}(t-1)x_{i4}, && t \geqslant 1,\\
z_{i5}(t) &= z_{i2}(t-2)x_{i3}x_{i4}, && t \geqslant 2,\\
z_{i5}(t) &= (z_{i1}(t-3) \vee x_{i2})x_{i3}x_{i4}, && t \geqslant 3.
\end{aligned}
$$

Далее при $i = 1$ получим:

$$
z_{15}(t) = (x_{10}x_{11} \vee x_{12})x_{13}x_{14}, \qquad t \geqslant 4, \tag{5}
$$

а при $i \geqslant 2$

$$
\begin{aligned}
z_{i5}(t) &= (z_{i-1,4}(t-4)x_{i1} \vee x_{i2})x_{i3}x_{i4}, && t \geqslant 4,\\
z_{i5}(t) &= ((z_{i-1,3}(t-5) \vee x_{i-1,1})x_{i1} \vee x_{i2})x_{i3}x_{i4}, && t \geqslant 5,\\
z_{i5}(t) &= ((z_{i-1,2}(t-6)x_{i-1,3} \vee x_{i-1,1})x_{i1} \vee x_{i2})\,\&\,x_{i3}x_{i4}, && t \geqslant 6,\\
z_{i5}(t) &= (((z_{i-1,1}(t-7) \vee x_{i-1,2})x_{i-1,3} \vee x_{i-1,1})\,\&\,x_{i1} \vee x_{i2})x_{i3}x_{i4}, && t \geqslant 7,\\
z_{i5}(t) &= (((z_{i-2,4}(t-8)x_{i-1,1} \vee x_{i-1,2})x_{i-1,3} \vee x_{i-1,1})\,\&\,x_{i1} \vee x_{i2})x_{i3}x_{i4}, && t \geqslant 8.
\end{aligned}
$$

Пользуясь тождеством

$$\Phi(x_{i-1,1},\dots) \vee x_{i-1,1} = \Phi(0,\dots) \vee x_{i-1,1},$$

справедливым для всякой формулы Φ, получим, что

$$z_{i5}(t) = ((x_{i-1,2}x_{i-1,3} \vee x_{i-1,1})x_{i1} \vee x_{i2})x_{i3}x_{i4}, \qquad t \geqslant 8, \tag{6}$$

а это и означает, что все переменные z_{i5}, $i = 1,\dots,m$, вычисляются с задержкой, не большей 8.

Аналогичным образом получим, что

$$z_{m+k,1}(t) = z_{i5}(t-k) \vee \dots \vee z_{m5}(t-k), \qquad t \geqslant k. \tag{7}$$

Подставляя сюда z_{15} из (5) и z_{i5} при $i \geqslant 2$ из (6), убеждаемся в том, что

$$T(S_k) \leqslant k+8.$$

В действительности, имеет место равенство, так как при $t < k+8$ (но $t \geqslant k+7$) еще сохраняется зависимость выхода $z_{m+k,1}$ от значений внутренних переменных $z_{11},\dots,z_{m-1,1}$ в начальный промежуток времени. Тем самым утверждение теоремы про величину задержки $T(S_k)$ тоже доказано.

Остается доказать, что схема S_k минимальна (над базисом B_0). Теперь нам будет удобнее иметь дело с классом всех схем, получающихся при любых натуральных значениях m. Любая такая схема R_m имеет тот же вид, что и схема S_k (см. рис. 1, 2, 3), причем строение большого однородного блока даже не существенно, важно лишь, что он содержит $m-1$ элементов. Отметим, что $S_k = R_{2^k}$. Функцию, вычисляемую схемой R_m, обозначим через $f_m(x_{10},\dots,x_{14},\dots,x_{m1},\dots,x_{m4})$.

Докажем по индукции минимальность всех схем R_m. Нетрудно подсчитать, что схема R_m содержит $6m-2$ элементов. Далее, схема R_1 вычисляет функцию $f_1(x_{10},\dots,x_{14})$, существенно зависящую от всех своих пяти переменных, и состоит из четырех элементов. Следовательно, она минимальна.

Предположим, что уже доказано, что схема R_{m-1} минимальна. Это означает, что любая схема для фуцнкции f_{m-1} содержит не менее $6(m-1)-2$ элементов. Из рис. 1, 2, 3 нетрудно вывести соотношение, связывающее функции f_m и f_{m-1} между собой:

$$f_m(x_{10},\dots,x_{m4}) = (x_{10}x_{11} \vee x_{12})x_{13}x_{14} \vee f_{m-1}(x_{12}x_{13} \vee x_{11}, x_{21},\dots,x_{m4}).$$

Рассмотрим произвольную схему Q_m для функции f_m.

Поскольку функция f_m существенно зависит от переменной x_{10}, в схеме Q_m есть элемент с входом x_{10}. Если это элемент & или элемент $^-$, то сделаем подстановку $x_{10} = 0$ и удалим из схемы по крайней мере два элемента, если же это элемент $\vee$, то сделаем подстановку $x_{10} = 1$ и также удалим из схемы два элемента. В обоих случаях в получившейся схеме, очевидно, будет элемент с входом x_{12}. Сделаем подстановку $x_{12} = 1$ и удалим из схемы еще один элемент. В обоих случаях будет удалено три элемента, и в результате будет получена некоторая схема Q'_m, вычисляющая функцию

$$x_{13}x_{14} \vee f_{m-1}(x_{13} \vee x_{11}, x_{21},\dots,x_{m4}).$$

В схеме Q'_m есть элемент с входом x_{14}. Если это элемент & или элемент $^-$, то сделаем подстановку $x_{14} = 0$ и удалим из схемы по крайней мере два элемента, если же это элемент $\vee$, то сделаем подстановку $x_{14} = 1$ и также удалим из схемы два элемента. В обоих случаях в получившейся схеме, очевидно, будет элемент с входом x_{13}. Сделаем подстановку $x_{13} = 0$ и удалим из схемы еще один элемент. В обоих случаях будет удалено три элемента, и в результате будет получена некоторая схема Q''_m, вычисляющая функцию

$$f_{m-1}(x_{11}, x_{21}, \dots, x_{24}, \dots, x_{m1}, \dots, x_{m4}).$$

Схема Q''_m, как и любая схема, вычисляющая функцию f_{m-1}, содержит не менее $6(m-1) - 2$ элементов. Поскольку она получена из схемы Q_m удалением не менее, чем 6 элементов, схема Q_m содержит не менее $6m - 2$ элементов. Отсюда следует, что схема R_m, вычисляющая ту же функцию f_m и содержащая $6m - 2$ элементов, минимальна. Теорема доказана.

Покажем теперь, что неравенство теоремы 1 не может быть сколько-нибудь существенно усилено.

Теорема 2. *Пусть S — произвольная минимальная схема в базисе B_0 и пусть D и T — соответственно ее глубина и задержка. Тогда*

$$T > \log_2 D.$$

Доказательство. Обозначим число элементов в схеме S через L. В силу теоремы 4 из работы [2] существует схема S_1, эквивалентная схеме S, глубина D_1 и задержка T_1 которой удовлетворяют соотношениям

$$D_1 = T_1 \leqslant T \tag{8}$$

(схема S_1 не имеет внутренних ветвлений, т. е. фактически является формулой, но это здесь даже не будет использоваться). Обозначим число элементов в схеме S_1 через L_1. Опираясь на определение глубины и минимальной схемы, замечая, что при использовании в схеме элементов с не более, чем двумя входами, схема глубины d не может иметь больше 2^d входов, и, стало быть, не может содержать больше, чем $2^d - 1$ элементов, и, наконец, учитывая (7), получим, что

$$D \leqslant L \leqslant L_1 < 2^{D_1} \leqslant 2^T,$$

откуда

$$D < 2^T$$

или

$$T > \log_2 D.$$

Теорема доказана.

Список литературы

1. Храпченко В. М. Глубина и задержка схемы. *ДАН СССР* (1978) **241**, №6, 1281–1284.
2. Храпченко В. М. Различие и сходство между задержкой и глубиной. *Пробл. киберн.* (1979) **35**, 141–168.
3. Лупанов О. Б. Об одном методе синтеза схем. *Известия вузов. Радиофизика* (1958) **1**, №1, 120–140.
4. Храпченко В. М. Нижние оценки сложности схем из функциональных элементов (обзор). *Киберн. сб.* (1984) **21**, 3–54.

Статья поступила 14.12.93.