ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1968 МАТЕМАТИКА № 3 (70)

УДК 519.50

Ю. И. Романов

О СРАВНЕНИИ СИЛЫ НЕКОТОРЫХ $\Delta\Sigma$-ОПЕРАЦИЙ В СВЯЗИ С ОБОБЩЕНИЕМ НЕКОТОРЫХ ТЕОРЕМ О КРАТНОЙ ОТДЕЛИМОСТИ

В теории операций над множествами нередко возникает вопрос о сравнении силы некоторых $\Delta\Sigma$-операций над множествами. В частности, это обстоятельство лежит в основе установления некоторых теорем о кратной отделимости.

В настоящей работе получены некоторые результаты такого типа, относящиеся к R- и R^C-операциям, для случая, когда исходное пространство индексов $I=(i)$ имеет мощность $\tau=\aleph_\nu$, а R-операция — счетную глубину цепей. Мы пользуемся терминологией, введенной в работах [1]—[6], и применяем ее без оговорок к случаю пространства индексов I мощности τ.

Обозначим через $\mathfrak{R}$ основное пространство, множества которого изучаются. Пусть N есть база $\Delta\Sigma$-операции, удовлетворяющая по отношению к любому классу множеств $K\ni\varnothing, \mathfrak{R}$ следующим условиям:

1°. Операции типа R_N сильнее операций Φ_{N^C}, $\bigcup\limits_{\tau}$ и $\bigcap\limits_{\tau}$ относительно класса множеств K.

2°. Операции типа (N, d) равносильны операции Φ_N относительно класса множеств K, и операции типа (N^C, d) равносильны операции Φ_{N^C} относительно того же класса, или

2′. $R_{R_N}\lesssim R_N$, $(R_N^C, d)\lesssim R_N^C$. Тогда операции типа (R_N^α, R_N^α) равносильны операции типа R_N^α относительно класса множеств K, операции типа $R_{R_{M_\alpha}}$ не сильнее операций типа R_{M_α}, где $\Phi_{M_\alpha}\equiv R_N^\alpha$, $R_N^\beta(K)\subset R_N^\alpha(K)$ и $R_N^{\beta C}(K)\subset R_N^\alpha(K)$ при $\beta<\alpha$ [1].

Систему множеств, инвариантную относительно операции $\bigcap\limits_{\tau}$, назовем Δ-системой. Пусть N есть база некоторой $\Delta\Sigma$-операции. Через N^i обозначается множество всех цепей базы N, содержащих индекс $i\in I$, и через $N^{i_1,\dots,i_\beta,\dots}$ — множество всех цепей базы N, содержащих индексы $i_1,\dots,i_\beta,\dots$ пространства I. Δ-систему, построенную на совокупности баз N и $(N^i)_{i\in I}$, обозначим $\Delta(N)$.

Лемма. *Пусть класс множеств $K\ni\varnothing$ и база N такова, что для любой базы M, принадлежащей $\Delta(N)$, выполняется соотноше-*

ние: $\Phi_M(K) \subset \Phi_N(K)$ *или* $\Phi_M(K) \subset \Phi_Q(K)$, *где* Φ_Q — *некоторая* $\Delta\Sigma$-*операция.*

Тогда

$$\Phi_{M_1 \setminus M_2}(K) \subset \Phi_N(K) \text{ и } \Phi_{M_1 \setminus \bigcup\limits_{\beta < \Omega_\nu} M_1^{i_\beta}}(K) \subset \Phi_N(K)$$

или

$$\Phi_{M_1 \setminus M_2}(K) \subset \Phi_Q(K) \text{ и } \Phi_{M_1 \setminus \bigcup\limits_{\beta < \Omega_\nu} M_1^{i_\beta}}(K) \subset \Phi_Q(K),$$

где M_1, $M_2 \in \Delta(N)$.

Первое соотношение следует из леммы З. И. Козловой [1]. Чтобы доказать второе соотношение, будем рассуждать следующим образом. Пусть дано произвольное семейство множеств $(E_i)_{i \in I}$ класса K. Определим семейство множеств $(H_i)_{i \in I}$, положив $H_i = E_i$, если $i \neq i_\beta$ при любом $\beta < \Omega_\nu$; $H_i = \varnothing$, если $i = i_\beta$. Тогда

$$\Phi_{M_1 \setminus \bigcup\limits_{\beta} M_1^{i_\beta}}\{E_i\} = \Phi_N\{H_i\} \text{ или } \Phi_{M_1 \setminus \bigcup\limits_{\beta} M_1^{i_\beta}}\{E_i\} = \Phi_Q\{H_i\}.$$

Теорема 1. *Пусть* N — *жесткая база* $\Delta\Sigma$-*операции и* M — *база* $\Delta\Sigma$-*операции типа* R_N. *Пусть выполнены следующие условия*: а) $\bigcup\limits_{\tau} \precsim M$; б) $(M^C, d) \precsim M^C$; в) *если* $L \in \Delta(N)$, *то* $L \precsim N$.

Тогда $M^{i_1, \ldots, i_\beta, \ldots} \precsim M$, *а операция* $\Phi_{M^{C i_1, \ldots, i_\beta, \ldots}}$ *не сильнее операции* Φ_{M^C} *относительно любого класса множеств* $K \ni \varnothing$.

Доказательство. 1. Пусть $\Phi_M \equiv T_{\langle N_i \rangle}$, где $(N_i)_{i \in I}$ есть R_N-семейство баз. Базы семейства (N_i) получены сдвигами f_i базы N на попарно непересекающиеся цепи $(\eta^i)_{i \in I}$, где $0 \in \eta^i$, $i \in \eta^i$, т. е. $N_i = f_i(N)$. Рассмотрим операцию $\Phi_{M^{i_1, \ldots, i_\beta, \ldots}}$, где $i_1, \ldots, i_\beta, \ldots$—произвольная последовательность индексов, имеющая тип Ω_ν.

а) Если ни одна T_N-цепь не содержит всех индексов $(i_\beta)_{\Omega_\nu}$, то $\Phi_{M^{i_1, \ldots, i_\beta, \ldots}}\{E_i\} = \varnothing$ для любого семейства множеств $(E_i)_{i \in I}$, т. е. в этом случае $M^{i_1, \ldots, i_\beta, \ldots} \precsim M$.

б) Пусть индексы $(i_\beta)_{\Omega_\nu}$ принадлежат хотя бы одной T_N-цепи. Некоторые из этих индексов могут быть попарно подчинены. Возьмем совокупность всех индексов, которым подчинены индексы $(i_\beta)_{\Omega_\nu}$, включая их самих. Рассмотрев порядковое подчинение индексов этой совокупности, получим некоторое дерево, корнем которого является нуль, а ветвями служат последовательности подчиненных друг другу индексов. При этом длина совершенно упорядоченных подцепей не более чем ω.

Пусть r_l является началом некоторой ветви, а $r_l, r_{l+1}, \ldots, r_{l+m}$ — подчиненные индексы, расположенные в порядке взаимного подчинения. Пусть $r^1_{l+m+1}, r^2_{l+m+1}, \ldots, r^\beta_{l+m+1}, \ldots$ $(\beta < \Omega_\nu)$ суть индексы, являющиеся началами новых ветвей дерева (в частности, число их может быть конечным). Положим $\underline{N}_{r_k} = N^{r_{k+1}}_{r_k}$ при $l \leqslant k < l + m$, $\underline{N}_{r_{l+m}} = N^{r^1_{l+m+1}, \ldots, r^\beta_{l+m+1}, \ldots}_{r_{l+m}}$, $\underline{N}_j = N_j$ в остальных случаях. Тогда $\Phi_{M^{i_1, \ldots, i_\beta, \ldots}}\{E_i\} = T_{\langle \underline{N}_j \rangle}\{E_i\}$, где $(E_i)_{i \in I}$ — произвольное семейство множеств.

Покажем, что $M^{i_1, \dots, i_\beta, \dots} \lesssim M$. В самом деле, если $r_{k+1} = f_{r_k}(j_{k+1})$, где $j_{k+1} \in I$, то $N_{r_k}^{r_{k+1}} = f_{r_k}(N^{j_{k+1}})$. Если $r_{l+m+1}^\beta = f_{r_{l+m}}(j_{l+m+1}^\beta)$ при $\beta = 1, 2, \dots$, то $N_{r_{l+m}}^{(r_{l+m+1}^\beta)_{\Omega_\nu}} = f_{r_{l+m}}(N^{(j_{l+m+1}^\beta)_{\Omega_\nu}})$. Так как $N^{j_{k+1}} \in \Delta(N)$ и $N^{(j_{l+m+1}^\beta)_{\Omega_\nu}} \in \Delta(N)$, то $N^{j_{k+1}} \lesssim N$ и $N^{(j_{l+m+1}^\beta)_{\Omega_\nu}} \lesssim N$. Отсюда следует, что $T_{\langle \underline{N_j} \rangle} \lesssim T_N$, т. е. $M^{i_1, \dots, i_\beta, \dots} \lesssim M$.

2. Рассмотрим операцию $\Phi_{M^{C i_1, \dots, i_\beta, \dots}}$. Если индексы $(i_\beta)_{\Omega_\nu}$ не принадлежат ни одной цепи операции Φ_{M^C}, то $\Phi_{M^{C i_1, \dots, i_\beta, \dots}}\{E_i\} = \varnothing$ для любого семейства множеств $(E_i)_{i \in I}$. Следовательно, в данном случае $M^{C i_1, \dots, i_\beta, \dots} \lesssim M^C$. Если индексы $(i_\beta)_{\Omega_\nu}$ принадлежат хотя бы одной цепи базы M^C, то рассмотрим следующие случаи.

1) Индексы $(i_\beta)_{\Omega_\nu}$ принадлежат цепи $\eta_{j'} \in N_{j'}^C$ при некотором $j' \in I$. Так как мы рассматриваем только жесткие цепи, то это значит, что индекс $i_\beta \in \eta_{j'}^\beta \in N_{j'}$, причем если индекс $i_\alpha \in (i_\beta)_{\Omega_\nu}$ и $\alpha \neq \beta$, то $i_\alpha \overline{\in} \eta_{j'}^\beta$. Выпишем все индексы, которым подчинен индекс j': $r_1 = 0$, $r_2, \dots$ $\dots, r_s = j'$, где индекс r_k подчинен индексу r_m, если $1 \leqslant m < k \leqslant s$. Пусть

$$E_j^* = \begin{cases} \varnothing, & \text{если } j = r_1, r_2, \dots, r_s, \\ E_j & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Положим

$$\underline{N_j^C} = \begin{cases} \left(N_{r_s} \setminus \bigcup_\beta N_{r_s}^{i_\beta}\right)^C, & j = r_s \\ N_j^C, & j \neq r_s. \end{cases}$$

Тогда $\Phi_{M^{C i_1, \dots, i_\beta, \dots}}\{E_j\} = \bigcap_\beta E_{i_\beta} \bigcap T^C_{\langle \underline{N_j^C} \rangle}\{E_j^*\}$. На основании леммы $\Phi_{N_{r_s} \setminus \bigcup_\beta N_{r_s}^{i_\beta}}(K) \subset \Phi_N(K)$, где $K \ni \varnothing$. Тогда ([1], следствие теоремы 3.17.1) имеем $T^C_{\langle \underline{N_j^C} \rangle} \lesssim T_N^C$. Так как $T^C_{\langle N_j^C \rangle}(K) \supset K$, $\bigcap_\tau \lesssim T_N^C$ и $(T_N^C, d) \lesssim T_N^C$, то получим, что $\Phi_{M^{C i_1, \dots, i_\beta, \dots}}(K) \subset \Phi_{M^C}(K)$.

2) Индексы $(i_\beta)_{\Omega_\nu}$ попарно не подчинены друг другу и имеют разный порядок подчинения нулю.

Рассмотрим совокупность данных индексов и индексов, которым они подчинены. Определим порядковое подчинение этих индексов. Получим дерево, корнем которого является нуль, а концевыми вершинами служат индексы данной последовательности $(i_\beta)_{\Omega_\nu}$.

Пусть $E_j^* = \varnothing$, если j принадлежит дереву и $j \overline{\in} (i_\beta)_{\Omega_\nu}$, а в остальных случаях $E_j^* = E_j$. По условию все индексы $(i_\beta)_{\Omega_\nu}$ принадлежат разным ветвям. Пусть $i_\alpha \in (i_\beta)_{\Omega_\nu}$. Обозначим через r^α индекс, которому непосредственно подчинен индекс i_α. Положим

$$\underline{N_j^C} = \begin{cases} (N_{r^\alpha} \setminus N_{r^\alpha}^{i_\alpha})^C, & j = r^\alpha; \\ N_j^C & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Тогда $\Phi_{M^{Ci_1, \dots, i_\beta, \dots}}\{E_j\} = \bigcap_\beta E_{i_\beta} \bigcap T^C_{\langle N_j^C \rangle}\{E_j^*\}$, откуда следует, как в первом случае, что если $K \ni \varnothing$, то $\Phi_{M^{Ci_1, \dots, i_\beta, \dots}}(K) \subset \Phi_{M^C}(K)$.

Другие возможные случаи представляют собой комбинацию этих двух случаев. Таким образом, $\Phi_{M^{Ci_1, \dots, i_\beta, \dots}}$ не сильнее Φ_{M^C} относительно любого класса множеств $K \ni \varnothing$. Аналогичным образом доказывается

Теорема 1'. *Пусть N — жесткая база $\Delta\Sigma$-операции и Φ_M есть операция типа R_N. Пусть выполнены следующие условия*: а) $\bigcup\limits_\tau \prec M$; б) $(M^C, d) \prec M^C$; в*) $R_{R_N} \prec R_N$; г*) *из того, что $L \in \Delta(N)$, следует, что $L \prec M$.*

Тогда $M^{i_1, \dots, i_\beta, \dots} \prec M$, а операция $\Phi_{M^{Ci_1, \dots, i_\beta, \dots}}$ не сильнее операции Φ_{M^C} относительно любого класса множеств $K \ni \varnothing$.

Теорема 2. *Пусть N и N^C — жесткие базы $\Delta\Sigma$-операции и Φ_{M_α} есть операция типа R_N^α, где $0 \leqslant \alpha < \Omega_{\nu+1}$. Пусть база N удовлетворяет по отношению к классу множеств $K \ni \varnothing$, $\mathfrak{N}$ следующим условиям*: а) *операции типа R_N сильнее операций Φ_{N^C}, $\bigcup\limits_\tau$ и $\bigcap\limits_\tau$ относительно класса множеств K*; б) *операции типа (N, d) равносильны операции Φ_N относительно класса множеств K, и операции типа (N^C, d) равносильны операции Φ_{N^C} относительно того же класса*; в) *если $L \in \Delta(N)$, то $L \prec N$.*

Тогда операция $\Phi_{M_{\alpha+1}^{i_1, \dots, i_\beta, \dots}}$ (а также операция $\Phi_{M_0^{i_1, \dots, i_\beta, \dots}}$) не сильнее операции $\Phi_{M_{\alpha+1}}$ (соответственно операции Φ_{M_0}) относительно любого класса множеств $K \ni \varnothing$, $\mathfrak{N}$, а $\Phi_{M_\alpha^{Ci_1, \dots, i_\beta, \dots}}$ не сильнее $\Phi_{M_\alpha^C}$ относительно тех же классов.

Доказательство. Так как N — жесткая база $\Delta\Sigma$-операции, удовлетворяющая условиям а)—в), то в силу теоремы 1 $M_0^{i_1, \dots, i_\beta, \dots} \prec M_0$, где Φ_{M_0} есть операция типа R_N^0. На основании теоремы 1 $\Phi_{M_0^{Ci_1, \dots, i_\beta, \dots}}$ не сильнее $\Phi_{M_0^C}$ относительно класса множеств $K \ni \varnothing$, $\mathfrak{N}$. Это значит, что $\Delta(M_0^C)$ таково, что если $L \in \Delta(M_0^C)$, то Φ_L не сильнее $\Phi_{M_0^C}$ относительно любого класса множеств $K \ni \varnothing$, $\mathfrak{N}$. Базы операций $\Phi_{M_0} \equiv T_{\langle N_i \rangle}$ и $\Phi_{M_0^C} \equiv T^C_{\langle N_i^C \rangle}$ могут быть взяты жесткими ([6], [1]).

Допустим, что операция $\Phi_{M_{\alpha+1}^{i_1, \dots, i_\beta, \dots}}$ не сильнее $\Phi_{M_{\alpha+1}}$ и операция $\Phi_{M_{\alpha+1}^{Ci_1, \dots, i_\beta, \dots}}$ не сильнее $\Phi_{M_{\alpha+1}^C}$ относительно класса множеств $K \ni \varnothing$, $\mathfrak{N}$, где $\alpha < \Omega_{\nu+1}$. Базы $M_{\alpha+1}$ и $M_{\alpha+1}^C$ можно взять жесткими. Это значит, что $\Delta(M_{\alpha+1}^C)$ удовлетворяет условию **в**). Тогда на основании теоремы 1 операция $\Phi_{M_{\alpha+2}^{i_1, \dots, i_\beta, \dots}}$ не сильнее $\Phi_{M_{\alpha+2}}$, а операция $\Phi_{M_{\alpha+2}^{Ci_1, \ldots, i_\beta, \ldots}}$ не сильнее $\Phi_{M_{\alpha+2}^C}$ относительно класса множеств $K \ni \varnothing, \mathfrak{N}$.

Допустим, что утверждение верно для всех $\alpha < \gamma$, где γ — предельное трансфинитное число, меньшее $\Omega_{\nu+1}$. Пусть $(\alpha_i) \to \gamma$, где $\alpha_i < \gamma$. Тогда $\Phi_{M_\gamma^{Ci_1, \ldots, i_\beta, \ldots}}\{E_j\} = \bigcup\limits_{\alpha_i < \gamma} \Phi_{M_{\alpha_i}^{Ci_1, \ldots, i_\beta, \ldots}}\{E_j\}$. Так как в силу допущения операция $\Phi_{M_{\alpha_i}^{Ci_1, \ldots, i_\beta, \ldots}}$ не сильнее $\Phi_{M_{\alpha_i}^C}$ относительно класса множеств $K \ni \varnothing, \mathfrak{N}$, то $\Phi_{M_\gamma^{Ci_1, \ldots, i_\beta, \ldots}}(K) \subset \bigcup\limits_{\alpha_i < \gamma} \Phi_{M_{\alpha_i}^C}(K) = \Phi_{M_\gamma^C}(K)$, т. е. операция $\Phi_{M_\gamma^{Ci_1, \ldots, i_\beta, \ldots}}$ не сильнее $\Phi_{M_\gamma^C}$ относительно класса $K \ni \varnothing, \mathfrak{N}$. Если все операции $\Phi_{M_{\alpha_i}^C}$ и операция объединения семейства множеств, когда мощность семейства не более τ, имеют жесткие базы, то и итерация этих операций имеет жесткие базы ([6], [1]). Следовательно, базу M_γ^C можно считать жесткой. Это значит, что $\Delta(M_\gamma^C)$ удовлетворяет условию в). Каждая из баз M_α и M_α^C при $\alpha < \Omega_{\nu+1}$ удовлетворяет условиям а), б) (см. [1], часть II, § 2). Так как $R_{M_\gamma^C} \equiv \Phi_{M_{\gamma+1}}$, то, используя теорему 1, получим, что операция $\Phi_{M_{\gamma+1}^{i_1, \ldots, i_\beta, \ldots}}$ не сильнее $\Phi_{M_{\gamma+1}}$, а операция $\Phi_{M_{\gamma+1}^{Ci_1, \ldots, i_\beta, \ldots}}$ не сильнее $\Phi_{M_{\gamma+1}^C}$ относительно класса множеств $K \ni \varnothing, \mathfrak{N}$.

Таким образом, для всякого числа $\alpha < \Omega_{\nu+1}$, операция $\Phi_{M_{\alpha+1}^{i_1, \ldots, i_\beta, \ldots}}$ (операция $\Phi_{M_0^{i_1, \ldots, i_\beta, \ldots}}$) не сильнее операции $\Phi_{M_{\alpha+1}}$ (операции Φ_{M_0}) относительно любого класса множеств $K \ni \varnothing, \mathfrak{N}$, а $\Phi_{M_\alpha^{Ci_1, \ldots, i_\beta, \ldots}}$ не сильнее $\Phi_{M_\alpha^C}$ относительно тех же классов множеств. Теорема доказана. Аналогично доказывается

Теорема 2′. *Пусть N и N^C — жесткие базы $\Delta\Sigma$-операции и Φ_{M_α} есть операция типа R_N^α, где $0 \leqslant \alpha < \Omega_{\nu+1}$. Пусть база N удовлетворяет по отношению к классу множеств $K \ni \varnothing, \mathfrak{N}$ следующим условиям:* а) *операции типа R_N сильнее операций Φ_{N^C}, $\bigcup\limits_\tau$ и $\bigcap\limits_\tau$ относительно класса множеств K;* б*) $(R_N^C, d) \lessdot R_N^C$; в*) $R_{R_N} \lessdot R_N$; г*) *если $L \in \Delta(N)$, то $L \lessdot M$.*

Тогда операция $\Phi_{M_{\alpha+1}^{i_1, \ldots, i_\beta, \ldots}}$ (а также операция $\Phi_{M_0^{i_1, \ldots, i_\beta, \ldots}}$) не сильнее операции $\Phi_{M_{\alpha+1}}$ (соответственно операции Φ_{M_0}) относительно любого класса множеств $K \ni \varnothing, \mathfrak{N}$, а операция $\Phi_{M_\alpha^{Ci_1, \ldots, i_\beta, \ldots}}$ не сильнее операции $\Phi_{M_\alpha^C}$ относительно тех же классов.

Если исходная операция $\Phi_N \equiv \bigcup\limits_\tau$, то R_N^α-операция обозначается R^α.

Следствие. Если $\tau = \aleph_0$ и в качестве базы $\bigcup$-операции взята жесткая база, то при любом $\alpha < \Omega$ операция $\Phi_{M_{\alpha+1}^{i_1, \ldots, i_n, \ldots}}$ (а также операция $\Phi_{M_0^{i_1, \ldots, i_n, \ldots}}$) не сильнее операции $\Phi_{M_{\alpha+1}}$ (соответственно операции Φ_{M_0}) относительно класса множеств $K \ni \varnothing$, $\mathfrak{N}$, а $\Phi_{M_\alpha^{Ci_1, \ldots, i_n, \ldots}}$ не сильнее $\Phi_{M_\alpha^C}$ относительно того же класса, где Φ_{M_α} есть операция типа R^α с жесткой базой.

Действительно, если N — жесткая база $\bigcup$-операции, то N удовлетворяет условиям а), б*), в*) [3]; $\Delta(N)$ есть d-система, удовлетворяющая условию г*). Тогда для операций R^0, $R^{\alpha+1}$ и $R^{\alpha C}$ при любом числе $\alpha < \Omega$ будут справедливы теоремы 1, 1′, 2, 2′.

Из изложенных здесь результатов следует, что теоремы о кратной отделимости, доказанные в работе [7], имеют место для случая R-операции с пространством индексов мощности τ при условии, что рассматриваются R-множества, построенные с помощью таких же R-операций.

г. Волгоград

Поступило
19 VIII 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Козлова З. И. Теория операций над множествами и дескриптивная теория множеств. М., „Наука“, 1967.
2. Ляпунов А. А. Об операциях над множествами. В кн.: Алгебра и логика, т. 2, вып. 2, Изд. СО АН СССР, 1963, с. 47—56.
3. Ляпунов А. А. Об операциях над множествами, допускающих трансфинитные индексы. Тр. Моск. матем. о-ва, т. 6, 1957, с. 195—230.
4. Канторович Л. В., Ливенсон Е. М. Memoir on the analytical operations and projective sets, I. Fundam. math., v. 18, 1932, p. 214—271.
5. Очан Ю. С. О переместимости δs-операций. Матем. сб., т. 10 (52) : 3, 1942, с. 151—163.
6. Ляпунов А. А. О признаках вырождения для R-множеств. ИАН СССР. Сер. матем., т. 17, № 6, 1953, с. 563—578.
7. Ляпунов А. А. О кратной отделимости для δs-операций. ДАН СССР, т. 53, № 5, 1946, с. 399—402.