А. С. Штерн, Представления исключительной йордановой супералгебры, *Функц. анализ и его прил.*, 1987, том 21, выпуск 3, 93–94

Функциональный анализ и его приложения,
1987, т. 21, вып. 3, 93—94

УДК 512.554.7

ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ИСКЛЮЧИТЕЛЬНОЙ ЙОРДАНОВОЙ СУПЕРАЛГЕБРЫ

А. С. Штерн

В заметке приводится описание бимодулей над простой исключительной йордановой супералгеброй (й.с.) F_{10}, введенной в работе В. Г. Каца [1]. Описаны также некоторые супералгебры Ли, ассоциированные с F_{10}. Основным инструментом доказательства является конструкция И. Л. Кантора, предложенная в [3] и впервые примененная к суперслучаю в [1]. Далее предполагается, что характеристика основного поля F равна нулю.

Суперкоммутативная супералгебра $J = J_{\bar{0}} \oplus J_{\bar{1}}$ над полем F называется й.с., если операторы L_x левого умножения на $x \in J$ удовлетворяют соотношению $(-1)^{\alpha\gamma}[L_{ab}, L_c] + (-1)^{\gamma\beta}[L_{ca}, L_b] + (-1)^{\beta\alpha}[L_{bc}, L_a] = 0$. Любая ассоциативная Z_2-градуированная алгебра $A = A_{\bar{0}} + A_{\bar{1}}$ является й.с. относительно измененной операции $a \circ b = \frac{1}{2}(ab + (-1)^{ab} ba)$. Й.с. называется специальной, если ее можно вложить в некоторую ассоциативную супералгебру, и исключительной в противном случае. Из результатов работы [1] легко следует специальность всех простых конечномерных й.с. кроме, может быть, F_{10}.

Для любой супералгебры Ли с Z-градуировкой длины 3 $\mathscr{L} = \mathscr{L}_{-1} \oplus \mathscr{L}_0 \oplus \mathscr{L}_1$ и любого элемента $a \in \mathscr{L}_1$ операция $x \circ y = [a, x, y]$ превращает суперпространство $\mathscr{L}_{-1}$ в йорданову супералгебру. Конструкция Кантора осуществляет обратное соответствие, сопоставляя йордановой супералгебре J над полем F супералгебру Ли над F с Z-градуировкой вида $\mathscr{L} = \mathscr{L}_{-1} \oplus \mathscr{L}_0 \oplus \mathscr{L}_1$, удовлетворяющей условиям: (i) если $a \in \mathscr{L}$ и $[a, \mathscr{L}_{-1}] = 0$, то $a \in \mathscr{L}_{-1}$; (ii) подпространство $(\mathscr{L}_1)_{\bar{0}}$ содержит элемент P такой, что $\mathscr{L}_1 = [\mathscr{L}_0, P] + F\langle P\rangle$, и супералгебра Ли $\mathscr{L}_0$ порождается множеством $[P, \mathscr{L}_{-1}]$. Построенное соответствие между супералгебрами Ли с такими градуировками и й.с. является взаимно однозначным.

Представлением й.с. J в суперпространстве $V = V_{\bar{0}} \oplus V_{\bar{1}}$ называется четное отображение ρ: $J \to \operatorname{End} V$, такое, что расщепляемое нуль-расширение $J \dotplus V$ есть й.с. Суперпространство V в этом случае называется J-бимодулем. Если $\varphi = 2\rho$ есть гомоморфизм й.с., то представление ρ называется ассоциативной специализацией. Й.с. специальна тогда и только тогда, когда она допускает точные ассоциативные специализации. Бимодули над простыми конечномерными йордановыми алгебрами устроены довольно просто: существует лишь конечное число неизоморфных неприводимых бимодулей, причем все они конечномерны, и любой бимодуль вполне приводим. Отличия в суперслучае хорошо видны на примере й.с. билинейной формы на суперпространстве размерности $(0, n)$. Любой модуль над алгеброй Вейля A_n поднимается до бимодуля над этой й.с. Однако, как станет ясно из дальнейшего, эти отличия не затрагивают й.с. F_{10}, которую можно определить следующим образом.

Зафиксируем в простой исключительной супералгебре Ли $F(4)$ простую систему корней $\{\alpha_i \mid 1 \leqslant i \leqslant 4\}$, соответствующую диаграмме Дынкина $\otimes - \bigcirc \Leftarrow \bigcirc - \bigcirc$ (см. [2]). Так как в этом случае функционал $\tilde{\alpha} = 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 2\alpha_3 + \alpha_4$ является старшим корнем, супералгебра $\mathscr{L}$ допускает градуировку вида $\mathscr{L} = \mathscr{L}_{-1} \oplus \mathscr{L}_0 \oplus \mathscr{L}_1$, где $\mathscr{L}_{\pm 1} = F \cdot \left\langle x_{\pm\alpha} \mid \alpha = \sum_{i=1}^{3} n_i \alpha_i + \alpha_4 \right\rangle$, $\mathscr{L}_0 = H \oplus F\langle x_\alpha \mid \alpha = \sum_{i=1}^{3} n_i \alpha_i \rangle$. Полагая $P = x_{\alpha_3} + x_{\alpha_4}$, превращаем суперпространство $\mathscr{L}_{-1}$ в й.с. F_{10} относительно операции $x \circ y = [p, x, y]$ для $x, y \in \mathscr{L}_{-1}$. Таблица умножения F_{10} выписана в [4].

Теорема 1. *Любой неприводимый бимодуль над F_{10} либо изоморфен регулярному, либо получается из регулярного изменением четности однородных компонент. Любой (в том числе бесконечномерный) бимодуль над F_{10} вполне приводим.*

Следствие. Супералгебра F_{10} исключительна.

Нетрудно проверить, что конструкция Кантора переводит расщепляемое нуль-расширение в расщепляемое нуль-расширение и тем самым распространяется на модули. При этом неприводимым (вполне приводимым) представлениям соответствуют неприводимые (вполне приводимые). Рассматриваемая градуировка на $F(4)$ такова, что выполнено равенство $[(\mathscr{L}_1)_{\bar{0}}, (\mathscr{L}_{-1})_{\bar{0}}] = (\mathscr{L}_0)_{\bar{0}}$. Это позволяет вывести конечномерность неприводимых бимодулей из леммы 11 работы [5], а затем использовать описание конечномерных неприводимых представлений простых супералгебр Ли, полученное в [2] и невырожденность формы Киллинга на $F(4)$.

В любой й.с. отображения $[L_a, L_b]$ являются супердифференцированиями. Такие супердифференцирования называются внутренними. В отличие от йордановых алгебр простые й.с. могут иметь внешние супердифференцирования. Супералгебра Ли $L(J)$, порожденная операторами L_x, называется структурной супералгеброй й.с. J. Если $\mathscr{L} = \mathscr{L}_{-1} \oplus \mathscr{L}_0 \oplus \mathscr{L}_1$ конструкция Кантора для J, то $\mathscr{L}_0 = L(J)$.

Теорема 2. *Пусть* $J \simeq F_{10}$. *Тогда* $L(J) \simeq F\langle c\rangle \oplus \mathrm{osp}(2, 4)$, *где* c — *центральный элемент. Кроме того,* $\mathrm{Der}\, J \simeq \mathrm{osp}(1, 2) \oplus \mathrm{osp}(1, 2)$, *и любое супердифференцирование в* J *является внутренним.*

В силу простоты F_{10} супералгебра Ли $\mathrm{osp}(2, 4)$ действует на F_{10} неприводимо. Прямые вычисления показывают, что старший вес этого модуля относительно диаграммы Дынкина с одним серым кружком (см. [2]) есть λ_3.

Автор приносит благодарность Л. А. Бокутю за руководство работой и Е. И. Зельманову за постановку задачи и полезные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Kac V. G.* // Com. in alg.—1977. V. 5, № 13.— P. 1375—1400. **2.** *Kac V. G.* // Adv. in math.—1977. V. 26, № 1.— P. 8—96. **3.** *Кантор И. Л.* // Труды сем. по вект. и тенз. анализу. Вып. 13. М.: Изд-во МГУ, 1966.— С. 310—398. **4.** *Hogben L., Kac V. G.* // Com. in alg.— 1983. V. 11, № 10. P. 1155—1156. **5.** *Зельманов Е. И.* // Мат. сб.—1983. Т. 121, № 4.— С. 537—552.

Институт математики
СО АН СССР

Поступило в редакцию
10 октября 1985 г.