Дискретная математика

том 3 выпуск 3 * 1991

УДК 519.115

О ЧИСЛЕ ПОДСТАНОВОК С ДЛИНАМИ ЦИКЛОВ ИЗ ЗАДАННОГО МНОЖЕСТВА

А.И. Павлов

Пусть Λ – некоторое множество натуральных чисел, $S_n(\Lambda)$ – множество всех подстановок степени n, имеющих лишь циклы с длинами из множества Λ, $a_n(\Lambda) = |S_n(\Lambda)|/n!$, где $|S_n(\Lambda)|$ – мощность конечного множества $S_n(\Lambda)$. Изучается асимптотика $a_n(\Lambda)$ при $n \to \infty$ в зависимости от плотности γ множества Λ, при этом

$$\gamma = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} \sum_{\substack{\lambda\in\Lambda \\ \lambda\leqslant x}} 1.$$

Пусть Λ – некоторое множество натуральных чисел, $S_n(\Lambda)$ – множество всех подстановок степени n, имеющих лишь циклы с длинами из множества Λ, $a_n(\Lambda) = |S_n(\Lambda)|/n!$, где $|S_n(\Lambda)|$ – мощность конечного множества $S_n(\Lambda)$. В статье изучается асимптотика $a_n(\Lambda)$ при $n \to \infty$ в зависимости от плотности γ множества Λ. Здесь и далее $\gamma = \lim\limits_{x\to\infty} N_\Lambda(x)/x$, где $N_\Lambda(x) = \sum\limits_{\substack{\lambda\leqslant x \\ \lambda\in\Lambda}} 1$. К настоящему времени на эту тему получен ряд результатов [1–7]. Прежде чем формулировать доказанные здесь утверждения, напомним одно определение [8].

Определение. Положительная функция $L(x)$ называется *медленно меняющейся на бесконечности*, если она измерима на полуоси $[A, \infty)$, $A > 0$, и для любого фиксированного $x_0 > 0$ выполняется равенство

$$\lim_{x\to\infty} \frac{L(x_0 x)}{L(x)} = 1.$$

Множество всех медленно меняющихся на бесконечности функций обозначим $\mathcal{L}$.

В статье получены следующие результаты.

Теорема 1. *Для любой последовательности Λ выполняется неравенство*

$$a_n(\Lambda) \leqslant \frac{1}{n} \exp\left\{ \sum_{\substack{\lambda\leqslant n \\ \lambda\in\Lambda}} \frac{1}{\lambda} \right\}.$$

© А.И. Павлов, 1991

Следствие 1. *Если γ – плотность множества Λ, то выполняется неравенство*

$$a_n(\Lambda) \leqslant n^{\gamma-1} L(n),$$

где $L(n) = \exp\left\{ \sum\limits_{\substack{\lambda \in \Lambda \\ \lambda \leqslant n}} \frac{1}{\lambda} - \gamma \ln n \right\}$. *При этом* $L \in \mathcal{L}$.

Теорема 2. *Пусть Λ_1 и Λ_2 – подмножества множества натуральных чисел такие, что $\Lambda_1 \cap \Lambda_2 = \phi$; при $\nu = 1,2$ и при $n \to \infty$ выполняется условие $a_n(\Lambda_\nu) \sim n^{\gamma_\nu - 1} L_\nu(n)$, где $0 \leqslant \gamma_\nu < 1$, γ_ν не зависит от n, $L_\nu \in \mathcal{L}$, $\Lambda = \Lambda_1 \cup \Lambda_2$. Тогда:*

1) *если $\gamma_1 > 0$ и $\gamma_2 > 0$, то $a_n(\Lambda) \sim C n^{\gamma-1} L(n)$, $n \to \infty$, где $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$, $L(n) = L_1(n) L_2(n)$ и $C = \Gamma(\gamma_1)\Gamma(\gamma_2)/\Gamma(\gamma)$, $\Gamma(t)$* – гамма-функция;

2) *если $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$, то при $n \to \infty$*

$$a_n(\Lambda) = \frac{1+o(1)}{n} \left(L_1(n) \sum_{1 \leqslant m \leqslant n} \frac{L_2(m)}{m} + L_2(n) \sum_{1 \leqslant m \leqslant n} \frac{L_1(m)}{m} \right).$$

Теорема 3. *Пусть Λ_1 и Λ_2 – непересекающиеся подмножества множества натуральных чисел. Если $a_n(\Lambda_1) \sim n^{\gamma-1} L(n)$, $n \to \infty$, $\gamma \in (0,1)$ и не зависит от n, $L \in \mathcal{L}$, плотность множества Λ_2 равна 0 и $\Lambda = \Lambda_1 \cup \Lambda_2$, то $a_n(\Lambda) \sim n^{\gamma-1} L(n) L_0(n)$, где*

$$L_0(n) = \exp\left\{ \sum_{\substack{\lambda \leqslant n \\ \lambda \in \Lambda_2}} \frac{1}{\lambda} \right\}, \quad L_0 \in \mathcal{L}.$$

Следствие 2. *Если Λ_1 – множество всех нечетных чисел, а Λ_2 – множество всех удвоенных простых чисел, то*

$$a_n(\Lambda) \sim c_0 \left(\frac{\ln n}{n} \right)^{1/2}, \quad n \to \infty,$$

где

$$C_0 = \left(\frac{2}{\pi} \right)^{1/2} e^{(E - C_1)/2},$$

E – постоянная Эйлера,

$$C_1 = \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{p} \frac{1}{kp^k}$$

и внутреннее суммирование ведется по всем простым числам $p \geqslant 2$, $\Lambda = \Lambda_1 \cup \Lambda_2$.

Теорема 4. *Пусть для некоторого множества Λ натуральных чисел*

$$a_n(\Lambda) \sim n^{\gamma-1} L(n), \quad n \to \infty,$$

где $\gamma \in [0,1)$ не зависит от n, $L \in \mathcal{L}$. Тогда:

1) *если $\gamma > 0$, то*

$$\sum_{\substack{\lambda \leqslant n \\ \lambda \in \Lambda}} \frac{1}{\lambda} = \gamma \ln n + \ln L(n) + O(1); \tag{1}$$

2) *если $\gamma = 0$ и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{L(n)}{n}$ сходится, то $\sum\limits_{\lambda \in \Lambda} \frac{1}{\lambda} < \infty$;*

3) *если* $\gamma = 0$ *и ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{L(n)}{n}$ *расходится, то*

$$\sum_{\substack{\lambda \leqslant n \\ \lambda \in \Lambda}} \frac{1}{\lambda} = \ln\Big(\sum_{1 \leqslant m \leqslant n} \frac{L(m)}{m} + o(1), \qquad n \to \infty.$$

Следствие 3. *Если* $a_n(\Lambda) \sim n^{\gamma-1} L(n)$, $n \to \infty$, *где* $\gamma \geqslant 0$ *и* $L \in \mathcal{L}$, *то*

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{\ln x} \sum_{\substack{\lambda \in \Lambda \\ \lambda \leqslant x}} \frac{1}{\lambda} = \gamma.$$

Сделаем несколько замечаний к формулировкам приведенных теорем.

Замечание 1. Как показывает случай арифметической прогрессии, теорема 1 по порядку неулучшаема.

Замечание 2. Пользуясь теоремой 1, легко показать, что в теореме 2

$$\gamma_1 + \gamma_2 \leqslant 1.$$

Замечание 3. Доказательство теоремы 3 основано на лемме 2, которая восходит к известным работам Г. Фрейда по тауберовым теоремам с остатком.

Замечание 4. Пусть Λ удовлетворяет условию (1), где $\gamma > 0$. Тогда согласно теореме 1

$$a_n(\Lambda) = O(n^{\gamma-1} L(n)), \qquad n \to \infty.$$

С другой стороны, следуя рассуждениям при доказательстве теоремы 4, можно показать, что для любого достаточно малого $\epsilon > 0$ из (1) следует существование бесконечного множества N натуральных чисел такого, что при $n \to \infty$ и $n \in N$ выполняется неравенство $a_n(\Lambda) > \epsilon n^{\gamma-1} L(n)$.

Замечание 5. При доказательстве теоремы 4 фактически доказано несколько больше, чем сформулировано: если $\gamma = 0$ и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{L(n)}{n}$ расходится, то

$$\sum_{\substack{\lambda \leqslant R \\ \lambda \in \Lambda}} \frac{1}{\lambda} = \ln S(R) + O\Big(\Big(\frac{L(R)}{S(R)}\Big)^{C_1}\Big),$$

где

$$S(R) = \sum_{1 \leqslant m \leqslant R} \frac{L(m)}{m},$$

$C_1 > 0$, C_1 не зависит от R, и $S(R)/L(R) \to \infty$ при $R \to \infty$. В дальнейшем будем пользоваться следующими утверждениями (см. соответственно [8, 9]).

Лемма А. *Если функция* L *определена при всех* $x > x_0 > 0$ *и медленно меняется на бесконечности, то существует* $x_1 > x_0$ *такое, что при всех* $x \geqslant x_1 > A$

$$L(x) = \exp\Big\{\eta(x) + \int_{x_1}^{x} \frac{\epsilon(t)}{t}\, dt\Big\},$$

где η *и* ϵ *– ограниченные на* $[x_0, \infty)$ *функции такие, что* $\eta(x) \to C$ $(|C| < \infty)$ *и* $\epsilon(x) \to 0$ *при* $x \to \infty$.

Лемма В. *Для любого множества* Λ *натуральных чисел выполняется равенство*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(\Lambda) z^n = \exp\Big\{\sum_{\lambda \in \Lambda} \frac{z^\lambda}{\lambda}\Big\}, \quad |z| < 1, \quad a_0(\Lambda) = 1.$$

Доказательство теоремы 1. Согласно лемме В

$$a_n(\Lambda) = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{T_s(n)}{s!},$$

где

$$T_s(n) = \sum_{\substack{\lambda_1, \ldots, \lambda_s \in \Lambda \\ \lambda_1 + \ldots + \lambda_s = n}} \frac{1}{\lambda_1 \ldots \lambda_s}.$$

Ясно, что $T_1(n) \leqslant 1/n$. Пусть $s \geqslant 2$. Тогда

$$T_s(n) = \frac{1}{n} \sum_{\substack{\lambda_1, \ldots, \lambda_s \in \Lambda \\ \lambda_1 + \ldots + \lambda_s = n}} \frac{\lambda_1 + \ldots + \lambda_s}{\lambda_1 \ldots \lambda_s} =$$

$$= \frac{s}{n} \sum_{\substack{\lambda_1, \ldots, \lambda_s \in \Lambda \\ \lambda_1 + \ldots + \lambda_s = n}} \frac{1}{\lambda_1 \ldots \lambda_{s-1}} \leqslant \frac{s}{n} \Big(\sum_{\substack{\lambda \leqslant n \\ \lambda \in \Lambda}} \frac{1}{\lambda} \Big)^{s-1}.$$

Поэтому

$$a_n(\Lambda) \leqslant \frac{1}{n} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{(s-1)!} \Big(\sum_{\substack{\lambda \leqslant n \\ \lambda \in \Lambda}} \frac{1}{\lambda} \Big)^{s-1} = \frac{1}{n} \exp\Big\{ \sum_{\substack{\lambda \leqslant n \\ \lambda \in \Lambda}} \frac{1}{\lambda} \Big\}.$$

Теорема 1 доказана.

Доказательство следствия 1. В доказательстве нуждается лишь включение $L \in \mathcal{L}$. Из определения плотности γ при фиксированном $C > 1$ имеем: для любого $\epsilon > 0$ существует $x_0 = x_0(\epsilon)$ такое, что при всех $x > x_0$ выполняется равенство

$$\sum_{\substack{\lambda \in \Lambda \\ x < \lambda \leqslant Cx}} \frac{1}{\lambda} = \frac{N(Cx)}{Cx} - \frac{N(x)}{x} + \int_x^{Cx} \frac{N(t)}{t^2} dt = \vartheta_1 + \gamma \ln C + \vartheta_2 \ln C,$$

где $|\vartheta_1| + |\vartheta_2| < \epsilon$. Значит,

$$\lim_{x \to \infty} \frac{L(Cx)}{L(x)} = \lim_{x \to \infty} \exp\Big\{ \sum_{\substack{\lambda \in \Lambda \\ x < \lambda \leqslant Cx}} \frac{1}{\lambda} - \gamma \ln C \Big\} = 1.$$

Аналогично доказывается, что при $0 < C < 1$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{L(Cx)}{L(x)} = 1.$$

Следовательно, $L \in \mathcal{L}$.

Доказательство теоремы 2. Согласно лемме В при $0 \leqslant T \leqslant n$ и $\Lambda_1 \cap \Lambda_2 = \phi$

$$a_n(\Lambda) = \sum_{m=0}^{n} a_{n-m}(\Lambda_1) a_m(\Lambda_2) = \Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3,$$

где

$$\Sigma_1 = \sum_{0 \leqslant m \leqslant T} a_{n-m}(\Lambda_1) a_m(\Lambda_2),$$

$$\Sigma_2 = \sum_{T < m < n-T} a_{n-m}(\Lambda_1) a_m(\Lambda_2),$$

$$\Sigma_3 = \sum_{n-T \leqslant m \leqslant n} a_{n-m}(\Lambda_1) a_m(\Lambda_2), \quad n \geqslant 2T.$$

Пусть $T = T(n) \to \infty$ при $n \to \infty$ так, что $T/n \to 0$. Тогда при $\gamma_1 > 0$, $\gamma_2 > 0$ и $n \to \infty$

$$\Sigma_1 = O(n^{\gamma_1 - 1} L_1(n) \sum_{1 \leqslant m \leqslant T} m^{\gamma_2 - 1} L_2(m)),$$

$$\Sigma_3 = O(n^{\gamma_2 - 1} L_2(n) \sum_{1 \leqslant m \leqslant T} m^{\gamma_1 - 1} L_1(m)).$$

Далее,

$$\Sigma_2 = (1 + o(1)) \sum_{T < m < n - T} (n - m)^{\gamma_1 - 1} m^{\gamma_2 - 1} L_1(n-m) L_2(m).$$

Покажем, что T как функцию n можно выбрать так, что при $T \leqslant m \leqslant n - T$ и $n \to \infty$ будут иметь место асимптотики $(T = o(n))$

$$L_\nu(n - m) \sim L_\nu(n), \quad \nu = 1, 2.$$

По лемме **А**

$$L_\nu(x) = \exp\left\{ \eta_\nu(x) + \int_{x_1}^{x} \frac{\epsilon_\nu(t)}{t} dt \right\},$$

где $\eta_\nu(x) \to C_\nu$ и $\epsilon_\nu(x) \to 0$ при $x \to \infty$. Тогда

$$\frac{L_\nu(n - m)}{L_\nu(n)} = (1 + o(1)) \exp\left\{ - \int_{n-m}^{n} \frac{\epsilon_\nu(t)}{t} dt \right\}, \quad n \to \infty.$$

Пусть функция $\epsilon_0(t)$ не возрастает, $\lim\limits_{t \to \infty} \epsilon_0(t) = 0$ и при всех $t \geqslant t_0$ выполняется неравенство $|\epsilon_\nu(t)| \leqslant \epsilon_0(t)$, $\nu = 1, 2$. Тогда

$$\left| \int_{n-m}^{n} \frac{\epsilon_\nu(t)}{t} dt \right| \leqslant \int_{T}^{n} \frac{\epsilon_0(t)}{t} dt \leqslant \epsilon_0(T) \ln \frac{n}{T}.$$

Пусть $n = T \exp\{(\epsilon_0(T))^{-1/2}\}$. Тогда при $n \to \infty$

$$\frac{T}{n} \to 0, \qquad \epsilon_0(T) \ln \frac{n}{T} = (\epsilon_0(T))^{1/2} \to 0.$$

Значит, при таком T

$$\frac{L_\nu(n - m)}{L_\nu(n)} = 1 + o(1), \quad n \to \infty.$$

Следовательно, возвращаясь к Σ_2, получим, что

$$\Sigma_2 = (1 + o(1)) L_1(n) L_2(n) \sum_{T < m < n - T} (n - m)^{\gamma_1 - 1} m^{\gamma_2 - 1}.$$

Ясно, что при $\gamma_1 > 0$ и $\gamma_2 > 0$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n-1} \left(1 - \frac{m}{n}\right)^{\gamma_1 - 1} \left(\frac{m}{n}\right)^{\gamma_2 - 1} = \int_0^1 (1 - t)^{\gamma_1 - 1} t^{\gamma_2 - 1} dt = \frac{\Gamma(\gamma_1)\Gamma(\gamma_2)}{\Gamma(\gamma_1 + \gamma_2)},$$

где $\Gamma(t)$ – гамма-функция. Кроме того, при $n \to \infty$

$$\sum_{1 \leqslant m \leqslant T} (n-m)^{\gamma_1 - 1} m^{\gamma_2 - 1} = O(n^{\gamma_1 - 1} T^{\gamma_2}), \qquad \sum_{n-T<m\leqslant n-1} (n-m)^{\gamma_1 - 1} m^{\gamma_2 - 1} =$$

$$= O(T^{\gamma_1} n^{\gamma_2 - 1}).$$

Поэтому при $n \to \infty$

$$\Sigma_2 = (1 + o(1)) C n^{\gamma_1 + \gamma_2 - 1} L_1(n) L_2(n), \quad C = \frac{\Gamma(\gamma_1)\Gamma(\gamma_2)}{\Gamma(\gamma_1 + \gamma_2)}.$$

Известно [8, с. 82; 11], что

$$\sum_{1 \leqslant m \leqslant T} m^{\gamma_\nu - 1} L_\nu(m) = O(T^{\gamma_\nu} L_\nu(T)), \qquad \gamma_\nu > 0, \quad T \to \infty.$$

Поэтому если $\gamma_\nu > 0$, то

$$\Sigma_1 = O(n^{\gamma_1 - 1} T^{\gamma_2} L_1(n) L_2(n)), \qquad \Sigma_3 = O(T^{\gamma_1} n^{\gamma_2 - 1} L_1(n) L_2(n)).$$

Из $T/n \to 0$ при $n \to \infty$ следует, что

$$\Sigma_1 + \Sigma_3 = o(n^{\gamma_1 + \gamma_2 - 1} L_1(n) L_2(n)).$$

Это доказывает теорему 2 при $\gamma_1 > 0$ и $\gamma_2 > 0$.

Пусть $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$. Тогда, выбирая T как в предыдущем случае, при $n \to \infty$ получим, что

$$\Sigma_1 + \Sigma_3 = \frac{1 + o(1)}{n} \Big(L_1(n) \sum_{1 \leqslant m \leqslant T} \frac{L_2(m)}{m} + L_2(n) \sum_{1 \leqslant m \leqslant T} \frac{L_1(m)}{m}\Big),$$

$$\Sigma_2 = (1 + o(1)) L_1(n) L_2(n) \sum_{T<m<n-T} \frac{1}{(n-m)m}.$$

Следовательно, из

$$\sum_{T<m<n-T} \frac{1}{(n-m)m} = \frac{1}{n} \sum_{T<m<n-T} \Big(\frac{1}{n-m} + \frac{1}{m}\Big) = \frac{2}{n} \sum_{T<m\leqslant n-T} \frac{1}{m}$$

получим соотношение

$$\Sigma_2 = \frac{1 + o(1)}{n} \Big(L_1(n) \sum_{T<m<n-T} \frac{L_2(m)}{m} + L_2(n) \sum_{T<m<n-T} \frac{L_1(m)}{m}\Big).$$

Значит,

$$a_n(\Lambda) = \Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3 = \frac{1 + o(1)}{n} \Big(L_1(n) \sum_{1 \leqslant m \leqslant n} \frac{L_2(m)}{m} +$$

$$+ L_2(n) \sum_{1 \leqslant m \leqslant n} \frac{L_1(m)}{m}\Big) + O\Big(\frac{L_1(n)}{n} \sum_{n-T<m\leqslant n} \frac{L_2(m)}{m} + \frac{L_2(n)}{n} \sum_{n-T<m\leqslant n} \frac{L_1(m)}{m}\Big).$$

Если $T/n \to 0$, то при $\nu = 1, 2$

$$\sum_{n-T<m\leqslant n} \frac{L_\nu(m)}{m} = O\Big(L_\nu(n) \sum_{n-T<m\leqslant n} \frac{1}{m}\Big) = O\Big(\frac{T}{n} L_\nu(n)\Big).$$

Известно [8, с. 52; 12], что

$$L_\nu(n) = o\Big(\sum_{1<m\leqslant n} \frac{L_\nu(m)}{m}\Big), \qquad n \to \infty.$$

Следовательно, теорема 2 в случае $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$ доказана. Для доказательства теоремы 3 понадобятся четыре леммы. Пусть

$$N(t) = \sum_{\substack{\lambda\in\Lambda_2\\ \lambda\leqslant t}} 1, \quad b_n = \operatorname{coef}_{z^n} \exp\left\{\sum_{\lambda\in\Lambda_2} \frac{z^\lambda}{\lambda}\right\}, \quad |z|<1.$$

Лемма 1. *Если $N(t)/t \leqslant \epsilon(t)$, где $\epsilon(t)$ не возрастает, то*

$$\sum_{\lambda\in\Lambda_2} \frac{x^\lambda}{\lambda} = \sum_{\substack{\lambda\in\Lambda_2\\ \lambda\leqslant(1-x)^{-1}}} \frac{1}{\lambda} + O(\epsilon(\frac{1}{2(1-x)})), \quad x\to 1-0.$$

Доказательство. Пусть $R = (\ln\frac{1}{x})^{-1}$. Тогда $x = e^{-1/R}$. Значит,

$$\sum_{\lambda\in\Lambda_2} \frac{x^\lambda}{\lambda} = \sum_{\substack{\lambda\in\Lambda_2\\ \lambda\leqslant R}} \frac{1}{\lambda} - \sum_{\substack{\lambda\in\Lambda_2\\ \lambda\leqslant R}} \frac{1-e^{-\lambda/R}}{\lambda} + \sum_{\substack{\lambda\in\Lambda_2\\ \lambda> R}} \frac{e^{-\lambda/R}}{R}.$$

Так как $1-e^{-\alpha} < \alpha$ при любом $\alpha > 0$, то

$$\sum_{\substack{\lambda\in\Lambda_2\\ \lambda\leqslant R}} \frac{1-e^{-\lambda/R}}{\lambda} < \frac{1}{R}\sum_{\substack{\lambda\in\Lambda_2\\ \lambda\leqslant R}} 1 = \frac{N(R)}{R} \leqslant \epsilon(R).$$

Далее, при $R\to\infty$

$$\sum_{\substack{\lambda\in\Lambda_2\\ \lambda> R}} \frac{e^{-\lambda/R}}{\lambda} = \int_R^\infty \frac{e^{-t/R}}{t}\, dN(t) = -\frac{N(R)}{R}e^{-1} + \int_R^\infty N(t)(\frac{e^{-t/R}}{t^2} +$$

$$+ \frac{e^{-t/R}}{Rt})\, dt = O(\epsilon(R) + \frac{2\epsilon(R)}{R}\int_R^\infty e^{-t/R}\, dt) = O(\epsilon(R)).$$

При $x\to 1-0$ выполняются неравенства

$$\frac{1}{2(1-x)} < R < \frac{1}{1-x}.$$

Поэтому при $x\to 1-0$

$$\epsilon(R) \leqslant \epsilon(\frac{1}{2(1-x)}), \quad \sum_{\substack{\lambda\leqslant R\\ \lambda\in\Lambda_2}} \frac{1}{\lambda} = \sum_{\substack{\lambda\leqslant(1-x)^{-1}\\ \lambda\in\Lambda_2}} \frac{1}{\lambda} - \sum_{\substack{R<\lambda<(1-x)^{-1}\\ \lambda\in\Lambda_2}} \frac{1}{\lambda} =$$

$$= \sum_{\substack{\lambda\leqslant(1-x)^{-1}\\ \lambda\in\Lambda_2}} \frac{1}{\lambda} + O(\frac{1}{R}N(\frac{1}{1-x})) = \sum_{\substack{\lambda\leqslant(1-x)^{-1}\\ \lambda\in\Lambda_2}} \frac{1}{\lambda} + O(\epsilon(\frac{1}{1-x})).$$

Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Пусть выполнены условия леммы 1 и $\epsilon(t)\to 0$ при $t\to\infty$. Тогда если*

$$L_0(R) = \exp\left\{\sum_{\substack{\lambda\leqslant R\\ \lambda\in\Lambda_2}} \frac{1}{\lambda}\right\},$$

то

$$\sum_{0\leqslant m\leqslant R} b_m = L_0(R)(1 + O(\epsilon(\frac{R}{6}))), \quad R\to\infty.$$

Доказательство. Пусть

$$b(t)=\begin{cases} b_0 & \text{при } 0\leqslant t<1,\\ b_n & \text{при } n\leqslant t<n+1, \quad n\geqslant 1.\end{cases}$$

Тогда если $f(R)=\sum\limits_{m=0}^{\infty} b_m e^{-m/R}$, то $f(R)=\int\limits_0^{\infty} e^{-t/R}b(t)dt$. Согласно лемме 1 при $R_\nu=(1-e^{-\nu/R})^{-1}$, $\nu\geqslant 1$, и $R\to\infty$

$$f(\frac{R}{\nu})=\exp\left\{\sum_{\lambda\in\Lambda_2}\frac{e^{-\lambda\nu/R}}{\lambda}\right\}=L_0(R_\nu)(1+O(\epsilon(\frac{R_\nu}{2}))).$$

Следовательно,

$$\int\limits_0^{\infty} e^{-t\nu/R}b(t)\,dt=L_0(R_\nu)\,(1+O(\epsilon(\frac{R_\nu}{2}))),\quad R\to\infty.$$

Покажем, что при $R>\nu(\ln 2)^{-1}$ выполняются неравенства

$$R_\nu-1<\frac{R}{\nu}<R_\nu.$$

Из определения R_ν следует, что $R=\nu(\ln\dfrac{R_\nu}{R_\nu-1})^{-1}$. Легко видеть, что $R_\nu\to\infty$ при $R\to\infty$. Поэтому, пользуясь неравенствами $x-x^2/2<\ln(1+x)<x$, $0<x<1$, получим, что при $R_\nu>2$

$$R_\nu-1<(\ln(1+\frac{1}{R_\nu-1}))^{-1}<(\frac{1}{R_\nu-1}-\frac{1}{2(R_\nu-1)})^{-1}=\frac{2(R_\nu-1)^2}{2R_\nu-3}<R_\nu.$$

Значит, из монотонности функции $\epsilon(t)$ следует, что

$$\int\limits_0^{\infty} e^{-t/R}b(t)dt=L_0(R_1)(1+O(\epsilon(\frac{R}{2}))),\quad R\to\infty. \tag{2}$$

Аналогично,

$$\int\limits_0^{\infty} e^{-2t/R}b(t)dt=L_0(R_2)(1+O(\epsilon(\frac{R}{4}))),\quad R\to\infty, \tag{3}$$

$$\int\limits_0^{\infty} e^{-3t/R}b(t)\,dt=L_0(R_3)(1+O(\epsilon(\frac{R}{6}))),\quad R\to\infty. \tag{4}$$

Покажем, что при $R\to\infty$ выполняется равенство

$$L_0(R_\nu)=L_0(R)(1+O(\epsilon(\frac{R}{3}))),\quad \nu=1,2,3. \tag{5}$$

Действительно, согласно определению $L_0(R)$

$$L_0(R_\nu)=L_0(\frac{R}{\nu})\exp\left\{\sum_{\substack{R/\nu<\lambda\leqslant R_\nu\\ \lambda\in\Lambda_2}}\frac{1}{\lambda}\right\},\quad \nu=1,2,3.$$

Так как

$$\sum_{\substack{R/\nu<\lambda\leqslant R_\nu \\ \lambda\in\Lambda_2}} \frac{1}{\lambda} < \frac{\nu N(R_\nu)}{R} \leqslant \frac{\nu R_\nu}{R}\,\epsilon(R_\nu) \leqslant \frac{\nu R_\nu}{R}\,\epsilon\left(\frac{R}{\nu}\right) = O\left(\epsilon\left(\frac{R}{\nu}\right)\right),$$

$$L_0\left(\frac{R}{\nu}\right) = L_0(R)\left(1 + O\left(\epsilon\left(\frac{R}{\nu}\right)\right)\right), \quad \nu = 1, 2, 3, \quad R \to \infty,$$

то равенство (5) доказано. Пользуясь равенствами (2) – (5), получим, что

$$\int_0^\infty e^{-\nu t/R} b(t)\,dt = L_0(R)\left(1 + O\left(\epsilon\left(\frac{R}{6}\right)\right)\right), \quad \nu = 1, 2, 3, \quad R \to \infty.$$

Значит, если $P(x) = ax^2 + bx$, то

$$\int_0^\infty e^{-t/R} P(e^{-t/R}) b(t)\,dt = P(1) L_0(R)\left(1 + O\left(\epsilon\left(\frac{R}{6}\right)\right)\right), \quad R \to \infty. \tag{6}$$

Пусть

$$g(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 \leqslant x < e^{-1}, \\ x^{-1}, & \text{если } e^{-1} \leqslant x < 1. \end{cases}$$

Тогда если

$$S(R) = \sum_{0 \leqslant m \leqslant R-1} b_m = \int_0^R b(t)\,dt,$$

то

$$S(R) = \int_0^\infty e^{-t/R} g(e^{-t/R}) b(t)\,dt.$$

Легко видеть, что $3x^2 - 2x \leqslant g(x) \leqslant -12x^2 + 13x$ при $0 \leqslant x \leqslant 1$. Применяя эти неравенства, получим, что

$$\int_0^\infty e^{-t/R}(3e^{-2t/R} - 2e^{-t/R}) b(t)\,dt \leqslant S(R) \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^\infty e^{-t/R}(-12e^{-2t/R} + 13e^{-t/R}) b(t)\,dt.$$

В силу (6) левая и правая части этого неравенства есть $L_0(R)(1 + O(\epsilon(R/6)))$, $R \to \infty$. Поэтому, пользуясь теоремой 1, завершаем доказательство леммы 2.

Лемма 3. *Пусть $\sigma > 0$ и $L \in \mathcal{L}$. Тогда существует $m_0 > 0$ такое, что при всех $m_1 \geqslant m_2 > m_0$ выполняется неравенство*

$$m_1^{-\sigma} L(m_1) < 2 m_2^{-\sigma} L(m_2).$$

Доказательство. Пусть $\eta(t)$ и $\epsilon(t)$ – соответствующие функции из леммы А и m_0 таково, что при всех $m_1 \geqslant m_2 > m_0$ и $t \geqslant m_0$ выполняются неравенства

$$\eta(m_1) - \eta(m_2) < \ln 2, \quad \epsilon(t) < \sigma.$$

Тогда

$$\int_{m_2}^{m_1} \frac{\epsilon(t)}{t} dt < \sigma \ln \frac{m_1}{m_2}.$$

Значит, при $m_1 \geqslant m_2 > m_0$

$$\eta(m_1) - \eta(m_2) + \int_{m_2}^{m_1} \frac{\epsilon(t)}{t} dt < \sigma \ln \frac{m_1}{m_2} + \ln 2.$$

Отсюда согласно лемме А

$$\ln L(m_1) - \ln L(m_2) < \sigma \ln \frac{m_1}{m_2} + \ln 2.$$

Потенцируя это неравенство, получим лемму 3.

Аналогично доказывается

Лемма 4. *Пусть $\delta > 0$ и $L \in \mathcal{L}$. Тогда существует T_0 такое, что при всех $n > T > T_0$ выполняется неравенство*

$$L(T) < 2\left(\frac{n}{T}\right)^{\delta} L(n).$$

Доказательство теоремы 3. Пусть $T = T(n) \to \infty$ при $n \to \infty$, так что $T/n \to 0$, и

$$\Sigma_1 = \sum_{0 \leqslant m \leqslant T} a_{n-m}(\Lambda_1) b_m,$$

$$\Sigma_2 = \sum_{T < m < n-T} a_{n-m}(\Lambda_1) b_m,$$

$$\Sigma_3 = \sum_{n-T \leqslant m \leqslant n} a_{n-m}(\Lambda_1) b_m.$$

Тогда при $n \to \infty$

$$\Sigma_1 = (1 + o(1)) \sum_{0 \leqslant m \leqslant T} (n-m)^{\gamma-1} L(n-m) b_m =$$

$$= (1 + o(1)) n^{\gamma-1} L(n) \sum_{0 \leqslant m \leqslant T} \left(1 - \frac{m}{n}\right)^{\gamma-1} \frac{L(n-m)}{L(n)} b_m.$$

Из $L \in \mathcal{L}$ и леммы 2 получим, что

$$\Sigma_1 = (1 + o(1)) n^{\gamma-1} L(n) \left(\sum_{0 \leqslant m \leqslant T} b_m + O\left(\frac{T}{n} \sum_{0 \leqslant m \leqslant T} b_m\right)\right) =$$

$$= (1 + o(1)) n^{\gamma-1} L(n) L_0(T).$$

Согласно неравенству $1 - e^{-x} < x, \quad x > 0,$

$$0 \leqslant 1 - \frac{L_0(T)}{L_0(n)} = 1 - \exp\left\{ -\sum_{\substack{\lambda \in \Lambda_2 \\ T < \lambda \leqslant n}} \frac{1}{\lambda} \right\} < \sum_{\substack{\lambda \in \Lambda_2 \\ T < \lambda \leqslant n}} \frac{1}{\lambda} < \frac{N(n)}{T} \leqslant \frac{n}{T} \epsilon(n).$$

Значит, $L_0(T) = (1 + O(\frac{n}{T} \epsilon(n))) L_0(n)$. Поэтому

$$\Sigma_1 = (1 + o(1) + O(\frac{n}{T} \epsilon(n))) n^{\gamma-1} L(n) L_0(n), \quad n \to \infty.$$

Согласно лемме 3

$$\Sigma_2 = O(T^{\gamma-1}L(T)\sum_{T<m\leqslant n} b_m).$$

Но по лемме 2

$$\sum_{T<m\leqslant n} b_m = L_0(n) - L_0(T) + O(L_0(n)\epsilon(\frac{T}{6})) = O(\frac{n}{T}\,\epsilon\,(\frac{T}{6})L_0(n)).$$

Следовательно,

$$\Sigma_2 = O(nT^{\gamma-2}\epsilon(\frac{T}{6})L(T)L_0(n)).$$

Оценим Σ_3. Согласно теореме 1 при любом $m \geqslant 1$ выполняется неравенство $b_m \leqslant \leqslant L_0(m)/m$. Значит, при $n \to \infty$ и $\gamma > 0$

$$\Sigma_3 = O(\frac{L_0(n)}{n}\sum_{0\leqslant m\leqslant T} a_m(\Lambda_1)) = O(\frac{T^\gamma}{n}L(T)\,L_0(n)).$$

Согласно лемме 4 для любого фиксированного $\delta \in (0, \gamma)$ существует T_0 такое, что при всех $T > T_0$ и всех $n \geqslant T$ выполняется неравенство $L(T) < 2(n/T)^\delta L(n)$. Поэтому

$$\Sigma_2 + \Sigma_3 = O(n^{\gamma-1}L(n)L_0(n)((\frac{n}{T})^{2-\gamma+\delta}\epsilon(\frac{T}{6}) + (\frac{T}{n})^{\gamma-\delta})).$$

Пусть $T = n\epsilon^\alpha(\frac{T}{6})$, где $0 < \alpha < (2-\gamma+\delta)^{-1} < 1$ и α не зависит от T. Тогда при $T \to \infty$

$$(\frac{n}{T})^{2-\gamma+\delta}\epsilon(\frac{T}{6}) = (\epsilon(\frac{T}{6}))^{1-\alpha(2-\gamma+\delta)} \to 0, \quad \frac{T}{n} = \epsilon^\alpha(\frac{T}{6}) \to 0,$$

$$\frac{n}{T}\epsilon(n) \leqslant \frac{n}{T}\epsilon(\frac{T}{6}) = (\epsilon(\frac{T}{6}))^{1-\alpha} \to 0.$$

Поэтому при $n \to \infty$

$$a_n(\Lambda) = \Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3 = (1 + o(1))n^{\gamma-1}L(n)L_0(n).$$

Теорема 3 доказана.

Доказательство теоремы 4. Пусть $\epsilon > 0$. Тогда равномерно по ϵ при $R \to \infty$ согласно [11]

$$\sum_{0\leqslant n<\epsilon R} a_n(\Lambda)e^{-n/R} = O(\sum_{1\leqslant n<\epsilon R} n^{\gamma-1}L(n)) = O((\epsilon R)^\gamma L(\epsilon R)).$$

Пусть $C > 1$. Тогда, пользуясь леммой 3, находим, что равномерно по $C > 1$ при $R \to \infty$.

$$\sum_{n>CR} a_n(\Lambda)e^{-n/R} = O(\sum_{n>CR} n^{\gamma-1}L(n)e^{-n/R}) =$$

$$= O((CR)^{\gamma-1}L(CR)\sum_{n>CR} e^{-n/R}) = O(R^\gamma L(CR)e^{-C}C^{\gamma-1}).$$

Согласно лемме А утверждаем, что при любом $\gamma \in (0, 1)$ существует R_0 такое, что при всех $R > R_0$ и $C > 1$ выполняется неравенство

$$L(CR) < 2C^{1-\gamma}L(R).$$

Следовательно, равномерно по $C > 1$ при $R \to \infty$

$$\sum_{n > CR} a_n(\Lambda) e^{-n/R} = O(R^\gamma e^{-C} L(R)).$$

Пусть $x = e^{-1/R}$. Тогда если

$$f_\Lambda(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\Lambda) x^n,$$

то согласно полученным оценкам для любого фиксированного $\gamma' \in (0, \gamma)$

$$f_\Lambda(x) = \sum_{\epsilon R < n < CR} a_n(\Lambda) e^{-n/R} + O(R^\gamma L(R)(\epsilon^{\gamma'} + e^{-C})), \quad R \to \infty.$$

Если ϵ и C фиксированы, $0 < \epsilon < 1$ и $\epsilon R < n < CR$, то при $n \to \infty$

$$a_n(\Lambda) = (1 + O(1)) n^{\gamma - 1} L(n).$$

Снова применяя лемму А к функции $L(x)$, при $\epsilon R < n < CR$ и любом фиксированном достаточно малом $\delta > 0$ получим, что

$$\frac{L(n)}{L(R)} = 1 + o(1) + \vartheta \ln \frac{C}{\epsilon}, \quad |\vartheta| < \delta, \quad R \to \infty.$$

Поэтому

$$\sum_{\epsilon R < n < CR} a_n(\Lambda) e^{-n/R} = (1 + o(1) + O(\delta \ln \frac{C}{\epsilon})) L(R) \sum_{\epsilon R < n < CR} n^{\gamma - 1} e^{-n/R}.$$

Равномерно по ϵ и C при $R \to \infty$

$$\sum_{\epsilon R < n < CR} n^{\gamma - 1} e^{-n/R} = \int_{\epsilon R}^{CR} t^{\gamma - 1} e^{-t/R} dt + O((\epsilon R)^{\gamma - 1} + e^{-C}(CR)^{\gamma - 1}) =$$

$$= R^\gamma \int_{\epsilon}^{C} u^{\gamma - 1} e^{-u} du + O(R^{\gamma - 1}(\epsilon^{\gamma - 1} + e^{-C} C^{\gamma - 1})) =$$

$$= \Gamma(\gamma) R^\gamma + O(R^\gamma(\epsilon^\gamma + e^{-C}) + R^{\gamma - 1}(\epsilon^{\gamma - 1} + e^{-C} C^{\gamma - 1})).$$

Таким образом, при $R \to \infty$

$$f_\Lambda(x) = \Gamma(\gamma) R^\gamma L(R)(1 + o(1) + O(\delta \ln(C/\epsilon) +$$
$$+ \epsilon^{\gamma'} + e^{-C} + R^{-1}(\epsilon^{\gamma - 1} + e^{-C} C^{\gamma - 1}))).$$

Следовательно, полагая $\delta = (\ln(C/\epsilon))^{-2}$, в силу произвольности $\epsilon > 0$ и $C > 1$, получим, что

$$f_\Lambda(x) = (1 + o(1)) \Gamma(\gamma) R^\gamma L(R), \quad x = e^{-1/R}, \quad R \to \infty.$$

Отсюда по лемме В при $x < 1$ и $x \to 1$ следует, что

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} \frac{x^\lambda}{\lambda} = \gamma \ln R + \ln L(R) + \ln \Gamma(\gamma) + o(1), \quad R \to \infty.$$

Пользуясь этим равенством и леммой 1, завершаем доказательство теоремы 4 при $\gamma > 0$.

Пусть $\gamma = 0$. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{L(n)}{n}$ сходится, то ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(\Lambda)$ тоже сходится. Значит,

по теореме Абеля [10] о степенных рядах существует конечный предел

$$\lim_{x\to 1-0}\ (\sum_{n=0}^{\infty} a_n(\Lambda)x^n = f_\Lambda(1).$$

Поэтому существует

$$\lim_{x\to 1-0}\ (\sum_{\lambda\in\Lambda}\frac{x^\lambda}{\lambda}) = A = \ln f_\Lambda(1),\quad 0<A<+\infty.$$

Отсюда следует, что ряд $\sum\limits_{\lambda\in\Lambda}\frac{1}{\lambda}$ сходится. Действительно, согласно неравенству $e^{-\tau}>$ $>1-\tau$, $\tau>0$, при $0<\delta<1$ и $\tau=\lambda\ln\frac{1}{1-\delta}$

$$A>\sum_{\substack{\lambda\in\Lambda\\ \lambda\leqslant 1/\delta}}\frac{(1-\delta)^\lambda}{\lambda}>\sum_{\substack{\lambda\in\Lambda\\ \lambda\leqslant 1/\delta}}\frac{1-\lambda\ln\frac{1}{1-\delta}}{\lambda}=\sum_{\substack{\lambda\in\Lambda\\ \lambda\leqslant 1/\delta}}\frac{1}{\lambda}-N(\frac{1}{\delta})\ln\frac{1}{1-\delta},$$

где $N(t)=\sum\limits_{\substack{\lambda\in\Lambda\\ \lambda\leqslant t}}1$. Так как при $\delta\to 0$

$$N(\frac{1}{\delta})\ln\frac{1}{1-\delta}\sim\delta N(\frac{1}{\delta})\leqslant 1,$$

то при всех $\delta>\delta_0>0$ выполняется неравенство $\sum\limits_{\substack{\lambda\in\Lambda\\ \lambda\leqslant 1/\delta}}\frac{1}{\lambda}<A+1$. Значит, ряд $\sum\limits_{\lambda\in\Lambda}\frac{1}{\lambda}$ сходится.

Пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{L(n)}{n}$ расходится и $S(R)=\sum\limits_{1\leqslant n\leqslant R}\frac{L(n)}{n}$. Пусть $T=T(R)\to\infty$ при $R\to\infty$ так, что $T/R\to 0$ и $S(T)=o(S(R))$. Тогда при $R\to\infty$

$$f_\Lambda(x)=\sum_{0\leqslant n\leqslant T}a_n(\Lambda)e^{-n/R}+\sum_{n>T}a_n(\Lambda)e^{-n/R}=O(\sum_{1\leqslant n\leqslant T}\frac{L(n)}{n})+$$

$$+(1+o(1))\sum_{n>T}\frac{L(n)}{n}e^{-n/R}=(1+o(1))\sum_{n=1}^{\infty}\frac{L(n)}{n}e^{-n/R}+o(S(R)).$$

Пусть $\epsilon\in(0,1)$ фиксировано. Тогда, применяя лемму 3 к функции $x^{-1}L(x)$, находим, что

$$\sum_{n>\epsilon R}\frac{L(n)}{n}e^{-n/R}=O(\frac{L(\epsilon R)}{\epsilon R}\sum_{n>\epsilon R}e^{-n/R})=O(\frac{L(\epsilon R)}{\epsilon}),\quad R\to\infty.$$

С другой стороны,

$$\sum_{1\leqslant n\leqslant\epsilon R}\frac{L(n)}{n}e^{-n/R}=\sum_{1\leqslant n\leqslant\epsilon R}\frac{L(n)}{n}+O(\frac{1}{R}\sum_{1\leqslant n\leqslant\epsilon R}L(n))=\sum_{1\leqslant n\leqslant R}\frac{L(n)}{n}+$$

$$+O(\frac{L(\epsilon R)}{\epsilon R}R+\frac{\epsilon R}{R}S(\epsilon R))=\sum_{1\leqslant n\leqslant R}\frac{L(n)}{n}+O(\frac{L(\epsilon R)}{\epsilon}+\epsilon S(R)),\quad R\to\infty.$$

Значит,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{L(n)}{n} e^{-n/R} = \sum_{1 \leqslant n \leqslant R} \frac{L(n)}{n} + O\left(\frac{L(\epsilon R)}{\epsilon} + \epsilon S(R)\right), \quad R \to \infty.$$

Покажем, что $\epsilon = \epsilon(R)$ можно выбрать так, чтобы при $R \to \infty$ выполнялись условия $\epsilon(R) \to 0$ и

$$\frac{L(\epsilon R)}{\epsilon} = o(S(R)). \tag{7}$$

Согласно [12], ([8, с. 52]) из того, что $L \in \mathcal{L}$, следует, что $S \in \mathcal{L}$. Следовательно, по лемме А

$$L(R) = \exp\left\{\eta_1(R) + \int_{R_0}^{R} \frac{\delta_1(t)}{t} dt\right\}, \qquad S(R) = \exp\left\{\eta_2(R) + \int_{R_0}^{R} \frac{\delta_2(t)}{t} dt\right\},$$

где $\lim\limits_{R \to \infty} \eta_\nu(R) = C_\nu$, $\lim\limits_{R \to \infty} \delta_\nu(R) = 0$, $\nu = 1, 2$, C_1 и C_2 не зависят от R. Известно [12], что $L(R) = o(S(R))$, $R \to \infty$. Поэтому если

$$\psi(R) = \int_{R_0}^{R} \frac{\delta_2(t) - \delta_1(t)}{t} dt,$$

то $\lim\limits_{R \to \infty} \psi(R) = \infty$. Далее, если при $R > R_0$ выполняется неравенство $|\delta_1(R)| < \rho$, $\rho > 0$, то

$$\varphi(R) = \int_{R_0}^{R} \frac{\delta_2(t)}{t} dt - \int_{R_0}^{\epsilon R} \frac{\delta_1(t)}{t} dt - \ln \frac{1}{\epsilon} =$$

$$= \psi(R) + \int_{\epsilon R}^{R} \frac{\delta_1(t)}{t} dt - \ln \frac{1}{\epsilon} > \psi(R) - (1 + \rho) \ln \frac{1}{\epsilon}.$$

Значит, если

$$\epsilon(R) = \exp\left\{-\frac{\psi(R)}{2(1+\rho)}\right\},$$

то $\epsilon(R) \to 0$ при $R \to \infty$ и $\varphi(R) > \psi(R)/2 \to \infty$. Так как $\exp\{\varphi(R)\} = \epsilon S(R)/L(\epsilon R)$, то (7) выполнено. Поэтому, возвращаясь к $f_\Lambda(x)$, получим, что

$$f_\Lambda(x) = (1 + o(1)) S(R), \quad R \to \infty, \quad x = e^{-1/R}.$$

По лемме В отсюда следует, что

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} \frac{x^\lambda}{\lambda} = \ln S(R) + o(1), \quad R \to \infty.$$

Это равенство согласно лемме 1 завершает доказательство теоремы 4 при $\gamma = 0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Болотников Ю.В., Сачков В.Н., Тараканов В.Е. О некоторых классах случайных величин на циклах случайных подстановок // Мат. сб. – 1979. Т. 108, № 1. – С. 91–104.
2. Павлов А.И. О числе циклов и цикловой структуре подстановок некоторых классов // Мат. сб. – 1984. – Т. 124, № 4. – С. 536–556.

3. П а в л о в А.И. О некоторых классах подстановок с теоретико-числовыми ограничениями на длины циклов // Мат. сб. – 1986. – Т. 129, № 2. – С. 252–263.
4. П а в л о в А.И. О подстановках с длинами циклов из заданного множества // Теория вероятн. и ее примен. – 1986. – Т. 31, № 3. – С. 618–619.
5. Я к ы м и в А.Л. О числе *A*-подстановок // Мат. сб. – 1989. – Т. 180, № 2. – С. 294–303.
6. Я к ы м и в А.Л. О подстановках с длинами циклов из заданного множества // Дискретная математика. – 1989. – Т. 1, вып. 1. – С. 125–134.
7. К о л ч и н В.Ф. О числе подстановок с ограничениями на длины циклов // Дискретная математика. – 1989. – Т. 1, вып. 2. – С. 97–109.
8. С е н е т а Е. Правильно меняющиеся функции. – М.: Наука, 1985.
9. Р и о р д а н Д. Введение в комбинаторный анализ. – М.: ИЛ, 1963.
10. Т и т ч м а р ш Е. Теория функций. – М.: Наука, 1980.
11. K o h l b e k e r E.E. Wear asymptotic properties of partitions // Trans. Amer. Math. Soc. – 1958. – V. 88, № 2. – P. 346–365.
12. P a r a m e s w a r a n S. Partion functions whose logarithms are slowly oscillating // Trans. Amer. Math. Soc. – 1961. – V. 100, № 2. – P. 217–240.

Статья поступила 24.08.90