



Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

L. V. Muravleva, E. A. Muravleva, An iterative method for computing the flows of a viscoplastic Bingham medium,
Num. Meth. Prog., 2012, Volume 13, Issue 1, 161–171

<https://www.mathnet.ru/eng/vmp17>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<https://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.97.9.173

April 26, 2025, 23:09:58



УДК 519.6

ИТЕРАЦИОННЫЙ МЕТОД РАСЧЕТА ТЕЧЕНИЙ ВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКОЙ СРЕДЫ БИНГАМА

Л. В. Муравлёва¹, Е. А. Муравлёва¹

Рассматривается разностная схема для расчета плоских течений вязкопластической среды Бингама. В качестве математической модели среды используется вариационное неравенство Дюво–Лионса. Обе компоненты скорости аппроксимируются в узлах основной сетки, давление и все компоненты тензоров скоростей деформации и напряжений — в узлах полусмещенной сетки. Показано, что итерационный метод типа Узавы, используемый для нахождения решения вариационного неравенства, требует специальной адаптации в случае сеточной задачи. В качестве модельного примера рассматривается численное решение задачи о течении вязкопластической среды в каверне. Полученные результаты сравниваются с известными. Статья подготовлена к печати во время пребывания Е. А. Муравлёвой в Max Planck Institute for Mathematics in the Sciences, 04103, Leipzig, Germany. Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (коды проектов 11–01–00181-а и 09–01–00565-а).

Ключевые слова: вязкопластическая среда Бингама, вариационные неравенства, расширенный функционал Лагранжа, итерационный метод, полусмещенные сетки.

1. Введение. В природе и технике существует широкий круг материалов, таких как свежий бетон, геоматериалы (глинистые почвы, некоторые виды нефтей, буровые растворы, сели, магма), коллоидные растворы, порошкообразные смеси, смазочные материалы, металлы при обработке давлением, кровь в капиллярах, пищевые продукты, зубная паста и др., которые обладают поведением среды Бингама, а именно: ниже определенного предельного значения напряжений среда ведет себя как жесткое тело, выше этого предела — как несжимаемая вязкая жидкость.

Интерес к этой модели возник на рубеже XIX–XX веков после того, как в работах Шведова [1], Бингама [2] и др. было показано, что ряд реальных материалов обнаруживает такой тип реологического поведения. Модель была предложена для описания движения суспензий в условиях чистого сдвига (одномерная задача). Это — классический эксперимент, при котором можно получить зависимость между единственной ненулевой компонентой тензора напряжений и соответствующей компонентой тензора скоростей деформации (остальные $D_{ij} = 0$), например $\sigma_{12} = f(D_{12})$. Фактически это соответствует одноосному напряженному состоянию.

Переход к определяющим соотношениям в условиях многоосного (многокомпонентного) состояния является нетривиальной задачей. Позднее Генки [3] и Ильюшин [4] предложили пространственное обобщение уравнения состояния Шведова–Бингама и решили ряд задач для случая плоских течений вязкопластической среды при исследовании технологических задач обработки металлов давлением. В дальнейшем эта модель подробно исследовалась Олдройдом [5] и Прагером [6], Мосоловым и Мясниковым [7], а также Дюво и Лионсом [8]. Анализ различных вязкопластических материалов и перечень многих известных аналитических решений приведены в [7, 9, 10]. В [11, 12] решались задачи для более сложных моделей: вязкоупругопластической среды и течения вязкопластической жидкости в пористых средах. Дальнейшему исследованию математических свойств решений задач вязкопластичности посвящены работы [13–17].

2. Постановка задачи. Пусть Ω — ограниченная связная область в \mathbb{R}^n ($n = 2, 3$), Γ — граница области. Изотермическое течение несжимаемой вязкопластической среды (среды Бингама, или бингамовской жидкости) в течение временного интервала $(0, T)$ описывается следующей системой уравнений и определяющих соотношений:

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right] = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f} \quad \text{в } \Omega \times (0, T), \tag{1}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad \text{в } \Omega \times (0, T), \tag{2}$$

¹ Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, механико-математический факультет, Ленинские горы, 119899, Москва; Л. В. Муравлёва, доцент, e-mail: lvmurav@gmail.com; Е. А. Муравлёва, мл. науч. сотр., e-mail: catmurav@gmail.com

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + \boldsymbol{\tau}, \quad \boldsymbol{\tau} = \begin{cases} 2\mu\mathbf{D}(\mathbf{v}) + \sigma_s \frac{\mathbf{D}(\mathbf{v})}{|\mathbf{D}(\mathbf{v})|}, & \text{если } |\mathbf{D}(\mathbf{v})| \neq 0, \\ |\boldsymbol{\tau}| \leq \sigma_s, & \text{если } |\mathbf{D}(\mathbf{v})| = 0. \end{cases} \quad (3)$$

Систему (1)–(3) необходимо дополнить начальными и краевыми условиями. Для простоты будем рассматривать только краевые условия Дирихле:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(0) &= \mathbf{v}_0 & \text{в } \Omega, & \quad \nabla \cdot \mathbf{v}_0 = 0, \\ \mathbf{v} &= \mathbf{v}_B & \text{на } \Gamma \times (0, T), & \quad \int_{\Gamma} \mathbf{v}_B(t) \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma = 0 \quad \text{для всех } t \in (0, T). \end{aligned} \quad (4)$$

В уравнениях (1)–(4) используются стандартные обозначения: ρ , μ , σ_s — плотность, коэффициент вязкости и предел текучести бингамовской среды соответственно; \mathbf{v} — неизвестное поле скоростей; \mathbf{f} — заданное поле внешних сил; $\boldsymbol{\sigma}$ — тензор напряжений Коши; p — давление; $\boldsymbol{\tau}$ — девиатор тензора напряжений. Если задан произвольный тензор второго ранга с компонентами T_{ij} , то разложение его на шаровую часть и девиатор имеет вид $T_{ij} = T\delta_{ij} + T_{ij}^D$, где $T = \frac{1}{3}T_{kk}$ и $T_{kk}^D = 0$. В механике $|\boldsymbol{\tau}|$ называют интенсивностью напряжений. $\mathbf{D}(\mathbf{v}) = \frac{1}{2}[\nabla\mathbf{v} + (\nabla\mathbf{v})^T]$ — тензор скоростей деформаций с нормой $|\mathbf{D}(\mathbf{v})| = \left(\sum_{1 \leq i, j \leq n} |D_{ij}(\mathbf{v})|^2 \right)^{1/2}$, \mathbf{n} — вектор внешней единичной нормали на Γ .

Заметим, что если $\sigma_s = 0$, то система (1)–(4) сводится к системе уравнений Навье–Стокса, моделирующей изотермическое течение несжимаемой ньютоновской вязкой жидкости. В случае $\sigma_s > 0$ система (1)–(4) выполняется в области движения (т.е. $|\mathbf{D}(\mathbf{v})| > 0$) и, вообще говоря, не имеет смысла в жесткой зоне Ω_0 : $\Omega_0 = \{ \{\mathbf{x}, t\} \in \Omega \times (0, T) \mid D(\mathbf{v})(\mathbf{x}, t) = 0 \}$. Тензор напряжений в жесткой зоне не определен.

Модель Бингама является двухпараметрической моделью. Если в определяющих соотношениях вязкопластической среды положить $\sigma_s = 0$ или $\mu = 0$, то эти уравнения формально перейдут в хорошо известные определяющие соотношения вязкой жидкости или идеальной пластической среды. Если $\sigma_s > 0$, то в потоке могут быть зоны, в которых жидкость ведет себя как твердое тело (жесткие зоны). При возрастании σ_s эти зоны увеличиваются, а при достаточно большом σ_s блокируют течение. Как правило, традиционно рассматриваются два вида жестких зон: зоны застоя, в которых среда покоится, и ядра течения, в которых среда движется как твердое тело. Например, при течении в трубе ядра течения находятся строго внутри области, зоны застоя примыкают к неподвижной границе.

Когда существуют оба вида движения, необходимо ввести “предельную поверхность”. Эта поверхность разделяет две области с разным движением материала. Таким образом, в задачах о течении вязкопластической среды характерной особенностью является необходимость строить решения в областях с неизвестной границей. Это обстоятельство создает большие трудности при построении эффективных методов их исследования. Основная сложность при численном моделировании течения вязкопластической среды связана с сингулярностью определяющих соотношений (3) и невозможностью определить напряжения в тех областях, где скорость деформации равна нулю. Для того чтобы преодолеть отмеченные трудности, вводятся различные модификации модели бингамовской жидкости. Они приближают поведение вязкопластической среды. Запишем (3) в виде $\tau_{ij} = \eta(|\mathbf{D}(\mathbf{v})|)D_{ij}$, $\eta = 2\mu + \frac{\sigma_s}{|\mathbf{D}(\mathbf{v})|}$, если $|\mathbf{D}(\mathbf{v})| \neq 0$, и $|\boldsymbol{\tau}| \leq \sigma_s$, если $|\mathbf{D}(\mathbf{v})| = 0$.

Функция $\eta(D)$ называется эффективной вязкостью. Методы регуляризованной вязкости состоят в аппроксимации определяющих соотношений непрерывной функцией, которая описывает одновременно жесткую зону и зону течения. Таким образом, среда рассматривается как нелинейная вязкая жидкость (без использования предельной поверхности): $\tau_{ij} = \eta_\epsilon(|\mathbf{D}(\mathbf{v})|)D_{ij}$, $\epsilon \ll 1$, где $\eta_\epsilon(|\mathbf{D}(\mathbf{v})|) \rightarrow \eta(|\mathbf{D}(\mathbf{v})|)$ при $\epsilon \rightarrow 0$. Наиболее популярные модели:

- 1) Берковьера–Энгельмана [18]: $\eta_\epsilon = 2\mu + \sigma_s \left(\frac{1}{[\epsilon^2 + |\mathbf{D}(\mathbf{v})|^2]^{1/2}} \right)$,
- 2) Папанастаса [19]: $\eta_\epsilon = 2\mu + \sigma_s \left(\frac{1 - e^{-|\mathbf{D}(\mathbf{v})|/\epsilon}}{|\mathbf{D}(\mathbf{v})|} \right)$.

При использовании регуляризованных моделей при $\epsilon \rightarrow 0$ (т.е. когда модель приближает модель

Бингама) численные методы становятся менее эффективными и время вычислений растет очень быстро. Одним из недостатков регуляризованной модели является следующее: при значениях функции \mathbf{f} в правой части (1), меньших некоторого ненулевого критического значения, в среде Бингама течение в области отсутствует. При использовании регуляризованных моделей течение имеет место всегда, хотя и с малыми скоростями. В случае нестационарной задачи регуляризованная модель часто неправильно воспроизводит поведение решения [20–22]. Кроме того, для регуляризованных моделей не определено понятие жесткой зоны и наличие жесткой зоны вводится условием малости деформаций или условием Мизеса $|\boldsymbol{\tau}| = \sigma_s$. Это иногда приводит к неточному решению.

Альтернативой регуляризованным моделям могут служить вариационные методы. Постановка даже простейших задач для вязкопластической среды приводит к краевым задачам для нелинейных уравнений в областях с неизвестными границами. Здесь весьма плодотворным оказался вариационный подход [7], в частности метод вариационных неравенств [8]. Вариационная постановка, впервые предложенная А.А. Ильюшиным [4], дает возможность построения эффективных методов анализа конкретных задач. В частности, она позволяет дать метод изучения геометрической структуры решений, их асимптотического поведения, разработать эффективные численные методы. Различные алгоритмы для решения задач оптимизации можно найти в [23]. В монографиях [24–26] разработаны численные методы решения вариационных неравенств для среды Бингама, основанные на нерегуляризованной модели Бингама и множителях Лагранжа. В отечественной литературе методам решения вариационных неравенств посвящены работы [27–29].

3. Вариационная постановка. Пусть $\mathbf{D} : T = \sum_{i,j=1}^n D_{ij}T_{ij}$. Любое решение нелинейной системы (1)–

(4) удовлетворяет следующей вариационной задаче: найти $\mathbf{v}(t), p(t) \in (H^1(\Omega))^n \times L^2(\Omega)$, такие, что для каждого $t \in (0, T)$ справедливо

$$\begin{aligned} \rho \int_{\Omega} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{v}(t)) \, dx + \rho \int_{\Omega} (\mathbf{v}(t) \cdot \nabla) \mathbf{v}(t) \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{v}(t)) \, dx + 2\mu \int_{\Omega} \mathbf{D}(\mathbf{v}(t)) : \mathbf{D}(\mathbf{u} - \mathbf{v}(t)) \, dx + \\ + \sigma_s \int_{\Omega} (|\mathbf{D}(\mathbf{u})| - |\mathbf{D}(\mathbf{v}(t))|) \, dx \geq \int_{\Omega} \mathbf{f}(t) \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{v}(t)) \, dx \quad \forall \mathbf{u} \in U_B(t), \end{aligned} \quad (5)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v}(t) = 0 \quad \text{в } \Omega, \quad \mathbf{v}(0) = \mathbf{v}_0, \quad \mathbf{v}(t) = \mathbf{v}_B(t) \quad \text{на } \Gamma,$$

$$U_B = \left\{ \mathbf{u} \in (H^1(\Omega))^2 \mid \mathbf{u} = \mathbf{v}_B \quad \text{на } \Gamma, \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \right\}.$$

Таким образом, задача (5) является вариационной постановкой для (1)–(4), при этом она автоматически включает в себя задачу о “предельной поверхности”. Заметим, что давление можно ввести в вариационную формулировку как множитель Лагранжа, соответствующий ограничению $\nabla \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{v}(t)) = 0$.

Предположим, что течение является установившимся и медленным, т.е. можно пренебречь силами инерции по сравнению с силами вязкости (безынерционное приближение или приближение Стокса). Тогда систему уравнений движения (1), (2) можно заменить следующей системой уравнений:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f} = 0 \quad \text{в } \Omega \times (0, T), \quad (6)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad \text{в } \Omega \times (0, T). \quad (7)$$

Вариационная постановка (5) принимает вид

$$\begin{aligned} 2\mu \int_{\Omega} \mathbf{D}(\mathbf{v}) : \mathbf{D}(\mathbf{u} - \mathbf{v}) \, dx + \sigma_s \int_{\Omega} (|\mathbf{D}(\mathbf{u})| - |\mathbf{D}(\mathbf{v})|) \, dx \geq \\ \geq \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{v}) \, dx \quad \forall \mathbf{u} \in U_B, \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}_B \quad \text{на } \Gamma. \end{aligned} \quad (8)$$

Решение \mathbf{v} задачи (8) существует и единственно [8]. В дальнейшем будем рассматривать только плоские задачи. Введем следующий функционал (функционал Ильюшина):

$$J(\mathbf{u}) = \mu \int_{\Omega} |\mathbf{D}(\mathbf{u})|^2 \, dx + \sigma_s \int_{\Omega} |\mathbf{D}(\mathbf{u})| \, dx - \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} \, dx, \quad (9)$$

$$\mathbf{v} = \arg \min_{\mathbf{u} \in U_B} J(\mathbf{u}). \quad (10)$$

В работах [4, 7] было доказано, что решение задачи (6), (7), (3) является точкой минимума функционала (9). Эквивалентность постановок (9), (10) и (8) показана в [8].

Главная сложность при нахождении численного решения вариационной задачи (8) связана с недифференцируемостью слагаемого $\int_{\Omega} |\mathbf{D}(\mathbf{v})| dx$. В монографии [24] предложено несколько способов преодоления этой трудности. Широкое распространение получил метод множителей Лагранжа. Основная идея данного подхода заключается в разделении нелинейности и дифференцирования, которое происходит следующим образом: вводится независимая переменная $\gamma = \mathbf{D}(\mathbf{v}) \in Q$, где $Q = \{\mathbf{q} \mid \mathbf{q} \in (L^2(\Omega))^4; \mathbf{q}^T = \mathbf{q}\}$ — пространство суммируемых с квадратом в Ω симметричных тензоров второго ранга.

Определим функциональное пространство W и функционал $J(\cdot, \cdot): W \rightarrow \mathbb{R} \left((H^1\Omega)^2 = U \right)$:

$$W = \{\{\mathbf{u}, \mathbf{q}\} \mid \mathbf{u} \in U, \mathbf{q} \in Q, \mathbf{q} = \mathbf{D}(\mathbf{u})\}, \quad J(\mathbf{u}, \mathbf{q}) = \mu \int_{\Omega} |\mathbf{D}(\mathbf{u})|^2 dx + \sigma_s \int_{\Omega} |\mathbf{q}| dx - \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} dx. \quad (11)$$

Заметим, что задача (8) эквивалентна следующей: найти $\{\mathbf{v}, \gamma\} \in W$,

$$J(\mathbf{v}, \gamma) \leq J(\mathbf{u}, \mathbf{q}) \quad \forall (\mathbf{u}, \mathbf{q}) \in W. \quad (12)$$

Ограничение $\mathbf{q} = \mathbf{D}(\mathbf{u})$ можно снять с помощью множителя Лагранжа. Лагранжиан, соответствующий задаче (11), (12), естественно определить следующим образом:

$$\mathcal{L}(\mathbf{u}; \mathbf{q}; \boldsymbol{\lambda}) = \mu \int_{\Omega} |\mathbf{q}|^2 dx + \sigma_s \int_{\Omega} |\mathbf{q}| dx + \int_{\Omega} (\mathbf{D}(\mathbf{u}) - \mathbf{q}) : \boldsymbol{\lambda} dx - \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} dx. \quad (13)$$

Здесь $\boldsymbol{\lambda} \in Q$ является множителем Лагранжа, который можно интерпретировать как девиатор тензора напряжений. Тогда решение $\{\mathbf{v}, \gamma, \boldsymbol{\tau}\}$ является седловой точкой \mathcal{L} , т.е. $\mathcal{L}(\mathbf{v}; \gamma; \boldsymbol{\lambda}) \leq \mathcal{L}(\mathbf{v}; \gamma; \boldsymbol{\tau}) \leq \mathcal{L}(\mathbf{u}; \mathbf{q}; \boldsymbol{\tau})$. Для улучшения сходимости в работе [25] был введен расширенный лагранжиан $\mathcal{L}_r: U \times Q \times Q \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\mathcal{L}_r(\mathbf{u}; \mathbf{q}; \boldsymbol{\lambda}) = \mathcal{L}(\mathbf{u}; \mathbf{q}; \boldsymbol{\lambda}) + r \int_{\Omega} |\mathbf{D}(\mathbf{u}) - \mathbf{q}|^2 dx, \quad r \geq 0. \quad (14)$$

Доказано [25], что седловая точка $\{\mathbf{v}, \gamma, \boldsymbol{\tau}\}$ расширенного лагранжиана \mathcal{L}_r является седловой точкой лагранжиана \mathcal{L} , а пара $\{\mathbf{v}, \gamma\}$ — решением задачи (8) при всех $r > 0$.

4. Итерационный метод ALG2. Алгоритм [25], приведенный ниже, представляет собой обобщение метода Узавы для нахождения седловой точки нелинейной задачи.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Пусть заданы произвольные } \{\gamma^0, \boldsymbol{\tau}^1\} \in Q \times Q. \text{ Для } n = 0, 1, 2, \dots \text{ с известными } \{\gamma^{n-1}, \boldsymbol{\tau}^n\} \\ \text{последовательно выполняются следующие шаги.} \\ \text{Шаг 1. Найти } \mathbf{v}^n \in U_B, \text{ такой, что } \mathcal{L}_r(\mathbf{v}^n; \gamma^{n-1}; \boldsymbol{\tau}^n) \leq \mathcal{L}_r(\mathbf{u}; \gamma^{n-1}; \boldsymbol{\tau}^n) \quad \forall \mathbf{u} \in U_B. \\ \text{Шаг 2. Найти } \gamma^n \in Q, \text{ такой, что } \mathcal{L}_r(\mathbf{v}^n; \gamma^n; \boldsymbol{\tau}^n) \leq \mathcal{L}_r(\mathbf{v}^n; \mathbf{q}; \boldsymbol{\tau}^n) \quad \forall \mathbf{q} \in Q. \\ \text{Шаг 3. Вычислить } \boldsymbol{\tau}^{n+1} = \boldsymbol{\tau}^n + r(\mathbf{D}(\mathbf{v}^n) - \gamma^n). \end{array} \right\} \quad (15)$$

Данный алгоритм был предложен для реализации в методе конечных элементов (МКЭ) [30], где скорости аппроксимируются кусочно-линейными функциями, давление и компоненты тензоров деформаций и напряжений — кусочно-постоянными. Такой выбор дискретизации тензоров позволил свести задачу негладкой оптимизации (второй шаг алгоритма) к поточечным вычислениям на каждом элементе. В настоящей статье для дискретизации был выбран метод конечных разностей.

5. Разностная схема. Рассмотрим $\Omega = (0, 1)^2$ и положим $h_1 = N_1^{-1}$ и $h_2 = N_2^{-1}$ для заданных натуральных N_1 и N_2 . Определим следующие сеточные области:

$$\begin{aligned} \bar{\Omega}_1 &= \{x_{ij} = (ih_1, jh_2) \mid i = 0, \dots, N_1, j = 0, \dots, N_2\}, \\ \Omega_2 &= \{x_{ij} = ((i + 1/2)h_1, (j + 1/2)h_2) \mid i = 0, \dots, N_1 - 1, j = 0, \dots, N_2 - 1\}. \end{aligned}$$

Определим пространства компонент сеточных функций скорости и давления:

$$V_h^0 = \left\{ \mathbf{v}_{i,j} = (v_{i,j}^1, v_{i,j}^2) = (v^1(x_{ij}), v^2(x_{ij})) \mid x_{ij} \in \bar{\Omega}_1, \mathbf{v}_{0,j} = \mathbf{v}_{i,N_2} = \mathbf{v}_{N_1,j} = \mathbf{v}_{i,0} = \mathbf{0} \right\},$$

$$P_h = \left\{ p_{ij} = p(x_{ij}) \mid x_{ij} \in \Omega_2, \sum_{i,j} p_{ij} = 0 \right\}.$$

Через V_h будем обозначать пространства сеточных векторных функций, заданных только во внутренних точках Ω_1 . Пространство сеточных тензорных функций обозначим через Q_h :

$$Q_h = \left\{ \mathbf{q}_h \mid \mathbf{q}_h = \{q_h^{11}, q_h^{12}, q_h^{21}, q_h^{22}\}; (\mathbf{q}_h)_{i,j} = \mathbf{q}_h(x_{ij}), x_{ij} \in \Omega_2 \right\}.$$

Определим разностный аналог оператора дивергенции $\nabla_h \cdot : V_h^0 \rightarrow P_h$ и тензора скоростей деформации $\mathbf{D}_h : V_h^0 \rightarrow Q_h$:

$$(\nabla_h \cdot \mathbf{v}_h)_{i,j} = (v_{i+1,j+1}^1 - v_{i,j+1}^1 + v_{i+1,j}^1 - v_{i,j}^1)/2h_1 + (v_{i+1,j+1}^2 - v_{i+1,j}^2 + v_{i,j+1}^2 - v_{i,j}^2)/2h_2,$$

$$(D_h^{11}(\mathbf{v}_h))_{i,j} = (v_{i+1,j+1}^1 - v_{i,j+1}^1 + v_{i+1,j}^1 - v_{i,j}^1)/2h_1,$$

$$(D_h^{22}(\mathbf{v}_h))_{i,j} = (v_{i+1,j+1}^2 - v_{i+1,j}^2 + v_{i,j+1}^2 - v_{i,j}^2)/2h_2,$$

$$(D_h^{12}(\mathbf{v}_h))_{i,j} = (v_{i+1,j+1}^1 - v_{i+1,j}^1 + v_{i,j+1}^1 - v_{i,j}^1)/4h_2 + (v_{i+1,j+1}^2 - v_{i,j+1}^2 + v_{i+1,j}^2 - v_{i,j}^2)/4h_1.$$

Определим скалярное произведение и нормы:

$$(p_h, \varphi_h)_h = \sum_{\Omega_2} p_{i,j} \varphi_{i,j} h_1 h_2,$$

$$(\mathbf{w}_h, \mathbf{v}_h)_h = \sum_{\bar{\Omega}_1} (w_{i,j}^1 v_{i,j}^1 + w_{i,j}^2 v_{i,j}^2) h_1 h_2, \quad \mathbf{w}_h = (w_h^1, w_h^2)^T, \quad \mathbf{v}_h = (v_h^1, v_h^2)^T,$$

$$(\mathbf{q}_h, \boldsymbol{\lambda}_h)_h = \sum_{\Omega_2} (q_{i,j}^{11} \lambda_{i,j}^{11} + q_{i,j}^{12} \lambda_{i,j}^{12} + q_{i,j}^{21} \lambda_{i,j}^{21} + q_{i,j}^{22} \lambda_{i,j}^{22}) h_1 h_2,$$

$$\|p_h\|_h = (p_h, p_h)_h^{1/2}, \quad \|\mathbf{v}_h\|_h = (\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h)_h^{1/2}, \quad \|\mathbf{q}_h\|_h = (\mathbf{q}_h, \mathbf{q}_h)_h^{1/2}.$$

Введем разностные аналоги функционала (9) и лагранжианов (13), (14):

$$J_h(\mathbf{u}_h) = \mu \|\mathbf{D}_h(\mathbf{u}_h)\|_h^2 + \sigma_s j(\mathbf{D}_h(\mathbf{u}_h)) - (\mathbf{f}_h, \mathbf{u}_h)_h,$$

$$\mathcal{L}_h(\mathbf{u}_h, \mathbf{q}_h, \boldsymbol{\lambda}_h) = \mu \|\mathbf{q}_h\|_h^2 + \sigma_s j(\mathbf{q}_h) - (\mathbf{f}_h, \mathbf{u}_h)_h + (\mathbf{D}_h(\mathbf{u}_h) - \mathbf{q}_h, \boldsymbol{\lambda}_h)_h,$$

$$\mathcal{L}_{rh}(\mathbf{u}_h, \mathbf{q}_h, \boldsymbol{\lambda}_h) = \mathcal{L}_h(\mathbf{u}_h, \mathbf{q}_h, \boldsymbol{\lambda}_h) + r \|\mathbf{D}_h(\mathbf{u}_h) - \mathbf{q}_h\|_h^2, \quad r \geq 0,$$

$$j(\mathbf{q}_h) = \sqrt{(q_h^{11})_{i,j}^2 + (q_h^{12})_{i,j}^2 + (q_h^{21})_{i,j}^2 + (q_h^{22})_{i,j}^2}.$$

Задаче (10) соответствует следующая задача

$$\mathbf{v}_h = \arg \min_{\mathbf{u}_h \in V_h^0} J_h(\mathbf{u}_h). \tag{16}$$

Теорема 1 [31]. Пусть $(\mathbf{v}_h, \boldsymbol{\gamma}_h, \boldsymbol{\tau}_h)$ – седловая точка $\mathcal{L}_{rh}(\mathbf{u}_h, \mathbf{q}_h, \boldsymbol{\lambda}_h)$, т.е.

$$\mathcal{L}_{rh}(\mathbf{v}_h, \boldsymbol{\gamma}_h, \boldsymbol{\lambda}_h) \leq \mathcal{L}_{rh}(\mathbf{v}_h, \boldsymbol{\gamma}_h, \boldsymbol{\tau}_h) \leq \mathcal{L}_{rh}(\mathbf{u}_h, \mathbf{q}_h, \boldsymbol{\tau}_h).$$

Тогда она также является седловой точкой $\mathcal{L}_{r'h}$ для любого $r' \geq 0$ и \mathbf{v}_h – решение задачи (16).

Теорема 2 [31]. Пусть $(\mathbf{v}_h, \boldsymbol{\gamma}_h, \boldsymbol{\tau}_h)$ – седловая точка \mathcal{L}_{rh} на $V_h^0 \times Q_h \times Q_h$. Если $0 < \rho < r(1 + \sqrt{5})/2$, то имеет место следующая сходимость: $\mathbf{v}_h^n \rightarrow \mathbf{v}_h \in V_h^0$, $\boldsymbol{\gamma}_h^n \rightarrow \boldsymbol{\gamma}_h \in Q_h$. Более того, если $\boldsymbol{\tau}_h^*$ – предел подпоследовательности $\{\boldsymbol{\tau}_h^n\}$, тогда $(\mathbf{v}_h, \boldsymbol{\gamma}_h, \boldsymbol{\tau}_h^*)$ – седловая точка \mathcal{L}_{rh} на $V_h^0 \times Q_h \times Q_h$.

Теперь запишем алгоритм ALG2 (15).

Значения $\boldsymbol{\gamma}_h^0, \boldsymbol{\tau}_h^0$ задаются произвольно в $Q_h \times Q_h$.

Шаг 1. Предполагая $\boldsymbol{\gamma}_h^n$ и $\boldsymbol{\tau}_h^n$ известными, для $n \geq 0$ найти \mathbf{v}_h^{n+1} и p_h^{n+1} как решение задачи

$$-r \Delta_h \mathbf{v}_h^{n+1} + \nabla_h p_h^{n+1} = \nabla_h \cdot (\boldsymbol{\tau}_h^n - 2r \boldsymbol{\gamma}_h^n) + \mathbf{f}_h, \quad \nabla_h \cdot \mathbf{v}_h^{n+1} = 0, \quad \mathbf{v}_h^{n+1}|_{\partial\Omega_1} = \mathbf{v}_B.$$

Шаг 2. Вычислить γ_h^{n+1} следующим образом:

$$\gamma_h^{n+1} = \begin{cases} 0, & \text{если } \left| \tau_h^n + 2r\mathbf{D}(\mathbf{v}_h^{n+1}) \right| < \sigma_s, \\ \left(1 - \frac{\sigma_s}{\left| \tau_h^n + 2r\mathbf{D}(\mathbf{v}_h^{n+1}) \right|} \right) \frac{\tau_h^n + 2r\mathbf{D}(\mathbf{v}_h^{n+1})}{2(r + \mu)} & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (17)$$

Шаг 3. Вычислить τ_h^{n+1} согласно $\tau_h^{n+1} = \tau_h^n + 2\rho(\mathbf{D}_h(\mathbf{v}_h^{n+1}) - \gamma_h^{n+1})$. Если $|\tau_h^{n+1} - \tau_h^n| > \varepsilon$ для некоторого заданного $\varepsilon > 0$, то переходим к шагу 1.

Первый шаг алгоритма ALG2 заключается в решении задачи Стокса, правая часть для которой вычисляется по результатам предыдущей итерации. Для рассматриваемой дискретизации применение первого шага алгоритма приводит к использованию следующих сеточных аналогов оператора градиента $\nabla_h : P_h \rightarrow V_h$ и дивергенции $\nabla_h \cdot : Q_h \rightarrow V_h$:

$$\begin{aligned} (\nabla_h p_h)_{i,j} &= (\nabla_h p_h)_{i,j} = \left(\frac{p_{i,j} - p_{i-1,j} + p_{i,j-1} - p_{i-1,j-1}}{2h_1}, \frac{p_{i,j} - p_{i,j-1} + p_{i-1,j} - p_{i-1,j-1}}{2h_2} \right), \\ (\nabla_h \cdot \mathbf{q}_h)_{i,j} &= \left(\frac{q_{i,j}^{11} - q_{i-1,j}^{11} + q_{i,j-1}^{11} - q_{i-1,j-1}^{11}}{2h_1} + \frac{q_{i,j}^{12} - q_{i,j-1}^{12} + q_{i-1,j}^{12} - q_{i-1,j-1}^{12}}{2h_2}, \right. \\ &\quad \left. \frac{q_{i,j}^{21} - q_{i-1,j}^{21} + q_{i,j-1}^{21} - q_{i-1,j-1}^{21}}{2h_1} + \frac{q_{i,j}^{22} - q_{i,j-1}^{22} + q_{i-1,j}^{22} - q_{i-1,j-1}^{22}}{2h_2} \right), \end{aligned}$$

а также оператора Лапласа $\Delta_h : V_h^0 \rightarrow V_h$:

$$\begin{aligned} (\Delta_h \mathbf{v}_h)_{i,j} &= \frac{1}{4h_1^2} (\mathbf{v}_{i+1,j+1} - 2\mathbf{v}_{i,j+1} + \mathbf{v}_{i-1,j+1} + 2\mathbf{v}_{i+1,j} - 4\mathbf{v}_{i,j} + 2\mathbf{v}_{i-1,j} + \mathbf{v}_{i+1,j-1} - 2\mathbf{v}_{i,j-1} + \mathbf{v}_{i-1,j-1}) + \\ &\quad + \frac{1}{4h_2^2} (\mathbf{v}_{i+1,j+1} + 2\mathbf{v}_{i,j+1} + \mathbf{v}_{i-1,j+1} - 2\mathbf{v}_{i+1,j} - 4\mathbf{v}_{i,j} - 2\mathbf{v}_{i-1,j} + \mathbf{v}_{i+1,j-1} + 2\mathbf{v}_{i,j-1} + \mathbf{v}_{i-1,j-1}). \end{aligned}$$

При $h_1 = h_2 = h$ имеем $(\Delta_h \mathbf{v}_h)_{i,j} = \frac{\mathbf{v}_{i-1,j-1} + \mathbf{v}_{i+1,j-1} + \mathbf{v}_{i+1,j+1} + \mathbf{v}_{i-1,j+1} - 4\mathbf{v}_{i,j}}{2h^2}$ (так называемый “косой крест”). Второй шаг алгоритма (17), заключающийся в минимизации функционала $\mathcal{L}_h(\mathbf{v}_h, \gamma_h, \tau_h)$ по переменной γ_h , удалось свести к поточечным вычислениям. Третий шаг не вызывает никаких затруднений, так как он так же заключается в поточечных вычислениях.

Заметим, что данная разностная схема, построенная на лебедевских сетках [33, 34], для переменных скорость–давление (без дискретизации тензорных величин) использовалась для решения задачи Навье–Стокса [35]. Хорошо известно, что для задачи Стокса построенная разностная схема приводит к вырожденной матрице дополнения по Шуру, поскольку сеточный оператор градиента ∇_h , в отличие от непрерывного, имеет на пространстве P_h нетривиальное ядро вида

$$\text{Ker}(\nabla_h) = \text{span}(p^1, p^2), \quad p_{i,j}^1 = (-1)^{i+j} - 1, \quad p_{i,j}^2 = (-1)^{i+j+1} - 1, \quad (18)$$

в трехмерном случае размерность ядра увеличивается с уменьшением h [32]. Для возможности применения данной схемы используется один из двух подходов: либо введение в уравнение для давления стабилизирующей добавки специального вида [35, 36], либо поиск решения на подпространстве пространства P_h , ортогональном $\text{Ker}(\nabla_h)$ [37]. В данной работе используется второй подход.

6. Численные результаты. Поскольку первый шаг алгоритма ALG2 заключается в решении задачи Стокса, сначала приведем результаты численных экспериментов для задачи Стокса в $(0, 1)^2$ с известными аналитическими решениями.

6.1. Тригонометрический многочлен (вязкая жидкость). В этом случае

$$u = \frac{1}{4\pi^2} (1 - \cos 2\pi x) \sin 2\pi y, \quad v = \frac{1}{4\pi^2} \sin 2\pi x (1 - \cos 2\pi y), \quad p = \frac{1}{\pi} \sin 2\pi x \sin 2\pi y. \quad (19)$$

Результаты счета иллюстрируются в табл. 1. Даны значения нормы ошибки скорости $\mathbf{e}_h = \mathbf{v}|_{\Omega_1} - \mathbf{v}_h$ и давления $r_h = p|_{\Omega_2} - p_h$ в сеточном аналоге L_2 -нормы. В последнем столбце приведено число итераций

Таблица 1

Сходимость разностного решения и число итераций, пример (19)

h	$ e_h _{L_2}$	$\log_2 \left\{ e_h _{L_2} / e_{2h} _{L_2} \right\}$	$ r_h _{L_2}$	$\log_2 \left\{ r_h _{L_2} / r_{2h} _{L_2} \right\}$	#it
1/32	2.4860×10^{-4}	2.0042	1.2929×10^{-3}	2.0047	11
1/64	6.1969×10^{-5}	2.0010	3.2218×10^{-4}	2.0012	12
1/128	1.5481×10^{-5}	2.0002	8.0479×10^{-5}	2.0003	13
1/256	3.8695×10^{-6}	2.0001	2.0115×10^{-5}	2.0000	13
1/512	9.6730×10^{-7}		5.0288×10^{-6}		13

в методе Узавы — сопряженных градиентов, необходимое для уменьшения нормы невязки в 10^8 раз. Метод состоит в решении уравнения для давления с матрицей $B^T A^{-1} B$ с помощью метода сопряженных градиентов.

6.2. “Вихрь” в каверне (вязкая жидкость). Решение

$$\begin{aligned}
 u &= \left(1 - \cos\left(\frac{2\pi(e^{R_1x} - 1)}{e^{R_1} - 1}\right) \right) \sin\left(\frac{2\pi(e^{R_2y} - 1)}{e^{R_2} - 1}\right) \frac{R_2}{2\pi} \frac{e^{R_2y}}{e^{R_2} - 1}, \\
 v &= \sin\left(\frac{2\pi(e^{R_1x} - 1)}{e^{R_1} - 1}\right) \left(1 - \cos\left(\frac{2\pi(e^{R_2y} - 1)}{e^{R_2} - 1}\right) \right) \frac{R_1}{2\pi} \frac{e^{R_1x}}{e^{R_1} - 1}, \\
 p &= R_1 R_2 \sin\left(\frac{2\pi(e^{R_1x} - 1)}{e^{R_1} - 1}\right) \sin\left(\frac{2\pi(e^{R_2y} - 1)}{e^{R_2} - 1}\right) \frac{e^{R_1x} e^{R_2y}}{(e^{R_1} - 1)(e^{R_2} - 1)}
 \end{aligned}
 \tag{20}$$

имитирует “вихрь” в каверне, центр которого находится в точке

$$x_0 = \frac{1}{R_1} \log \frac{\exp(R_1) + 1}{2} \approx 0.842, \quad y_0 = \frac{1}{R_2} \log \frac{\exp(R_2) + 1}{2} \approx 0.512.$$

Таким образом, у правой границы области решение имеет пограничный слой [38]. Рис. 1 иллюстрирует распределение вектора скорости (а) и поля давления (б). Результаты счета при $R_1 = 4.2985$, $R_2 = 0.1$ приведены в табл. 2. Поскольку в пограничном слое возникают большие градиенты скорости и давления, то число итераций, необходимых для сходимости, больше, чем в предыдущем примере.

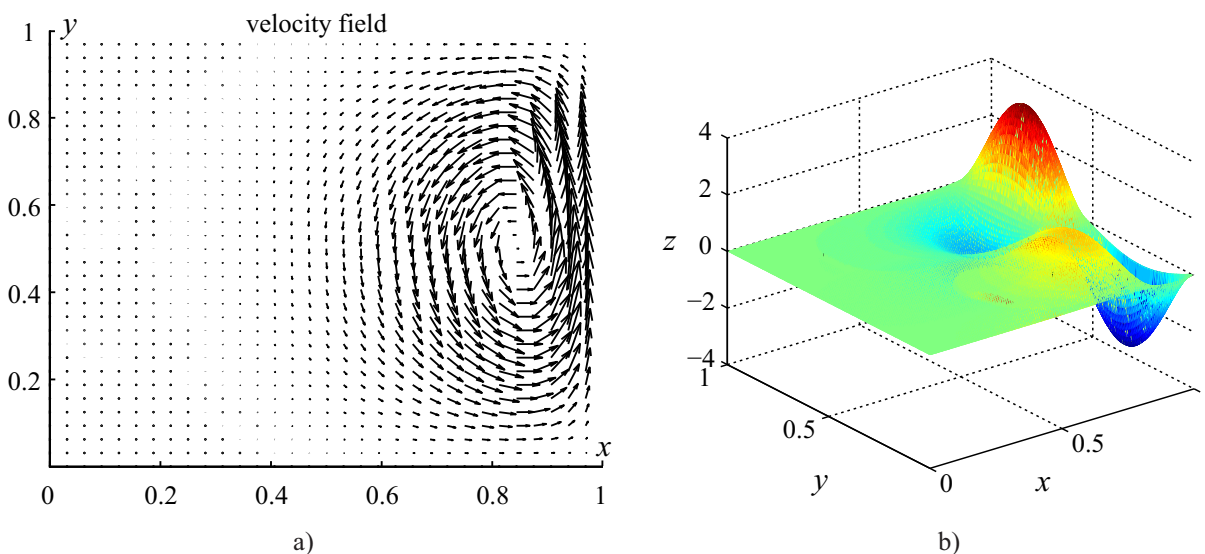


Рис. 1. Вектор скорости (а) и давление (б) для примера (20)

Расчеты, приведенные в табл. 1 и 2, демонстрируют второй порядок сходимости по скорости и по давлению.

Таблица 2

Сходимость разностного решения и число итераций, пример (20)

h	$ e_h _{L_2}$	$\log_2 \left\{ e_h _{L_2} / e_{2h} _{L_2} \right\}$	$ r_h _{L_2}$	$\log_2 \left\{ r_h _{L_2} / r_{2h} _{L_2} \right\}$	#it
1/32	7.3731×10^{-3}	2.0476	1.3453×10^{-1}	2.1129	14
1/64	1.7834×10^{-3}	2.0124	3.1101×10^{-2}	2.0290	14
1/128	4.4203×10^{-4}	2.0031	7.6204×10^{-3}	2.0073	14
1/256	1.1027×10^{-4}	2.0008	1.8955×10^{-3}	2.0018	15
1/512	2.7552×10^{-5}		4.7327×10^{-4}		15

6.3. Задача о каверне. Рассмотрим задачу о течении в каверне — самый известный тест в вычислительной гидродинамике для задачи Стокса. Она стала тестовой и для среды Бингама [24, 36, 39–41] и заключается в следующем. Пусть $\Omega = (0, 1)^2$, $\mathbf{f} = 0$ и $\Gamma_B = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{x} = (x_1, x_2), 0 < x_1 < 1, x_2 = 1\}$ — подвижная верхняя граница. Тогда краевые условия задаются в виде $\mathbf{v}_B(x) := \begin{cases} 0, & \text{если } x \in \Gamma \setminus \Gamma_B, \\ 1, & \text{если } x \in \Gamma_B. \end{cases}$

Если рассматривается течение вязкой жидкости в каверне с подвижной крышкой, то основными характеристиками численного решения являются распределение линий тока, интенсивность вихря и координаты его центра, срединный профиль скорости. Что касается задачи вязкопластичности, то “естественно, что наибольший интерес в проведенных численных экспериментах представляет задача определения жестких зон” [24]. Поэтому далее будут приведены как расположение жестких зон, так и основные гидродинамические характеристики. Отметим, что часто рассматривается не величина σ_s , а безразмерная величина $\text{Bn} = \sigma_s L / \mu V \sqrt{2}$ (число Бингама), где L — характерный линейный размер, V — характерная скорость; в настоящей задаче $\text{Bn} = \sigma_s / \sqrt{2}$.

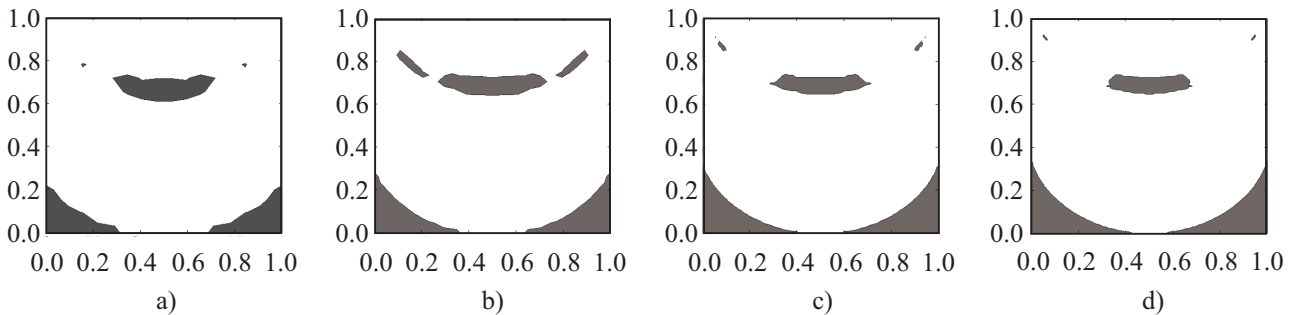


Рис. 2. Зависимость изображения жестких зон от шага расчетной сетки:

a) $h = 1/16$; b) $h = 1/32$; c) $h = 1/64$; d) $h = 1/128$

Для получения качественных численных результатов следует предварительно определить, насколько мелкими должны быть расчетные сетки. На рис. 2 приводятся результаты для сеток с $h = 1/16$ (a), $h = 1/32$ (b), $h = 1/64$ (c), $h = 1/128$ (d) ($\sigma_s = \sqrt{2}$, здесь и далее $\mu = 1$). Легко видеть, что размер, форма и расположение жестких зон существенно зависит от шага сетки, а размер шага, равный $1/16$ или $1/32$, не применим для практических расчетов. Для того чтобы получить правильную картину жестких зон, желательно использовать сетки с шагом $1/128$ и мельче. Все дальнейшие вычисления выполнены на сетке с $h = 1/256$ и критерием сходимости $\varepsilon = 10^{-4}$.

Проведем сравнение с работами [39] и [40], в которых решалась аналогичная задача. На рис. 3 приводится сравнение с работой [39], в которой использовалась регуляризованная модель Папанастаса и метод конечных элементов. При использовании МКЭ жесткие зоны определяются как совокупность элементов, на которых интенсивность напряжений не превышает предельного значения предела текучести. В нашем случае жесткие зоны определяются как изолинии $|\boldsymbol{\tau}_h| = \sigma_s$ (критерий Мизеса применяется к дискретному полю $\boldsymbol{\tau}_h$). Для возможности сравнения были выполнены вычисления при $\text{Bn} = 2, 20$. Результаты, полученные в настоящей работе (рис. 3b и 3d), хорошо согласуются с работой [39] (рис. 3a и 3c).

На рис. 4 изображены жесткие зоны и линии тока для различных значений Bn : $\text{Bn} = 0.1$ (a), $\text{Bn} = 1$ (b), $\text{Bn} = 10$ (c), $\text{Bn} = 100$ (d). Форма и размеры жестких зон хорошо согласуются с работами [40, 41].

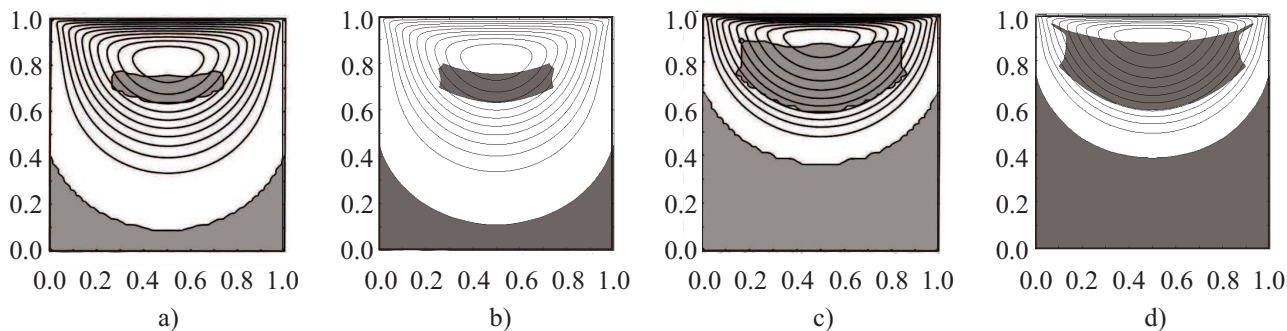


Рис. 3. Сравнение с работой [39]: а) $Bn = 2$ [39]; б) $Bn = 2$; в) $Bn = 20$ [39]; г) $Bn = 20$

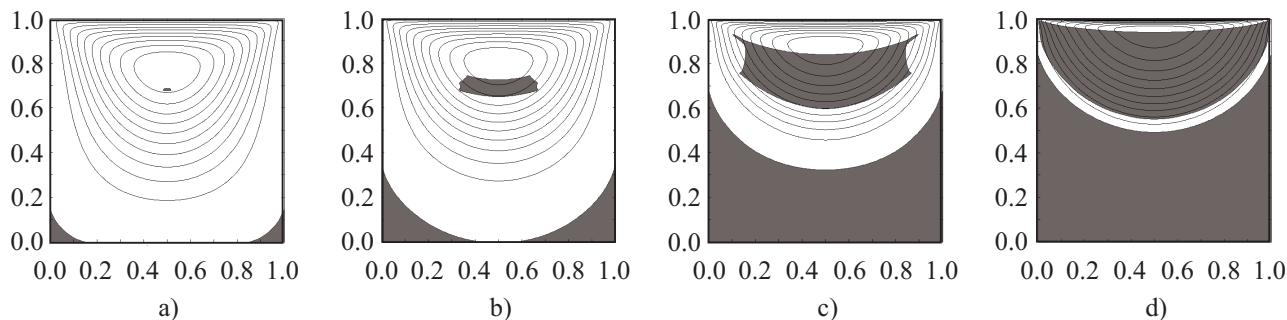


Рис. 4. Линии тока и распределение жестких зон в зависимости от числа Бингама, $h = 1/256$: а) $Bn = 0.1$; б) $Bn = 1$; в) $Bn = 10$; г) $Bn = 100$

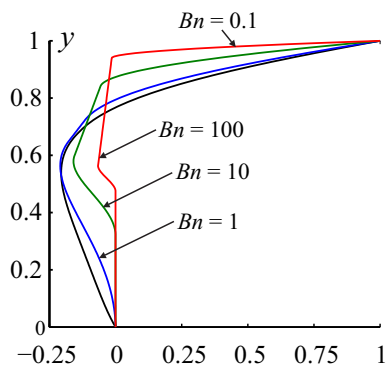


Рис. 5. Профили горизонтальной компоненты скорости

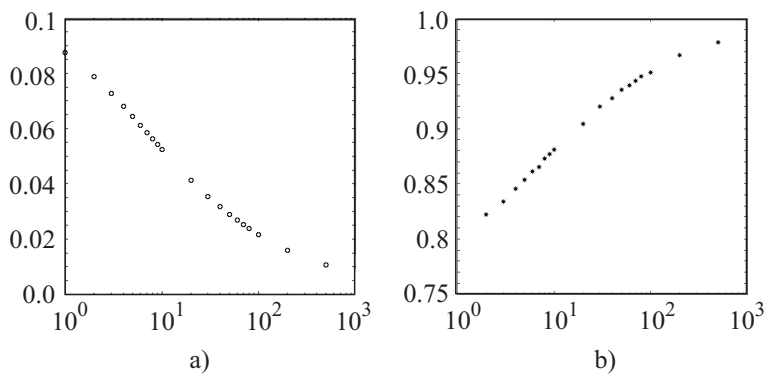


Рис. 6. Значение интенсивности вихря (а) и ордината центра вихря (б) в зависимости от числа Бингама

При $Bn = 0.1, 1$ присутствуют три жесткие зоны, одна из них расположена рядом с центром вихря, а другие — в нижних углах каверны; при больших значениях Bn (начиная с $Bn = 2$) — две жесткие зоны: одна центральная и одна — в нижней части каверны. Наблюдается вполне предсказуемая с точки зрения механики закономерность: при увеличении предела текучести жесткие зоны увеличиваются, область деформируемого течения уменьшается и поднимается выше. Эта закономерность хорошо заметна и на рис. 5, на котором изображены профили горизонтальной компоненты вектора скорости вдоль срединной линии $x = 0.5$ для различных значений Bn .

На рис. 6 приведены интенсивности вихря (а) и ордината центра вихря (б) в зависимости от числа Bn . С увеличением предела текучести центр вихря поднимается, а его интенсивность уменьшается, так как замедляется движение среды. Приведенные графики хорошо согласуются с соответствующими результатами [39, 40].

7. Заключение. Рассмотрена реализация итерационного алгоритма типа Узавы конечно-разностным методом на полусмещенных (лебедевских) сетках. Вычислительные эксперименты подтверждают эффективность рассматриваемого подхода. Отметим, что данный метод можно обобщить на широкий круг задач, включающий в себя трехмерные задачи в областях сложной формы с учетом конвекции и с различными

типами граничных условий. Кроме того, предложенный способ дискретизации представляется полезным для моделирования течений не только вязкопластических, но и других неньютоновских сред.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Shwedov F.N.* La rigidité de liquides // Rapport Congr. Intern. Phys. Paris. 1900. **1**. 478–486.
2. *Bingham F.C.* Fluidity and plasticity. New York: McGraw-Hill, 1922.
3. *Генки Г.* Пространственная задача упругого и пластического равновесия // Изв. АН СССР. Механика. ОТН. 1937. № 2. 187–196.
4. *Ильюшин А.А.* Деформация вязко-пластического тела // Уч. записки МГУ. Механика. 1940. Вып. 39. 3–81.
5. *Oldroyd J.G.* Two-dimensional plastic flow of a Bingham solid. A plastic boundary-layer theory for slow motion // Proc. Camb. Phil. Soc. 1947. **43**. 383–395.
6. *Prager W.* On slow visco-plastic flow // Studies in Mathematics and Mechanics. New York: Academic Press, 1954. 208–216.
7. *Мосолов П.П., Мясников В.П.* Вариационные методы в теории течений жестко-вязкопластических сред. М.: Изд-во Моск. гос. ун-та, 1971.
8. *Дюво Г., Лионс Ж.-Л.* Неравенства в механике и физике. М.: Наука, 1980.
9. *Byron-Bird R., Dai G.C., Yarusso B.J.* The rheology and flow of viscoplastic materials // Rev. Chem. Eng. 1983. **1**, N 1. 2–70.
10. *Огибалов П.М., Мурзаджанзаде А.Х.* Нестационарные движения вязкопластичных сред. М.: Изд-во Моск. гос. ун-та, 1970.
11. *Магомедов О.Б., Победря Б.Е.* Некоторые задачи вязкоупругопластического течения // Упругость и неупругость. Вып. 4. М.: Изд-во Моск. гос. ун-та, 1975. 152–169.
12. *Гольдштейн Р.В., Ентов В.М.* Качественные методы в механике сплошных сред. М.: Наука, 1989.
13. *Ladyzhenskaya O.A., Seregin G.A.* On semigroups generated by initial-boundary value problems describing two-dimensional visco-plastic flows // Amer. Math. Soc. Transl. 1995. **164**. 99–123.
14. *Fuchs M., Seregin G.A.* Variational methods for problems from plasticity theory and for generalized Newtonian fluids. Berlin: Springer, 2000.
15. *Repin S.* A posteriori estimates for partial differential equations. Berlin: De Gruyter, 2008.
16. *Shelukhin V.V.* Bingham viscoplastic as a limit of non-Newtonian fluids // J. Math. Fluid Mech. 2002. **4**, N 2. 109–127.
17. *Мамонтов А.Е.* Существование глобальных решений многомерных уравнений сжимаемой жидкости Бингама // Матем. заметки. 2007. **82**, № 4. 560–577.
18. *Bercovier M., Engelman M.* A finite element method for incompressible non-Newtonian flows // J. Comp. Phys. 1980. **36**. 313–326.
19. *Papanastasiou T.C.* Flows of materials with yield // J. Rheol. 1987. **31**, N 5. 385–404.
20. *Chatzimina M., Georgiou G.C., Argyropaidas I., Mitsoulis E., Huilgol R.R.* Cessation of Couette and Poiseuille flows of a Bingham plastic and finite stopping times // J. Non-Newtonian Fluid. Mech. 2005. **129**. 117–127.
21. *Muravleva L.V., Muravleva E.A., Georgiou G.C., Mitsoulis E.* Numerical simulations of cessation flows of a Bingham plastic with the augmented Lagrangian method // J. Non-Newtonian Fluid. Mech. 2010. **165**, N 9, 10. 544–550.
22. *Muravleva L.V., Muravleva E.A., Georgiou G.C., Mitsoulis E.* Uzawa-like algorithm on semi-staggered grids for unsteady Bingham medium flows // Rheol. Acta. 2010. **49**, N 11, 12. 1197–1206.
23. *Васильев Ф.П.* Методы оптимизации. М.: Факториал, 2002.
24. *Гловински Р., Лионс Ж.-Л., Тремольер Р.* Численное исследование вариационных неравенств. М.: Мир, 1979.
25. *Glowinski R., Fortin M.* Methodes de Lagrangien augmente, applications a la resolution de problemes aux limites. Dunod: Paris, 1982.
26. *Экланд И., Темам Р.* Выпуклый анализ и вариационные проблемы. М.: Мир, 1979.
27. *Антипин А.С.* Методы решения вариационных неравенств со связанными ограничениями // ЖВМ и МФ. 2000. **40**, № 3. 1291–1307.
28. *Лапин А.В.* Введение в теорию вариационных неравенств. Казань: Изд-во КГУ, 1981.
29. *Кравчук А.С.* Вариационные и квазивариационные неравенства в механике. М.: МГАПИ, 1997.
30. *Марчук Г.И., Агошков В.И.* Введение в проекционно-сеточные методы. М.: Наука, 1981.
31. *Муравлева Е.А.* Численные методы на основе вариационных неравенств для вязкопластической среды Бингама. Дисс. ... Москва, 2010.
32. *Муравлева Е.А.* О ядре дискретного оператора градиента // Вычислительные методы и программирование. 2008. **9**, № 1. 97–104.
33. *Лебедев В.И.* О методе сеток для одной системы уравнений в частных производных // Изв. АН СССР. Математика. 1958. **22**, № 5. 717–734.
34. *Лебедев В.И.* Разностные аналоги ортогональных разложений, фундаментальных дифференциальных операторов и основных начально-краевых задач математической физики // ЖВМ и МФ. 1964. **4**, № 3. 449–465.

35. *Вабищевич П.Н., Павлов А.Н., Чурбанов А.Г.* Численные методы решения нестационарных уравнений Навье–Стокса в естественных переменных на частично разнесенных сетках // Математическое моделирование. 1997. **9**, № 4. 85–114.
36. *Muravleva L.V., Muravleva E.A.* Uzawa-like algorithm on semi-staggered grids for unsteady Bingham medium flows // Rus. J. Num. Anal. and Math. Modelling. 2009. **24**, N 6. 543–563.
37. *Oseledets I.V., Muravleva E.A.* Fast orthogonalization to the kernel of the discrete gradient operator with application to Stokes problem // Lin. Alg. Appl. 2010. **432**, N 6. 1492–1500.
38. *Berrone S.* Adaptive discretization of the Navier–Stokes equations by stabilized finite element methods // Comput. Meth. Appl. Mech. Eng. 2001. **190(40)**. 4435–4455.
39. *Mitsoulis E., Zisis Th.* Flow of Bingham plastics in a lid-driven cavity // J. Non-Newtonian Fluid Mech. 2001. **101**. 173–180.
40. *Vola D., Boscardin L., Latche J.C.* Laminar unsteady flows of Bingham fluids: a numerical strategy and some benchmark results // J. Comp. Phys. 2003. **187**. 441–456.
41. *Dean E.J., Glowinski R., Guidoboni G.* On the numerical simulation of Bingham visco-plastic flow: old and new results // J. Non-Newtonian Fluid Mech. 2007. **142**. 36–62.

Поступила в редакцию
11.01.2012
