В. Л. Шаблов, В. А. Билык, Ю. В. Попов, Метод резольвентных интегральных уравнений в задаче о рассеянии трех частиц с кулоновским взаимодействием, *Фундамент. и прикл. матем.*, 1998, том 4, выпуск 4, 1207–1224

Метод резольвентных интегральных уравнений в задаче о рассеянии трех частиц с кулоновским взаимодействием

В. Л. ШАБЛОВ, В. А. БИЛЫК
Институт атомной энергетики, г. Обнинск

Ю. В. ПОПОВ
Научно-исследовательский институт ядерной физики МГУ

УДК 521.13

Ключевые слова: теория рассеяния, квантовая теория N тел, кулоновский потенциал, уравнение Липпмана–Швингера.

Аннотация

На основе развитой ранее стационарной теории рассеяния для систем частиц с кулоновским взаимодействием исследована структура сингулярностей трех заряженных частиц и получены интегральные уравнения для ядра этого оператора, в которых явно выделены соответствующие кулоновские сингулярности.

Abstract

V. L. Shablov, V. A. Bilyk, Yu. V. Popov, Method of resolvent integral equations in the problem of three particles' scattering with the Coulomb interaction, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika vol. 4 (1998), № 4, p. 1207–1224.

Method of resolvent type integral equations in the three-body problem with Coulomb interaction is presented.

Введение

Одной из актуальных проблем современной квантовой физики является изучение динамики взаимодействия в системе нескольких заряженных частиц с дальнодействующими кулоновскими силами. Особенностью систем частиц с кулоновским взаимодействием является то, что дальнодействующие кулоновские силы существенно изменяют динамику асимптотического движения частиц, а поэтому для кулоновских потенциалов нарушается обычное асимптотическое условие существования волновых операторов рассеяния. Как следствие оказываются неприменимыми обычные многоканальные уравнения Липпмана–Швингера и основанный на них метод резольвентных интегральных уравнений задачи N тел Фаддеева–Вейнберга–ван Винтера. Это требует модификации нестационарной и стационарной теорий рассеяния для систем

Фундаментальная и прикладная математика 1998, том 4, № 4, с. 1207–1224.

частиц с дальнодействующими кулоновскими потенциалами и разработки на их основе точных и приближенных методов изучения динамики квантовых систем с дальнодействующими потенциалами.

Последовательная стационарная теория рассеяния для системы N заряженных частиц, восходящая непосредственно к нестационарной теории в формулировках Долларда и Мулерина–Цинна, была развита в [1,2]. В ее основе лежат модифицированные уравнения Липпмана–Швингера для волновых операторов кулоновского рассеяния, свободные члены которых адекватно описывают асимптотическое искажение траекторий сталкивающихся частиц. Настоящая работа является продолжением [2] и посвящена описанию трехчастичного континуума в реакциях с участием заряженных частиц на основе нового прямого метода выделения трехчастичных особенностей амплитуды рассеяния в канале трехчастичного развала. Данный метод позволяет не только воспроизвести многие известные результаты теории кулоновского рассеяния, достигнутые с помощью аппарата дифференциальных уравнений [3, 4], но и получить новые результаты о свойствах трехчастичных кулоновских волновых функций и амплитуд.

Следует отметить, что до последнего времени проблема трехчастичных кулоновских сингулярностей была изучена недостаточно полно. С формальной точки зрения выделение этих сингулярностей было осуществлено в работе [5], однако полученная в этой работе алгебраическая система для компонент амплитуды трехчастичного развала на поверхности энергии является однородной, а потому не позволяет найти величины этих компонент. Кроме того, использование в [5] в качестве отправной точки уравнений Фаддеева приводит к необходимости исключить из окончательного ответа двухчастичные кулоновские сингулярности, поскольку их отсутствие предсказывается исходной нестационарной теорией [1–3].

Структура работы такова. В § 1 описано выделение кулоновских особенностей амплитуды рассеяния трех частиц и исследуются свойства этой амплитуды на энергетической поверхности. В § 2 построена функция Грина для n-мерного кулоновского потенциала ($n \geqslant 3$) в импульсном представлении и изучены ее особенности. Установлено, что эти особенности имеют при $n = 6$ тот же характер, что и особенности амплитуды развала в системе трех частиц. Данный факт позволяет получить еще одно представление для амплитуды трехчастичного развала, которое анализируется в § 3. В данной работе мы используем те же обозначения, что и в [2]. В частности, $G(Z)$ и $G_\alpha(Z)$ обозначают полную и канальную функции Грина системы

$$G(Z) = (Z - H)^{-1}, \quad G_\alpha(Z) = (Z - H_\alpha)^{-1},$$

где H — гамильтониан многочастичной (как правило, трехчастичной) системы с отделенным движением центра масс, H_α — соответствующий канальный гамильтониан. Оператор кинетической энергии системы трех частиц в импульсном представлении будет записываться в виде

$$H_0(\vec{k}_\alpha \vec{p}_\alpha) = k_\alpha^2/2\mu_\alpha + p_\alpha^2/2n_\alpha,$$

где $(\vec{k}_\alpha \vec{p}_\alpha)$ — набор координат Якоби, в котором $\vec{k}_\alpha$ обозначает относительный импульс в паре α (с приведенной массой μ_α), $\vec{p}_\alpha$ — импульс третьей частицы относительно центра масс этой пары.

§ 1. Выделение кулоновских особенностей в задаче трех заряженных частиц с конечными массами

В соответствии с результатами нестационарной теории кулоновского рассеяния амплитуда перехода из канала реакции α в канал реакции β может быть получена в результате следующей предельной процедуры [1, 2]:

$$t_{\beta\alpha}\left(\vec{p}_\beta, \vec{p}_\alpha^{\,0}, E + i0\right) = \lim_{\varepsilon\to 0} \langle \vec{p}_\beta | [\mathcal{F}_\beta^-(E - i\varepsilon)]^\dagger T_{\beta\alpha}(E + i\varepsilon) \mathcal{F}_\alpha^+(E + i\varepsilon) | \vec{p}_\alpha^{\,0} \rangle, \quad (1)$$

где $T_{\beta\alpha}(Z)$ есть оператор перехода между указанными каналами, определенный так же, как и в случае короткодействующих потенциалов [1, 6]:

$$T_{\beta\alpha}(Z) = \langle \Phi_\beta | V^\beta + V^\beta G(Z) V^\alpha | \Phi_\alpha \rangle, \quad (2)$$

где $V^\alpha = H - H_\alpha$ — сумма парных потенциалов взаимодействия, которые входят в состав различных фрагментов, сталкивающихся в канале α, $|\Phi_\alpha\rangle$ обозначает произведение волновых функций фрагментов, задающих этот канал.

Операторы $\mathcal{F}_\alpha^\pm(E \pm i0)$, именуемые далее ренормирующими кулоновскими операторами, явным образом выражаются через асимптотические кулоновские операторы Мулерина–Цинна $\mathbf{V}_\alpha^\pm$ [1, 2]:

$$\mathcal{F}_\alpha^\pm(E \pm i\varepsilon) = \pm i\varepsilon \langle \Phi_\alpha | G_\alpha(E \pm i\varepsilon) \mathbf{V}_\alpha^\pm | \Phi_\alpha \rangle, \quad (3)$$

где

$$\langle \vec{r}_\alpha | \mathbf{V}_\alpha^\pm | \vec{p}_\alpha \rangle = (2\pi)^{-\frac{3}{2}(N_\alpha - 1)} \exp(i\langle \vec{r}_\alpha, \vec{p}_\alpha \rangle) \prod_{(ij)\in\alpha} \exp\left(i\eta_{ij} \ln(p_{ij} r_{ij} \mp \vec{p}_{ij}\vec{r}_{ij})\right). \quad (4)$$

При этом $\exp(i\langle \vec{r}_\alpha, \vec{p}_\alpha \rangle)$ обозначает плоскую волну N_α сталкивающихся в канале α фрагментов, η_{ij} — кулоновский параметр пары фрагментов i и j с относительным импульсом $\vec{p}_{ij}$.

Как было показано в [1, 2], ренормирующие операторы удовлетворяют интегральному уравнению вида

$$\Gamma(1 \mp i\hat{\eta}_\alpha) \exp\left\{\frac{\pi}{2}\hat{\eta}_\alpha \mp i\hat{A}_\alpha\right\} \langle \Phi_\alpha | (E \pm i\varepsilon - H_\alpha) | \Phi_\alpha \rangle^{\pm i\hat{\eta}_\alpha} \mathcal{F}_\alpha^\pm(E \pm i\varepsilon) = I_\alpha, \quad (5)$$

где I_α — единичный оператор в гильбертовом пространстве $\mathcal{G}_\alpha$ канала α, $\hat{\eta}_\alpha$ — оператор умножения в импульсном пространстве на функцию

$$\eta_\alpha = \sum_{(ij)\in\alpha} \frac{\mu_{ij} Q_i Q_j}{p_{ij}} = \sum_{(ij)\in\alpha} \eta_{ij},$$

тогда как оператор $\hat{A}_\alpha$ соответствует умножению на функцию

$$A_\alpha = \sum_{(ij)\in\alpha} \eta_{ij} \ln \frac{2p_{ij}^2}{\mu_{ij}}.$$

Таким образом, оператор $\hat{A}_\alpha$ определяет «фазу» кулоновского асимптотического оператора Долларда.

В дальнейшем нам понадобятся также выражения для волновых функций кулоновского рассеяния [1, 2]:

$$|\psi_\alpha^\pm(\vec{p}_\alpha)\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0} [I + G(E \pm i\varepsilon)V^\alpha]\, \mathcal{F}_\alpha^\pm(E \pm i\varepsilon)|\Phi_\alpha \vec{p}_\alpha\rangle, \tag{6}$$

которое с помощью (3) можно привести к виду

$$|\psi_\alpha^\pm(\vec{p}_\alpha)\rangle = \mathbf{V}_\alpha^\pm |\Phi_\alpha \vec{p}_\alpha\rangle + G(E \pm i0)\left(V^\alpha \mathbf{V}_\alpha^\pm + [H_\alpha, \mathbf{V}_\alpha^\pm]\right)|\Phi_\alpha \vec{p}_\alpha\rangle. \tag{7}$$

Последнее соотношение записано в форме, в которой явно выделены необходимые координатные асимптотики [1–3].

Как было показано в [1, 2], уравнение (5) не имеет единственного решения. Один из возможных вариантов задания ренормирующих операторов $\mathcal{F}_\alpha^\pm(E \pm i\varepsilon)$ выглядит следующим образом:

$$\langle \vec{p}_\alpha | \mathcal{F}_\alpha^+(E + i\varepsilon)|\vec{p}_\alpha{}^0\rangle = \left[\frac{\lambda}{\pi^2} \exp\left\{\frac{\pi}{2}\eta_\alpha\right\} \Gamma(2 + i\eta_\alpha) \frac{((p_1^0 + i\lambda)^2 - p_1^2)^{i\eta_\alpha}}{((\vec{p}_1{}^0 - \vec{p}_1)^2 + \lambda^2)^{2+i\eta_\alpha}}\right] \times \\ \times \exp\left(i \sum_{1\neq\gamma\in\alpha} \eta_\gamma \ln \frac{2p_\gamma^2}{\mu_\gamma}\right) \prod_{1\neq\gamma\in\alpha} \delta(\vec{p}_\gamma{}^0 - \vec{p}_\gamma). \tag{8}$$

В (8) в канале α выделена произвольная пара заряженных фрагментов, обозначенная индексом 1, а параметры ε и λ связаны соотношением $\varepsilon = p_1^0\lambda/\mu_1$. Отметим, что конструкции типа (8) использовались ранее при развитии методов нестационарной теории кулоновского рассеяния [7, 8].

Как нетрудно видеть, выражение в квадратных скобках в (8) соответствует двухчастичному ренормирующему кулоновскому оператору (в паре с индексом 1). Дальнодействующая часть потенциала взаимодействия этих двух частиц описывается энергозависящим кулоновским потенциалом вида $\eta_\alpha p_1^0/(\mu_1 r_1)$. Именно это обстоятельство будет использовано в дальнейшем для выделения кулоновских особенностей трехчастичной амплитуды.

В соответствии с процедурой вычисления амплитуд реакций в многочастичной системе, оператор перехода $T_{\beta\alpha}(Z)$ может быть представлен в виде [1–3]

$$T_{\beta\alpha}(Z) = (Z_\beta - H_{0\beta})^{i\hat{\eta}_\beta} T_{\beta\alpha}^r(Z)(Z_\alpha - H_{0\alpha})^{i\hat{\eta}_\alpha} + R_{\beta\alpha}(Z), \tag{9}$$

причем оператор $T_{\beta\alpha}^r$ характеризуется тем, что его матричные элементы на поверхности энергии являются регулярными функциями. В (9) $Z_\beta = Z + \kappa_\beta^2$, где $-\kappa_\beta^2$ — энергия связи фрагментов, сталкивающихся в канале β, $H_{0\beta}$ — оператор кинетической энергии относительного движения этих фрагментов.

Про матричные элементы оператора $R_{\beta\alpha}(Z)$ на поверхности энергии, таким образом, известно лишь, что они не содержат сингулярностей типа $(i\varepsilon)^{i\eta_\alpha}$, но, возможно, содержат другие особенности.

Для определенности в дальнейшем будем рассматривать задачу трех частиц с конечными массами, дальнодействующая часть потенциала взаимодействия между которыми имеет вид

$$V_c = \sum_{i<j} \frac{\lambda_{ij}}{r_{ij}}.$$

Тогда для оператора

$$T(Z) = V^\alpha |\Phi_\alpha\rangle + VG(Z)V^\alpha|\Phi_\alpha\rangle, \tag{10}$$

определяющего амплитуду перехода из двухчастичного канала α в нулевой канал реакции (т. е. канал трехчастичного развала), можно записать интегральное уравнение вида

$$T(Z) = V^\alpha |\Phi_\alpha\rangle + VG_0(Z)T(Z). \tag{11}$$

Далее для простоты ограничимся случаем, когда канал α соответствует столкновению фрагментов, один из которых является нейтральным. Тогда в соответствии с (9) оператор $T(Z)$ представляется в виде

$$T(Z) = (Z - H_0)^{i\hat{\eta}} M(Z) + R(Z), \tag{12}$$

где матричные элементы оператора $M(Z)$ $\langle \vec{k}_\alpha \vec{p}_\alpha | M(Z) | \vec{p}^{\,0}\rangle$ имеют конечный предел при выходе параметра Z на поверхность энергии $Z = E + i\varepsilon \to (k_\alpha^2/(2\mu_\alpha)) + (p_\alpha^2/(2n_\alpha)) + i0$. Подставляя представление (12) в интегральное уравнение (11), приходим к необходимости изучения сингулярностей матричных элементов

$$\langle \vec{k}_\alpha \vec{p}_\alpha | VG_0(Z)^{1-i\hat{\eta}} M(Z) | \vec{p}^{\,0}\rangle, \tag{13}$$

при выходе параметра Z на энергетическую поверхность. Рассмотрим один из трех матричных элементов, дающих вклад в (13):

$$\int d\vec{k}'_\gamma \frac{\lambda_\gamma}{2\pi^2} \frac{1}{|\vec{k}_\gamma - \vec{k}'_\gamma|^2} \frac{(2\mu_\gamma)^{1-i\eta(\vec{k}'_\gamma \vec{p}_\gamma)}}{\left(2\mu_\gamma\left(Z - \frac{p_\gamma^2}{2n_\gamma}\right) - k_\gamma'^2\right)^{1-i\eta(\vec{k}'_\gamma\vec{p}_\gamma)}} M(\vec{k}'_\gamma \vec{p}_\gamma, \vec{p}^{\,0}, Z). \tag{14}$$

Записывая кулоновский параметр системы в виде

$$\eta(\vec{k}'_\gamma \vec{p}_\gamma) = \eta(\vec{k}_\gamma \vec{p}_\gamma) + (\eta(\vec{k}'_\gamma \vec{p}_\gamma) - \eta(\vec{k}_\gamma \vec{p}_\gamma)) = \eta(\vec{k}_\gamma \vec{p}_\gamma) + \Delta\eta$$

и аналогично

$$M(\vec{k}'_\gamma \vec{p}_\gamma, \vec{p}^{\,0}, Z) = M(\vec{k}_\gamma \vec{p}_\gamma, \vec{p}^{\,0}, Z) + \Delta M,$$

получим, что интеграл (14) представляется в виде суммы двух слагаемых, второе из которых порождается функциями $\Delta\eta$ и ΔM, а потому является несингулярным. Первое из указанных слагаемых имеет вид

$$A_1 = M(\vec{k}_\gamma \vec{p}_\gamma, \vec{p}^{\,0}, Z)\frac{\lambda_\gamma}{2\pi^2}(2\mu_\gamma)^{1-i\eta} \times I, \tag{15}$$

где

$$\begin{gathered} I = \int d\vec{k}'_\gamma \frac{1}{|\vec{k}_\gamma - \vec{k}'_\gamma|^2} \frac{1}{(\xi_\gamma^2 + i\varepsilon_\gamma - k'^2_\gamma)^{1-i\eta}}, \\ \xi_\gamma^2 = 2\mu_\gamma \left(E - \frac{p_\gamma^2}{2n_\gamma}\right), \quad \varepsilon_\gamma = 2\mu_\gamma\varepsilon. \end{gathered} \tag{16}$$

Интеграл I может быть вычислен с помощью перехода в координатное представление либо с использованием обобщенного тождества Фейнмана

$$\frac{1}{a^\alpha b^\beta} = \frac{1}{\mathrm{B}(\alpha,\beta)} \int\limits_0^\infty dt \frac{t^{\alpha-1}}{(at+b)^{\alpha+\beta}}.$$

Опуская промежуточные выкладки, приведем окончательный результат

$$I = -2i\pi^{\frac{3}{2}} \frac{\Gamma\left(\rho - \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\rho)} \left(\xi_\gamma^2 + i\varepsilon_\gamma\right)^{-\rho+\frac{1}{2}} {}_2F_1\left(1, \rho - \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; \frac{k_\gamma^2}{\xi_\gamma^2 + i\varepsilon_\gamma}\right), \tag{17}$$

где $\rho = 1 - i\eta$, а трехчастичная энергетическая поверхность отвечает значению аргумента гипергеометрической функции, равному 1.

Поведение функции Гаусса ${}_2F_1\left(1, \rho - \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; t\right)$ в окрестности точки $t_0 = 1$ описывается формулой

$$(1-t)^{1-\rho} \frac{\Gamma(\frac{3}{2})\Gamma(\rho-1)}{\Gamma(\rho - \frac{1}{2})} + \text{регулярная часть.}$$

Окончательно, слагаемое A_1 в окрестности поверхности энергии представляется в виде

$$A_1 = -i\eta_\gamma \frac{\Gamma(-i\eta)}{\Gamma(1-i\eta)} M(\vec{k}_\gamma \vec{p}_\gamma, \vec{p}^{\,0}, Z) \cdot (i\varepsilon)^{i\eta} + \text{регулярная часть.} \tag{18}$$

Суммируя по γ формулы типа (18), получаем следующий результат:

$$VG_0(Z)^{1-i\hat{\eta}} M(Z) = G_0(Z)^{i\hat{\eta}} M(Z) + M_0(Z), \tag{19}$$

где матричные элементы оператора $M_0(Z)$ регулярны на поверхности энергии и выражаются через матричные элементы оператора $M(Z)$.

Отметим, что последний результат устанавливает связь между фаддеевскими компонентами оператора $M(Z)$, обнаруженную ранее в [5]:

$$\frac{1}{\eta_\gamma} M_\gamma(Z) = \frac{1}{\eta_\alpha} M_\alpha(Z). \tag{20}$$

Соотношение (19) показывает, что оператор $R(Z)$ удовлетворяет интегральному уравнению с тем же самым ядром, что и в уравнении (11)

$$R(Z) = V^{\alpha}|\Phi_{\alpha}\rangle + M_0(Z) + VG_0(Z)R(Z) = R_0(Z) + VG_0(Z)R(Z), \qquad (21)$$

причем матричные элементы оператора $R_0(Z)$ регулярны на энергетической поверхности. Покажем теперь, что уравнение для $R(Z)$ имеет решение, не содержащее сингулярностей типа $(Z - H_0)^{i\eta}$, т. е. принадлежащее иному классу функций, нежели имеющие физический смысл решения уравнений Липпмана–Швингера (11).

С этой целью перестроим уравнение для оператора $T(Z)$ таким образом, чтобы явно выделить в нем необходимые кулоновские сингулярности. На данном этапе мы воспользуемся уже упоминавшимся фактом, что регуляризующий оператор $\mathcal{F}_{\alpha}$ для состояния $\langle\vec{k}_{\gamma}\vec{p}_{\gamma}|$ на энергетической поверхности может быть задан как регуляризирующий двухчастичный оператор для энергозависящего двухчастичного потенциала $U = \eta k_{\gamma}/(\mu_{\gamma} r_{\gamma})$. Тогда уравнение (11) для оператора $T(Z)$ можно преобразовать к виду

$$T(Z) = V^{\alpha}|\Phi_{\alpha}\rangle + (V - U)G_0(Z)T(Z) + UG_0(Z)T(Z),$$

или после обращения последнего уравнения

$$T(Z) = [I - UG_0(Z)]^{-1}V^{\alpha}|\Phi_{\alpha}\rangle + [I - UG_0(Z)]^{-1}(V - U)G_0(Z)T(Z).$$

Оператор $[I - UG_0(Z)]^{-1}$ равен $I + t_u(Z)G_0(Z)$, где $t_u(Z)$ — соответствующая двухчастичная кулоновская амплитуда. Тогда

$$T(Z) = [I + t_u(Z)G_0(Z)]V^{\alpha}|\Phi_{\alpha}\rangle + [I + t_u(Z)G_0(Z)](V - U)G_0(Z)T(Z). \qquad (22)$$

С формальной точки зрения все необходимые кулоновские сингулярности в (22) выделены (они содержатся в операторе $t_u(Z)$). Осталось показать, что дальнодействующий оператор взаимодействия $V - U$ не изменяет характера этих сингулярностей.

Для этого воспользуемся тем фактом, что матричные элементы двухчастичной кулоновской функции Грина $\langle\vec{k}|g_c(Z)|f\rangle$ с регулярной функцией $f(\vec{k})$ вблизи поверхности энергии $|Z - k^2/2\mu| \to 0$ представляется в виде [3]

$$\langle\vec{k}|g_c(Z)|f\rangle = \left(Z - \frac{k^2}{2\mu}\right)^{-1+i\eta} g(\vec{k}) + \left(Z - \frac{k^2}{2\mu}\right)^{i\eta} \varphi(\vec{k}) \qquad (23)$$

с регулярными функциями $g(\vec{k})$ и $\varphi(\vec{k})$ (прямое доказательство справедливости представления (23) и его обобщение на n-мерный случай дано в § 2). Тогда в силу соотношения

$$I + t_u(Z)G_0(Z) = (Z - H_0)g_c^u(Z),$$

представления (23) и структуры ядра и свободного члена уравнения (22) следует ожидать, что решение этого уравнения представляется в виде (12), причем матричные элементы оператора $R(Z)$ регулярны и гладко исчезают на поверхности энергии. Покажем, что решения такого типа для $R(Z)$ действительно существуют.

В силу (12) и свойств матричных элементов (13) матричные элементы оператора $(V-U)G_0(Z)^{1-i\hat{\eta}}M(Z)$ исчезают на поверхности энергии, тогда как матричные элементы оператора $(V-U)G_0(Z)R(Z)$ регулярны. Следовательно, матричные элементы оператора $(V-U)G_0(Z)T(Z)$ также регулярны. Используя теперь свойства матричных элементов двухчастичной кулоновской функции Грина (23), приходим к доказательству интересующего нас факта.

Воспользовавшись теперь процедурой вычисления матричных элементов амплитуды рассеяния и свойства волновых функций кулоновского рассеяния [1, 2], получим

$$\begin{aligned} & t(\vec{k}_\gamma \vec{p}_\gamma, \vec{p}_\alpha^{\,0}, E+i0) = \\ & = \Big[\langle \Psi_\gamma^-(\vec{k}_\gamma)\vec{p}_\gamma | V^\alpha | \Phi_\alpha \vec{p}_\alpha^{\,0} \rangle + \langle \Psi_\gamma^-(\vec{k}_\gamma)\vec{p}_\gamma | (V-U) G_0(E+i0) T(E+i0) | \vec{p}_\alpha^{\,0} \rangle \Big] \times \\ & \times \exp\left(-i\eta \ln \frac{2k_\gamma^2}{\mu_\gamma} + i \sum_\beta A_\beta \right), \end{aligned} \tag{24}$$

где $|\Psi_\gamma^-(\vec{k}_\gamma)\rangle$ — кулоновская волна в паре γ с потенциалом U. Поскольку

$$\langle \Psi_\gamma^-(\vec{k}_\gamma)\vec{p}_\gamma | V^\alpha | \Phi_\alpha \vec{p}_\alpha^{\,0} \rangle = \langle \Psi_\gamma^-(\vec{k}_\gamma)\vec{p}_\gamma | (V-U) | \Phi_\alpha \vec{p}_\alpha^{\,0} \rangle,$$

амплитуда реакции приводится к виду

$$t(\vec{k}_\gamma \vec{p}_\gamma, \vec{p}_\alpha^{\,0}, E+i0) = \langle \Psi_\gamma^-(\vec{k}_\gamma)\vec{p}_\gamma | (V-U) | \Psi_\alpha^+(\vec{p}_\alpha^{\,0}) \rangle \exp\left(-i\eta \ln \frac{2k_\gamma^2}{\mu_\gamma} + i \sum_\beta A_\beta \right), \tag{25}$$

где $|\Psi_\alpha^+(\vec{p}_\alpha^{\,0})\rangle$ — волновая функция системы, соответствующая начальному каналу α.

Поскольку амплитуды (24) и (25) пропорциональны матричным элементам оператора $M(Z)$ на поверхности энергии

$$t(\vec{k}_\gamma \vec{p}_\gamma, \vec{p}_\alpha^{\,0}, E+i0) = \frac{1}{\Gamma(1-i\eta)} \exp\left(-\frac{\pi}{2}\eta + i \sum_\beta A_\beta \right) \langle \vec{k}_\gamma \vec{p}_\gamma | M(E+i0) | \vec{p}_\alpha \rangle, \tag{26}$$

формулы (24)–(26) замыкают систему уравнений (11), (21) и (22) для операторов $M(Z)$ и $R(Z)$ с явно выделенными трехчастичными кулоновскими сингулярностями.

Итак, мы установили, что матричные элементы оператора перехода в канал трехчастичного развала действительно представимы в виде (12), где матричные элементы оператора $R(Z)$ равны нулю на поверхности энергии. Последнее обстоятельство ранее в теории кулоновского рассеяния применялось в качестве анзаца [3]. Кроме того, было показано, что функция $\langle \vec{k}_\gamma \vec{p}_\gamma | T(E+i0) | \vec{p}_\alpha^{\,0} \rangle$ не содержит двухчастичных кулоновских сингулярностей, которые, однако, присутствуют в уравнениях Фаддеева–Вейнберга–ван Винтера для $T(Z)$ (см. по этому поводу, например, [5]). Именно с целью устранения двухчастичных сингулярностей мы использовали перестройку непосредственно исходного уравнения Липпмана–Швингера.

§ 2. Функция Грина для кулоновского потенциала в $\mathbf{R}^n$

Как уже отмечалось во введении, существует еще один выбор потенциала U в уравнении (18), заключающийся во введении шестимерного кулоновского потенциала $U(R) = \lambda/R$, где $R = \sqrt{2\mu_{12}r_{12}^2 + 2n_3\rho_3^2}$ — гиперрадиус системы ($\vec{r}_{12}$ и $\vec{\rho}_3$ — координаты Якоби, сопряженные к $\vec{k}_{12}$ и $\vec{\rho}_3$), а константа связи определяется соотношением $\lambda = 2\sqrt{E}\eta$. Такой выбор величины λ связан с тем обстоятельством, что при $|t| \to \infty$ гиперрадиус системы ведет себя как $2\sqrt{E}\eta$, а кулоновский потенциал трехчастичной системы как $\eta|t|^{-1}$, откуда и получается приведенное выражение для λ.

Причина, по которой введение шестимерного кулоновского потенциала оказывается оправданным, объясняется тем, что при надлежащем выборе λ его функция Грина имеет те же сингулярности, что и полная функция Грина системы трех заряженных частиц. Чтобы доказать данное утверждение, рассмотрим уравнение Шредингера в $\mathbf{R}^n$

$$\left(-\frac{1}{2m}\Delta_{\mathbf{R}^n} + \frac{\lambda}{R} - E\right)\Psi_n(\vec{R}, \vec{P}) = 0, \tag{27}$$

где n-мерный радиус-вектор $\vec{R}$ есть $(x_1, \ldots, x_n)$, а $P^2 = 2mE$. Построим для данного уравнения Шредингера функцию Грина в импульсном представлении, воспользовавшись методом Окубо–Фельдмана [9].

С этой целью представим искомую функцию Грина в виде

$$G(\vec{P}, \vec{P}_0, Z) = \left[\delta(\vec{P} - \vec{P}_0) + F(\vec{P}, \vec{P}_0, Z)\right]\frac{2m}{K^2 - P^2}, \tag{28}$$

где $Z = K^2/2m$, а функция $F(\vec{P}, \vec{P}_0, Z)$ равна

$$F(\vec{P}, \vec{P}_0, Z) = \frac{2m}{K^2 - P^2}\int\limits_{\mathbf{R}^n} d\vec{P}' U(\vec{P} - \vec{P}')G(\vec{P}', \vec{P}_0, Z)\left(Z - \frac{P_0^2}{2m}\right). \tag{29}$$

Эта функция удовлетворяет интегральному уравнению

$$F(\vec{P}, \vec{P}_0, Z) = \frac{2m}{K^2 - P^2}U(\vec{P} - \vec{P}_0) + \frac{2m}{K^2 - P^2}\int\limits_{\mathbf{R}^n} d\vec{P}' U(\vec{P} - \vec{P}')F(\vec{P}', \vec{P}_0, Z). \tag{30}$$

Фурье-образ n-мерного кулоновского потенциала известен в явном виде и описывается выражением

$$U(\vec{Q}) = \frac{\lambda}{(2\pi)^n} \int\limits_{\mathbf{R}^n} d\vec{R} \frac{\exp(i\vec{Q}\vec{R})}{R} = \frac{\Gamma(\frac{n-1}{2})}{2\pi^{\frac{n+1}{2}}} \frac{1}{Q^{n-1}}.$$

Решение интегрального уравнения (30) в соответствии с методом Окубо–Фельдмана будем искать в виде

$$F(\vec{P}, \vec{P}_0, Z) = \int\limits_0^\infty dt \frac{f(t)}{\left[(\vec{P} - \vec{P}_0)^2 + (P^2 - K^2)t\right]^{\frac{n+1}{2}}}. \tag{31}$$

Подставляя представление (31) в уравнение (30), получим, что правая часть этого уравнения может быть записана следующим образом:

$$-\frac{\Gamma(\frac{n-1}{2})}{\pi^{\frac{n+1}{2}}} \frac{m\lambda}{\mathrm{B}\left(\frac{n-1}{2}, 1\right)} \int\limits_0^\infty dt \frac{1}{\left[(\vec{P} - \vec{P}_0)^2 + (P^2 - K^2)\right]^{\frac{n+1}{2}}} - \frac{m\lambda\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\pi^{\frac{n+1}{2}}} I, \tag{32}$$

где

$$I = \int\limits_{\mathbf{R}^n} d\vec{P}' \frac{1}{\left(|\vec{P} - \vec{P}'|^2\right)^{\frac{n-1}{2}}} \frac{f(t)}{\left[(\vec{P} - \vec{P}_0)^2 + (P^2 - K^2)t\right]^{\frac{n+1}{2}}}. \tag{33}$$

Интеграл I (33) можно вычислить, используя обобщенное тождество Фейнмана. В итоге

$$\begin{aligned} I = {} & \pi^{n/2} \Gamma \left[\begin{matrix} & \frac{n}{2} & \\ \frac{n-1}{2} & & \frac{n+1}{2} \end{matrix} \right] \times \\ & \times \int\limits_0^\infty dt \int\limits_0^\infty du \frac{u^{(n-3)/2} f(t)}{\left((\vec{P} - \vec{P}_0)^2 u + P_0^2 t + P^2 ut - K^2 t(1 + u + t)\right)^{n/2}} = \\ & = \frac{\pi^{(n+1)/2}}{\Gamma(\frac{n+1}{2})} \int\limits_0^\infty dt \frac{f(t)}{(P_0^2 t - K^2 t(1+t))^{1/2} \left((\vec{P} - \vec{P}_0)^2 + (P^2 - K^2)t\right)^{(n-1)/2}}. \end{aligned} \tag{34}$$

Поскольку

$$\begin{aligned} & \frac{1}{P^2 - K^2} \cdot \frac{1}{\left[(\vec{P} - \vec{P}_0)^2 + (P^2 - K^2)t\right]^{\frac{n-1}{2}}} = \\ & \qquad = \frac{1}{\mathrm{B}\left(1, \frac{n-1}{2}\right)} \int\limits_0^\infty du \frac{1}{\left[(\vec{P} - \vec{P}_0)^2 + (P^2 - K^2)(t + u)\right]^{\frac{n+1}{2}}}, \end{aligned} \tag{35}$$

то подставляя (34) и (35) в (32) и переходя от интегрирования по переменной u к переменной $v = t + u$, получим для $f(t)$ следующее интегральное уравнение:

$$f(t) = -\frac{m\lambda}{\pi^{\frac{n+1}{2}}}\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) - i\eta\int\limits_0^t dv\frac{f(v)}{\left(v(v+1) - \frac{P_0^2}{K^2}v\right)^{1/2}}, \qquad (36)$$

где $\eta = \frac{\lambda m}{K}$ — кулоновский параметр задачи. Сводя уравнение для $f(t)$ к дифференциальному, найдем

$$f(t) = -\frac{m\lambda}{\pi^{\frac{n+1}{2}}}\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\exp\left(-i\eta\ln\left(2\sqrt{t(t+1) - \frac{P_0^2}{K^2}t} + 2t + 1 - \frac{P_0^2}{K^2}\right)\right) \times$$
$$\times \exp\left(i\eta\ln\left(1 - \frac{P_0^2}{K^2}\right)\right). \qquad (37)$$

Подставляя (37) в (31) и затем в (28), получим после замены $t = 1/x$

$$G(\vec{P}, \vec{P}_0, Z) =$$
$$= \frac{1}{Z - P_0^2/2m}\left[\delta(\vec{P}-\vec{P}_0) - \frac{m\lambda}{\pi^{\frac{n+1}{2}}}\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\int\limits_0^\infty dx\frac{x^{i\eta+\frac{n-3}{2}}}{\left[x(\vec{P}-\vec{P}_0)^2 + (P^2-K^2)\right]^{\frac{n+1}{2}}} \times\right.$$
$$\left.\times\exp\left(-i\eta\ln\left(2\sqrt{1+x\left(1-\frac{P_0^2}{K^2}\right)} + 2 + x\left(1-\frac{P_0^2}{K^2}\right)\right)\right)\exp\left(i\eta\ln\left(1-\frac{P_0^2}{K^2}\right)\right)\right].$$
$$(38)$$

В случае $n = 3$ представление (38) эквивалентно результату работы [9], а с помощью подстановки $x = \frac{K^2}{K^2-P_0^2}\cdot\frac{4v}{(1-v)^2}$ и последующей деформации контура интегрирования оно сводится к представлению Швингера (формула (2′) из работы [10])

$$G(\vec{p}, \vec{p}_0, Z) = \frac{\delta(\vec{p}-\vec{p}_0)}{Z - p^2/2m} - \frac{\alpha m^2}{2\pi^2K^2}\int\limits_0^1 dx\frac{x^{i\eta}(1-x^2)}{\left[x(\vec{p}-\vec{p}_0)^2 - \frac{(K^2-p^2)(K^2-p_0^2)}{4K^2}(1-x)^2\right]^2}. \qquad (39)$$

Если импульс $\vec{P}$ в (38) выходит на поверхность энергии (однако $|\vec{P} - \vec{P}_0| \neq 0$), функция Грина $G(\vec{P}, \vec{P}_0, Z)$ приобретает вид

$$G(\vec{P}, \vec{P}_0, Z) = \frac{\lambda}{2\pi^{\frac{n+1}{2}}}\exp(\pi\eta)\Gamma(1-i\eta)\Gamma\left(\frac{n-1}{2} + i\eta\right)\exp\left(-i\eta\ln\frac{2Z}{m}\right) \times$$
$$\times\left(Z - \frac{P^2}{2m}\right)^{-1+i\eta}\left(Z - \frac{P_0^2}{2m}\right)^{-1+i\eta}\left(|\vec{P}-\vec{P}_0|^2\right)^{-\left(\frac{n-1}{2}+i\eta\right)}, \qquad (40)$$

откуда явно вытекает, что структура кулоновских сингулярностей функции Грина не зависит от размерности пространства.

Опишем теперь свойства интеграла

$$A(\vec{p}, Z) = \int\limits_{\mathbf{R}^n} d\vec{P}' G(\vec{P}, \vec{P}', Z) f(\vec{P}') \tag{41}$$

при выходе параметра Z на энергетическую поверхность ($Z \to P^2/2m + i0$). С практической точки зрения интерес представляют два следующих случая.

1. Функция $f(\vec{P})$ при интересующем значении n-мерного вектора $\vec{P}$ отлична от нуля;
2. Функция $f(\vec{P}')$ гладко исчезает при $\vec{P}' \to \vec{P}$.

Наиболее просто рассматривается случай 2. Поскольку $G(\vec{P}, \vec{P}', Z)$ симметрична по переменным $\vec{P}'$, то, меняя в (38) $\vec{P}$ и $\vec{P}_0$ местами (и подставляя вместо $\vec{P}_0$ вектор $\vec{P}'$), получим, что в окрестности поверхности энергии интеграл $A(\vec{P}, Z)$ ведет себя как

$$A(\vec{P}, Z) \sim \left(Z - \frac{P^2}{2m} \right)^{1 - i\eta} B(\vec{P}, Z), \tag{42}$$

где функция $B(\vec{p}, Z)$ является регулярной. В случае 1 интеграл (41) можно записать в виде

$$A(\vec{P}, Z) = A_0(\vec{P}, Z) f(\vec{P}) + A_1(\vec{P}, Z), \tag{43}$$

где

$$A_0(\vec{P}, Z) = \int\limits_{\mathbf{R}^n} d\vec{P}' G(\vec{P}, \vec{P}', Z), \tag{44}$$

а слагаемое $A_1(\vec{P}, Z)$ есть интеграл (41), заданный для функции $f_1(\vec{P}') = f(\vec{P}') - f(\vec{P})$. Используя представление (38), интеграл $A_0(\vec{P}, Z)$ (44) можно привести к виду

$$A_0(\vec{P}, Z) = \\ = \frac{1}{Z - P^2/2m} \left[1 - im\lambda \int\limits_0^\infty dt\ t^{i\eta + \frac{n-3}{2}} (1+t)^{-\frac{n-1}{2}} \left(K^2 + (K^2 - P^2) t \right)^{-1/2} \times \right. \\ \left. \times \exp\left(-i\eta \ln\left(2\sqrt{1 + t\left(1 - \frac{P^2}{K^2}\right)} + 2 + t\left(1 - \frac{P^2}{K^2}\right) \right) \right) \right].$$

С помощью подстановки, осуществляющей переход от представления (38) к представлению (39), выражение для $A_0(\vec{P}, Z)$ можно переписать следующим образом:

$$A_0(\vec{P},Z)=\frac{1}{Z-P^2/2m}\left[1-i\eta\int\limits_0^1 dx\ x^{i\eta-1+\frac{n-1}{2}}(x+\varepsilon(1-x)^2)^{-\frac{n-1}{2}}\right],$$

где $\varepsilon=\frac{K^2-P^2}{4K^2}$ — малый параметр в окрестности поверхности энергии. После интегрирования по частям получим

$$A_0(\vec{P},Z)=\frac{1}{Z-P^2/2m}\varepsilon\frac{n-1}{2}\int\limits_0^1 dx\ x^{i\eta+\frac{n-3}{2}}(1-x)^2(x+\varepsilon(1-x)^2)^{-\frac{n+1}{2}}. \quad (45)$$

Лидирующий член асимптотического разложения (45) по малому параметру ε равен

$$A_0(\vec{P},Z)\sim\frac{1}{Z-P^2/2m}\varepsilon^{i\eta}\mathrm{B}\left(i\eta+\frac{n-1}{2},1-i\eta\right). \quad (46)$$

Объединяя полученные выше результаты (42), (43), (46), получаем, что интеграл $A(\vec{P},Z)$ вблизи поверхности энергии описывается соотношением

$$A(\vec{P},Z)=\left(Z-\frac{P^2}{2m}\right)^{-1+i\eta}B_1(\vec{P},Z)+\left(Z-\frac{P^2}{2m}\right)^{i\eta}B_2(\vec{P},Z)$$

с регулярными функциями B_1 и B_2.

§ 3. Шестимерный кулоновский потенциал в задаче о рассеянии трех заряженных частиц

В этом параграфе будет рассмотрен простейший, но практически интересный случай, отвечающий взаимодействию двух частиц одинаковых масс во внешнем кулоновском поле, который включает, в частности, реакции типа $(e,2e)$. Случай произвольной трехчастичной системы может быть рассмотрен аналогичным образом.

Выберем систему единиц, в которой $m_1=m_2=1$, а гиперрадиус системы будем записывать в виде $R=\sqrt{r_1^2+r_2^2}$. В этих обозначениях шестимерный кулоновский потенциал $U(R)$, приводящий к тем же кулоновским сингулярностям, какие имеют матричные элементы оператора $T(Z)$ на поверхности энергии, имеет вид

$$U(R)=\frac{\eta\sqrt{2E}}{R}=\frac{\lambda}{R}.$$

Волновая функция рассеяния на таком потенциале известна в явном виде:

$$\langle\vec{R}|\Psi^+(\vec{K})\rangle=\frac{\exp\{i\vec{K}\vec{R}\}}{(2\pi)^3}\exp\left\{-\frac{\pi}{2}\eta\right\}\frac{\Gamma(\frac{5}{2}+i\eta)}{\Gamma(\frac{5}{2})}\Phi(-i\eta,\frac{5}{2};iKR-i\vec{K}\vec{R}),$$

где $\vec{K}$ — шестимерный импульс. Используя метод Нордсика [11], можно получить выражение для этой функции в импульсном представлении:

$$\langle \vec{K}'|\Psi^+(\vec{K})\rangle = -\frac{1}{2\pi^{7/2}}\Gamma\left(\frac{5}{2}+i\eta\right)\exp\left\{\frac{\pi}{2}\eta\right\}\lim_{\lambda\to 0}\frac{d}{d\lambda}\frac{(K^2-K'^2+2i\lambda K-\lambda^2)^{i\eta}}{(Q^2+\lambda^2)^{5/2+i\eta}}. \tag{47}$$

Из приведенного выражения видно, что помимо особенностей шестимерной кулоновской амплитуды $Q^{-5-2i\eta}$, где $\vec{Q}=\vec{K}-\vec{K}'$ — переданный импульс, шестимерная кулоновская функция в импульсном представлении имеет характерную кулоновскую особенность $G_0^{1-i\eta}(Z)$.

С помощью соотношений (38), (40) и (4) можно убедиться, что волновая функция (47) удовлетворяет представлению (6), в частности, при $\vec{K}\neq\vec{K}'$

$$\langle \vec{K}'|\psi^+(\vec{K})\rangle = \frac{\alpha}{2\pi^{7/2}}\Gamma\left(\frac{5}{2}+i\eta\right)\exp\left(\frac{\pi}{2}\eta\right)\left(E-\frac{K'^2}{2}+i0\right)^{-1+i\eta}Q^{-5-2i\eta}\exp(i\eta\ln 2).$$

Одновременно формула (47) показывает, что регуляризующий оператор $\mathcal{F}(E+i\varepsilon)$ для пространства 6 измерений может быть представлен в виде

$$\langle \vec{K}'|\mathcal{F}(E+i\varepsilon)|\vec{K}\rangle = \frac{\lambda}{\pi^{7/2}}\Gamma\left(\frac{7}{2}+i\eta\right)\exp\left(\frac{\pi}{2}\eta\right)\frac{\left[(K+i\lambda)^2-K'^2\right]^{i\eta}}{\left[(\vec{K}-\vec{K}')^2+\lambda^2\right]^{\frac{7}{2}+i\eta}}, \tag{48}$$

где $\varepsilon=K\lambda$. Прямым вычислением можно показать, что оператор $\mathcal{F}(E+i\varepsilon)$ удовлетворяет уравнению (5). Действительно, уравнение (5) с учетом (48) эквивалентно соотношению

$$\lim_{\lambda\to 0}\int\limits_{\mathbf{R}^6} d\vec{K}'\ \exp\left(\frac{\pi}{2}(\eta+\eta')\right)\Gamma(1-i\eta')\Gamma\left(\frac{7}{2}+i\eta\right)\pi^{-\frac{7}{2}}\times$$
$$\times\left[(K+i\lambda)^2-K'^2\right]^{i(\eta+\eta')}\left[(\vec{K}-\vec{K}')^2+\lambda^2\right]^{-\frac{7}{2}-i\eta}f(\vec{K}')=f(\vec{K}) \tag{49}$$

для любой гладкой функции $f(\vec{K})$ (кулоновский параметр η' в (49) задан для импульса $\vec{K}'$, т. е. $\eta'=\alpha K'$). Левая часть соотношения (49) приводится к виду $A(\vec{K})f(\vec{K})$, где величина $A(\vec{K})$ задается соотношением

$$A(\vec{K})=\lim_{\lambda\to 0}\int\limits_{\mathbf{R}^6} d\vec{K}'\ \lambda\pi^{-\frac{7}{2}}\exp(\pi\eta)\Gamma(1-i\eta)\Gamma\left(\frac{7}{2}+i\eta\right)\frac{\left[(K+i\lambda)^2-K'^2\right]^{2i\eta}}{\left[(\vec{K}-\vec{K}')^2+\lambda^2\right]^{\frac{7}{2}+i\eta}}.$$

После интегрирования по углам выражение для $A(\vec{K})$ оказывается равным

$$A(\vec{K}) = \lim_{\lambda\to 0} \frac{2^5}{\pi}\lambda \int\limits_0^\infty dK'(K')^5\Gamma(1-i\eta)\Gamma\left(\frac{7}{2}+i\eta\right)\frac{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{\Gamma(5)} \times$$
$$\times \left[(K+i\lambda)^2 - {K'}^2\right]^{2i\eta}\left[(K-K')^2+\lambda^2\right]^{-1-i\eta} \times$$
$$\times \left[(K+K')^2+\lambda^2\right]^{-\frac{5}{2}}\, {}_2F_1\left(\frac{1}{2}-i\eta, \frac{5}{2}; 5; \frac{4KK'}{(K+K')^2+\lambda^2}\right).$$

Поскольку носитель подинтегральной функции в последнем соотношении сосредоточен в области $K' = K$, аргумент функции Гаусса можно заменить на единицу, тогда

$$A(\vec{K}) = \lim_{\lambda\to 0} \lambda \int\limits_0^\infty dK' \left[(K+i\lambda)^2 - {K'}^2\right]^{2i\eta} \times$$
$$\times \left[(K-K')^2+\lambda^2\right]^{-1-i\eta}\Gamma(1+i\eta)\Gamma(1-i\eta)\exp(\pi\eta)\exp\left(-i\eta\ln(4K^2)\right) =$$
$$= \pi^{-1}\Gamma(1+i\eta)\Gamma(1-i\eta)\int\limits_{-\infty}^{\infty} dx(1+ix)^{-1-i\eta}(1-ix)^{-1+i\eta} = 1,$$

что и требовалось установить.

Проведенное рассмотрение показывает, что в качестве ренормирующих операторов в (1) можно использовать операторы (48). На этом этапе представим оператор $T(Z)$ (10) в виде (22), где U — соответствующий шестимерный кулоновский потенциал.

Как нетрудно понять, в рассматриваемой ситуации достаточно показать, что матричные элементы $\langle\vec{K}|(V-U)G_0(Z)T(Z)|\vec{p}^{\,0}\rangle$ регулярны на поверхности энергии. С этой целью выделим в $T(Z)$ слагаемое $(Z-H_0)^{i\hat{\eta}}M(Z)$ и поступим точно так же, как и в случае матричного элемента (15). Тогда с точностью до регулярных слагаемых, не представляющих на данном этапе интереса, получим вместо формулы (16)

$$A_2 = M(\vec{K}, \vec{p}^{\,0}, Z)\cdot I_2,$$

где множитель I_2 задан в виде интеграла

$$I_2 = \int \langle\vec{K}|UG_0(Z)^{1-i\eta}|\vec{K}'\rangle d\vec{K}' =$$
$$= -\frac{\lambda}{(2\pi)^6}\exp(-\pi\eta)\int\limits_{\mathbf{R}^6} d\vec{R}\frac{\exp\{-i\vec{K}\vec{R}\}}{R}\int\limits_{\mathbf{R}^6} d\vec{K}'\,\frac{\exp\{i\vec{K}'\vec{R}\}2^{1-i\eta}}{({K'}^2+(-i\sqrt{\zeta})^2)^{1-i\eta}}$$
$$(\zeta = K^2 + 2i\varepsilon).$$

После интегрирования по углам интеграл I_2 оказывается равным

$$I_2 = -2\eta \frac{\exp(-\pi\eta)}{\Gamma(1-i\eta)} \left(-\frac{i\sqrt{\zeta}}{K}\right)^{2+i\eta} \int\limits_0^\infty dx\ x^{-i\eta} J_2(x) K_{2+i\eta}\left(-i\frac{\sqrt{\zeta}}{K}x\right) K^{2i\eta},$$

или после интегрирования по x

$$I_2 = -i\eta \frac{K}{\sqrt{\zeta}} 2^{-i\eta} \Gamma \left[\begin{array}{ll} \frac{5}{2}, & \frac{1}{2}-i\eta \\ 1-i\eta, & 3 \end{array} \right] {}_2F_1\left(\frac{1}{2}-i\eta, \frac{5}{2}; 3; \frac{K^2}{\zeta}\right) \zeta^{i\eta}.$$

Сингулярная часть гипергеометрической функции Гаусса задается формулой вида

$$\left(1-\frac{K^2}{\zeta}\right)^{i\eta} \Gamma \left[\begin{array}{ll} 3, & -i\eta \\ \frac{5}{2}, & \frac{1}{2}-i\eta \end{array} \right],$$

откуда с точностью до регулярных слагаемых

$$I_2 = -i\eta \frac{\Gamma(-i\eta)}{\Gamma(1-i\eta)} \frac{K}{\sqrt{\zeta}} (i\varepsilon)^{i\eta},$$

что эквивалентно (19) при $\varepsilon \to 0$.

Представление (22), где U — шестимерный кулоновский потенциал, с учетом только что установленного факта и свойств интеграла (41) при $n = 6$ дает еще одно доказательство того, что матричные элементы оператора $T(Z)$ вблизи поверхности энергии задаются в виде (12), причем матричные элементы оператора $R(Z)$ гладко исчезают.

На основании вышеизложенного получаем еще одно выражение для амплитуды реакции:

$$\begin{aligned} t(\vec{k}_\gamma \vec{p}_\gamma, \vec{p}_\alpha^{\,0}, E+i0) = \langle \Psi_u^-(\vec{K})|V-U|\psi_\alpha^+(\vec{p}_\alpha^{\,0})\rangle \times \\ \times \exp\left(i(\eta_1 \ln 2p_1^2 + \eta_2 \ln 2p_2^2 + \eta_{12} \ln 2p_{12}^2 - \eta \ln 2K^2)\right). \quad (50) \end{aligned}$$

Аналог формулы (50) был ранее получен Петеркопом [4] на основе анализа координатных асимптотик волновой функции системы. Приведем также полезное представление для волновой функции системы, соответствующей трем частицам в конечном состоянии:

$$|\Psi^\pm(\vec{k}_\gamma \vec{p}_\gamma)\rangle = |\Psi_u^\pm(\vec{K})\rangle + G(E \pm i0)(V-U)|\Psi_u^\pm(\vec{K})\rangle, \quad (51)$$

где, как и ранее, $|\Psi_u^\pm(\vec{K})\rangle$ — шестимерные кулоновские волновые функции, отвечающие импульсу $\vec{K} = (\vec{k}_\gamma \vec{p}_\gamma)$. Формула (51) в силу свойств волновой функции рассеяния на шестимерном кулоновском потенциале особенно пригодна для построения трехчастичной кулоновской волновой функции методом K-гармоник.

Заключение

Подведем итоги проведенного рассмотрения.

1. Показано, что уравнение Липпмана–Швингера для T-оператора рассеяния системы трех заряженных частиц, отвечающее реакции развала, имеет решение вида (12), где матричные элементы оператора $M(Z)$ регулярны на поверхности энергии, а матричные элементы оператора $R(Z)$ равны 0. Одновременно показано, что матричные элементы T-оператора рассеяния системы не имеют сингулярностей типа $(Z - H_0)^{i\eta_\alpha}$, которые возникают при использовании для нахождения $T(Z)$ уравнений Фаддеева [5]. Последнее обстоятельство означает также, что проведенного в [5] выделения особенностей типа $(Z-H_0)^{i\eta}$ недостаточно: необходимо показать, что особенностей типа $(Z - H_0)^{i\eta_\alpha}$ не возникает (иначе предел (1) не существует), и указать способ вычисления компонент $T_\alpha(Z)$ на поверхности энергии (поскольку эти компоненты выражаются сами через себя).
2. Показано, что для определения операторов $R(Z)$ и $M(Z)$ может быть получена система несингулярных интегральных уравнений, замыкаемая с помощью соотношений (24), (26) или (50), вытекающих из нестационарной теории кулоновского рассеяния (1).
3. Свойства матричных элементов оператора $R(Z)$ в окрестности поверхности энергии позволяют сформулировать еще одну предельную процедуру для сечения трехчастичного развала:

$$|t(\vec{k}_\gamma \vec{p}_\gamma, \vec{p}_\alpha^{\,0}, E + i0)|^2 = \frac{\exp\{-\pi\eta\}}{|\Gamma(1 - i\eta)|^2} \lim_{\varepsilon\to 0} |\langle \vec{k}_\gamma \vec{p}_\gamma | T(E + i\varepsilon) | \vec{p}_\alpha^{\,0} \rangle|^2, \tag{52}$$

   где оператор $T(Z)$ задан соотношением (2). Формула (52) показывает, что при вычислении сечений можно использовать аппарат интегральных уравнений, развитый для короткодействующих потенциалов, но при комплексных Z, с последующим предельным переходом $Z \to E + i0$ в квадрате амплитуды. Этот результат был ранее получен в [12] и подробно обсуждается в [4].

Работа частично выполнялась в рамках подпрограммы «Фундаментальная спектроскопия» Миннауки РФ.

Литература

[1] Комаров В. В., Попова А. М., Шаблов В. Л. Динамика систем нескольких квантовых частиц. — М.: Изд-во МГУ, 1996.

[2] Шаблов В. Л., Шитков Ю. Ю., Попов Ю. В. О связи стационарной и нестационарной теорий рассеяния для системы частиц с кулоновским взаимодействием // Фунд. и прикл. мат. — 1996. — Т. 2, № 3. — С. 925–951.

[3] Меркурьев С. П., Фаддеев Л. Д. Квантовая теория рассеяния для систем нескольких частиц. — М.: Наука, 1985.

[4] Петеркоп Р. К. Теория ионизации атомов электронным ударом. — Рига: Зинатне, 1975.

[5] Латыпов Д. М., Мухамеджанов А. М. Исследование структуры сингулярностей резольвенты оператора энергии системы трех заряженных частиц методом интегральных уравнений // ЯФ. — 1992. — Т. 55, вып. 2. — С. 318–324.

[6] Тейлор Дж. Теория рассеяния. — М.: Мир, 1985.

[7] Prugovečki E., Zorbas J. Many-body modified Lippmann–Schwinger equation for Coulomb-like potentials // Nucl. Phys. — 1973. — Vol. A213. — P. 541–569.

[8] Prugovečki E., Zorbas J. Modified Lippmann–Schwinger equations for two-body scattering theory with long-ranged potentials // J. Math. Phys. — 1973. — Vol. 14, No. 10. — P. 1358–1409.

[9] Okubo S., Feldman D. Some aspects of the covariant two-body problem. II. The scatterng problem // Phys. Rev. — 1960. — V. 117. — P. 292–306.

[10] Schwinger J. Coulomb Green's function // J. Math. Phys. — 1964. — V. 5, No. 11. — P. 1606.

[11] Nordsieck A. Reduction of an integral in the theory of Bremsstrahlung // Phys. Rev. — 1954. — Vol. 93, No. 4. — P. 785.

[12] McCarter G., Nuttall J. // Phys. Rev. — 1971. — V. A4. — P. 625.

Статья поступила в редакцию в феврале 1998 г.