



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. А. Горкуша, Аппроксимация чисел  $\Omega$ -дробями,  
*Чебышевский сб.*, 2013, том 14, выпуск 4, 95–100

<https://www.mathnet.ru/cheb306>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<https://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.9.174

28 апреля 2025 г., 05:32:15



# ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

## Том 14 Выпуск 4 (2013)

---

УДК 511.9

### АППРОКСИМАЦИЯ ЧИСЕЛ $\Omega$ -ДРОБЯМИ <sup>1</sup>

О. А. Горкуша (ХО ИПМ ДВО РАН г. Хабаровск)

#### Аннотация

Пусть вещественное число  $x$  из  $(0, 1)$  представлено в виде  $\Omega$ - дроби  $x = [0; \varepsilon_1/b_1, \dots, \varepsilon_1/b_n, \dots]$ , которая относится к одному из классов полурегулярных дробей. Обозначим через  $\{A_n/B_n\}_{n \geq 1}$  последовательность подходящих дробей  $\Omega$ - дроби числа  $x$  и через  $\{\Upsilon_n\}_{n \geq 1}$  последовательность коэффициентов аппроксимации с  $\Upsilon_n = \Upsilon_n(x) = B_n^2|x - A_n/B_n|$ . В работе мы доказываем, что  $\min(\Upsilon_{n-1}, \Upsilon_n, \Upsilon_{n+1}) \leq 1/\sqrt{5}$  для всех натуральных чисел  $n$ .

*Ключевые слова:* непрерывные дроби, полурегулярные непрерывные дроби, коэффициенты аппроксимации, теорема Валена,  $\Omega$ -непрерывные дроби, аналог теоремы Бореля.

### APPROXIMATION BY $\Omega$ - CONTINUED FRACTIONS

O. A. Gorkusha (с. Khabarovsk)

#### Abstract

Let  $x \in (0, 1)$  be a real number,  $x = [0; \varepsilon_1/b_1, \dots, \varepsilon_1/b_n, \dots]$  be its expansion in  $\Omega$ - continued fraction. Let  $A_n/B_n$  be its  $n$ th convergent and  $\Upsilon_n = \Upsilon_n(x) = B_n^2|x - A_n/B_n|$ . In this note we prove the analog of the classical theorems by Borel and Hurwitz on the quality of the approximations for  $\Omega$ -continued fractions:  $\min(\Upsilon_{n-1}, \Upsilon_n, \Upsilon_{n+1}) \leq 1/\sqrt{5}$ . The result is best possible.

*Keywords:* continued fractions, semi-regular continued fractions, approximation coefficients, Vahlen's theorem,  $\Omega$ -continued fraction expansion, analogue of Borel's theorem.

---

<sup>1</sup>Работа выполнена при поддержке фонда РФФИ, гранты  $\mathcal{N}$  11-01-00628-а,  $\mathcal{N}$  11-01-12004-офи-м-2011.

### §1. Введение

В 1891 году А. Гурвиц опубликовал работу [1], в которой он доказал фундаментальный результат, касающийся аппроксимации иррациональных чисел рациональными: для каждого иррационального числа  $x$  существует бесконечно много рациональных чисел  $p/q$  таких, что

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{\sqrt{5}q^2}.$$

В 1903 году Е. Борель в работе [2] предпринял попытку найти эти числа. Борель доказал следующее утверждение: пусть  $x = [a_0; a_1, \dots, a_n, \dots]$  — представление числа  $x$  в виде регулярной непрерывной дроби, где  $a_0$  — целое и  $a_i (i \geq 1)$  — натуральные числа. Пусть  $P_n/Q_n = [a_0; a_1, \dots, a_{n-1}]$  — подходящая дробь этой непрерывной дроби с номером  $n$  и  $\Theta_n = \Theta_n(x) = Q_n^2 |x - P_n/Q_n|$  — коэффициент аппроксимации с номером  $n$  числа  $x$  регулярной дробью. Тогда

$$\min(\Theta_{n-1}, \Theta_n, \Theta_{n+1}) \leq \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Как видим, теорема Бореля утверждает, что по крайней мере одна из трех последовательных подходящих дробей удовлетворяет результату Гурвица.

Кроме регулярных непрерывных дробей существует множество других методов аппроксимации. Среди них — представление числа  $x$  в виде полурегулярной непрерывной дроби

$$x = [b_0; \varepsilon_1/b_1, \dots, \varepsilon_n/b_n, \dots],$$

где  $b_0$  — целое число,  $b_i (i \geq 1)$  — натуральные числа,  $\varepsilon_i \in \{-1, 1\} (i \geq 1)$ . Обозначим через  $\{A_n/B_n\}_{n \geq 1}$  с

$$\frac{A_n}{B_n} = [b_0; \varepsilon_1/b_1, \dots, \varepsilon_1/b_{n-1}]$$

— последовательность подходящих дробей рассматриваемой непрерывной дроби, а через  $\{\Upsilon_n\}_{n \geq 1}$  с

$$\Upsilon_n = B_n^2 \left| x - \frac{A_n}{B_n} \right|$$

— последовательность коэффициентов аппроксимации этой же непрерывной дроби. Хорошо известно, что последовательность  $\{A_n/B_n\}_{n \geq 1}$  образует подпоследовательность последовательности  $\{P_n/Q_n\}_{n \geq 1}$  подходящих дробей регулярной непрерывной дроби числа  $x$ . Поэтому возникает опасность потери точности аппроксимации числа  $x$  подходящими дробями соответствующих непрерывных дробей. В качестве примера приведем результат для полурегулярных дробей с выбором минимального по модулю остатка.

В работе [3] Н. Jager и С. Краайкамр получили любопытный результат: для каждого  $n \geq 1$

$$\min(\Upsilon_{n-1}, \Upsilon_n, \Upsilon_{n+1}) \leq \frac{5(5\sqrt{5} - 11)}{2}.$$

А в работе [4] J. Tong показал, что для любого числа  $k \geq 1$  и для каждого  $n \geq 1$

$$\min(\Upsilon_{n-1}, \dots, \Upsilon_{n+k}) \leq \frac{2}{3 + \sqrt{5} - 2\alpha_k}, \quad \alpha_1 = \frac{2}{5}, \quad \alpha_i = \frac{1}{3 - \alpha_{i-1}}.$$

Из всех этих результатов следует, что есть "разрыв" между аппроксимациями двух видов при любой длине последовательности коэффициентов аппроксимации дробей полурегулярных дробей с выбором минимального по модулю остатка. Тоже можно сказать и о других классах полурегулярных непрерывных дробей — работы [5], [6].

В этой статье мы показываем, что аппроксимируя вещественное число  $\Omega$ - дробями, мы не теряем качество аппроксимации.

**ТЕОРЕМА 1.** *Для каждого иррационального числа  $x$*

$$\min(\Upsilon_{n-1}(x), \Upsilon_n(x), \Upsilon_{n+1}(x)) \leq \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad n \geq 1,$$

где  $\{\Upsilon_n(x)\}_{n \geq 1}$  — последовательность коэффициентов аппроксимации для  $\Omega$ - дроби числа  $x$ .

## §2. Некоторые свойства $\Omega$ - дробей

Все утверждения, приведенные в этом параграфе, доказываются в работах [7], [8] и поэтому мы приводим их без доказательств. В перечисленных работах было показано, что  $\Omega$ - дробь вещественного числа  $x$  — полурегулярная дробь, полученная из регулярной дроби в результате процесса сжатия относительно фиксированной области сжатия  $S \subset D$ , где  $D = ([0, 1] \setminus \mathbf{Q}) \times [0, 1]$ . Определим области  $\Delta, \Delta^-, \Delta^+$  и  $Y, Y_+, Y_-$  следующим образом:

$$\Delta = D \setminus S, \quad \Delta^- = \{(T, V) | (V, T) \in S\}, \quad \Delta^+ = \Delta \setminus \Delta^-;$$

$$Y_+ = \Delta^+, \quad Y_- = F(\Delta^-), \quad Y = Y_+ \cup Y_-, \quad F(t, v) = \left( -\frac{T}{1+T}, 1 - V \right).$$

**Свойство 1.** [8, §2], [8, Лемма 2]

1. Область  $S$  лежит в  $([1/2, 1] \setminus \mathbf{Q}) \times [0, 1]$ .

2. Области  $S$  и  $\Delta^-$  не пересекаются.

Далее определим операторы  $\Psi_+ : Y_+ \mapsto \Psi_+(Y_+)$ ,  $\Psi_- : Y_- \mapsto \Psi_-(Y_-)$ ,  $\Psi : Y \mapsto \Psi(Y)$  соотношениями

$$\begin{aligned}\Psi_+(t, v) &= \left( \frac{v}{1+tv}, \frac{t}{1+tv} \right), \\ \Psi_-(t, v) &= \left( \frac{v}{1+tv}, \frac{-t}{1+tv} \right), \\ \Psi(t, v) &= \begin{cases} \Psi_+(t, v), & (t, v) \in Y_+; \\ \Psi_-(t, v), & (t, v) \in Y_-.\end{cases}\end{aligned}$$

**Свойство 2.** [8, §5] Для любого вещественного числа  $x$  и для каждого  $n \geq 1$  точка  $(\Upsilon_{n-1}, \Upsilon_n)$ , где  $\Upsilon_{n-1}, \Upsilon_n$  — коэффициенты аппроксимации числа  $x$   $\Omega$ -дробью этого числа, распределена в области  $\Psi_+(Y_+)$ , если  $\varepsilon_n = 1$  и в области  $\Psi_-(Y_-)$ , если  $\varepsilon_n = -1$ .

Кроме этого нам понадобятся свойства полурегулярных дробей, которые мы приведем без доказательств. Полное изложение представлено, в частности, в работе [9]: Для каждого  $n \geq 1$

$$\Upsilon_n = \frac{v_{n+1}}{1 + t_{n+1}v_{n+1}}, \quad \Upsilon_{n+1} = \frac{\varepsilon_{n+1}t_{n+1}}{1 + t_{n+1}v_{n+1}}, \quad (1)$$

$$t_n = [0; \varepsilon_n/b_n, \varepsilon_{n+1}/b_{n+1}, \dots], \quad v_n = [0; 1/b_{n-1}, \varepsilon_{n-1}/b_{n-2}, \dots, \varepsilon_2/b_1]. \quad (2)$$

### §3. Доказательство основного результата

**ЛЕММА 1.** Точка  $P_1 = (\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$  не принадлежит области  $\Psi_-(Y_-)$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Предположим обратное. Тогда, согласно определению оператора  $\Psi_-$ , точке  $P_1$  соответствует точка  $P_2 = (\frac{\sqrt{5}-3}{2}, \frac{\sqrt{5}-3}{2})$  в области  $Y_-$ . А из определения множества  $\Delta^-$  следует, что этой точке соответствует точка  $P_3 = (\frac{\sqrt{5}-1}{2}, \frac{\sqrt{5}-1}{2})$  в области  $\Delta^-$ .

С другой стороны, если принять во внимание свойство 1, то получим, что область  $\Delta^-$  лежит выше отрезка  $\{(T, T) | T \in [0, 1]\}$ . Этот вывод противоречит полученному утверждению. Лемма доказана.

□

**ЛЕММА 2.** Для каждого  $n \geq 1$

$$\Upsilon_{n+1} = \varepsilon_{n+1}(\varepsilon_n \Upsilon_{n-1} + b_n \sqrt{1 - 4\varepsilon_n \Upsilon_{n-1} \Upsilon_n} - b_n^2 \Upsilon_n).$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Воспользуемся формулами (1), (2) и выразим коэффициенты аппроксимации  $\Upsilon_{n-1}, \Upsilon_n, \Upsilon_{n+1}$  через  $t_n, v_n, t_{n+1}, v_{n+1}$ . Затем, учитывая соотношение  $t_n = \frac{\varepsilon_n}{b_n + t_{n+1}}$ , получаем зависимость  $\Upsilon_{n-1}, \Upsilon_n, \Upsilon_{n+1}$  от  $v_n, t_{n+1}, v_{n+1}$ , в том числе и равенство

$$\Upsilon_n = \frac{1}{b_n + t_{n+1} + \varepsilon_n v_n}.$$

Выражая отсюда  $v_n$  и из равенства  $\Upsilon_{n+1} = \frac{\varepsilon_{n+1}t_{n+1}}{1+t_{n+1}v_{n+1}}$  выражая  $v_{n+1}$ , получим равенства

$$\begin{aligned} \varepsilon_n \Upsilon_{n-1} &= (b_n + t_{n+1}) - \Upsilon_n (b_n + t_{n+1})^2, \\ \Upsilon_{n+1} &= \varepsilon_{n+1} (t_{n+1} - \Upsilon_n t_{n+1}^2). \end{aligned}$$

С учетом неравенства  $t_n v_n < 1$  выразим  $t_{n+1}$  :

$$t_{n+1} = \frac{1 + \sqrt{1 - 4\varepsilon_n \Upsilon_{n-1} \Upsilon_n}}{2\Upsilon_n} - b_n.$$

Отсюда сейчас же получаем утверждение леммы.

□

Теперь мы в состоянии доказать теорему, сформулированную во введении.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Из свойства 2 следует, что для каждого  $n \geq 1$

$$\begin{aligned} (\Upsilon_{n-1}, \Upsilon_n) &\in \Psi_+(Y_+), \quad \varepsilon_n = 1; \\ (\Upsilon_{n-1}, \Upsilon_n) &\in \Psi_-(Y_-), \quad \varepsilon_n = -1. \end{aligned}$$

Если хотя бы одна из точек  $(\Upsilon_{n-1}, \Upsilon_n), (\Upsilon_n, \Upsilon_{n+1})$  не лежит в области

$$\Psi' = \left\{ (w_1, w_2) \in \Psi_+(Y_+) \mid w_1, w_2 \geq \frac{1}{\sqrt{5}} \right\},$$

то доказывать нечего. И если  $(\Upsilon_{n-1}, \Upsilon_n)$  принадлежит области  $\Psi_-(Y_-)$ , то справедливость теоремы вытекает из леммы 1.

Осталось рассмотреть случай, когда  $(\Upsilon_{n-1}, \Upsilon_n), (\Upsilon_n, \Upsilon_{n+1}) \in \Psi'$ . При таких условиях  $\varepsilon_n = \varepsilon_{n+1} = 1$  и  $b_n = 1$ . Из леммы 2 следует, что функция относительно переменных  $\Upsilon_{n-1}, \Upsilon_n$ , по которой вычисляется  $\Upsilon_{n+1}$ , имеет максимальное значение, равное  $\frac{1}{\sqrt{5}}$ . Следовательно

$$\min(\Upsilon_{n-1}, \Upsilon_n, \Upsilon_{n+1}) \leq \frac{1}{\sqrt{5}},$$

из чего следует утверждение теоремы.

□

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Hurwitz A. Über die angenäherte Darsteckung der Irrationalzahlen durch rationale Brüche // Math. Ann. 1891. №39. P. 279-284.
2. Borel E. Contribution á l'analyse arithmétique do continu // J. Math. Pures. Appl. 1903. №9. P. 329-375.
3. Jager H., Kraaikamp C. On the approximation by continued fractions // J. Math. Pures. Appl. 1989. №92. P. 289-307.

4. Tong J. Approximation by nearest integer continued fractions // Math. Scand. 1992. №71. P. 161-166.
5. Kraaikamp C., Schmidt T., Smeets L. Tong's spectrum for Rosen continued fractions // Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux 2007. №19. P. 641-661.
6. Hartono Y. Ergodic Properties of Continued Fraction Algorithms. Delft University Press 2003. ISBN 90-407-2381-8
7. Горкуша О. А. О конечных цепных дробях специального вида // Чебышевский сборник. 2008. Т. 9, №1(25). С. 80-108.
8. Горкуша О. А. Некоторые метрические свойства  $\Omega$ - дробей // Чебышевский сборник. 2012. Т. 13, №2. С. 28-58.
9. Dajani K., Kraaikamp C. Ergodic Theory of Numbers Carus Mathematical Monographs, 29. Mathematical Association of America, Washington, DC, 2002. 190 p.

Хабаровское отделение Института прикладной математики Дальневосточного отделения Российской академии наук.

Поступило 12.09.2013