V. V. Voevodin, The convergence of the orthogonal power method, *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.*, 1962, Volume 2, Number 4, 529–536

ЖУРНАЛ
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ и МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Том 2 Июль 1962 Август № 4

О СХОДИМОСТИ ОРТОГОНАЛЬНОГО СТЕПЕННОГО МЕТОДА

В. В. ВОЕВОДИН
(Москва)

В работе [1] был предложен метод решения полной проблемы собственных значений произвольной невырожденной матрицы, который по аналогии с треугольным степенным методом будем называть ортогональным степенным методом. Сходимость этого метода была доказана при довольно жестких ограничениях: исходная матрица A имеет простую жорданову структуру и начальная матрица Q_0 выбирается специальным образом.

В настоящей статье доказывается, что ортогональный степенной метод позволяет решать полную проблему собственных значений произвольной комплексной матрицы при любом выборе начальной матрицы Q_0.

Обозначим через Ф класс комплекснозначных функций $\varphi(x)$, определенных на всей действительной оси и имеющих следующий вид:

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{m} c_k \prod_{p=1}^{m_k} e^{(i\alpha_{kp}x)\sigma_{kp}}. \tag{1}$$

Здесь c_k — комплексные, α_{kp} — действительные, σ_{kp} — целые числа; сумма и произведение в формуле (1) содержат конечное число членов. Очевидно, что сумма и произведение конечного числа функций, принадлежащих классу Ф, есть также функция из Ф. Рассмотрим некоторые свойства функции $\varphi(x)$.

Лемма 1. *Если* $\lim\limits_{n\to\infty}\varphi(n) = 0$, $n = 1, 2, \ldots$, *то* $\varphi(x) = 0$ *для всех целых значений* x.

Будем называть числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ рационально независимыми, если из равенства $n_1\alpha_1 + n_2\alpha_2 + \cdots + n_s\alpha_s = 0$, где $n_1, n_2, \ldots, n_s$ целые числа, следует $n_1 = n_2 = \cdots = n_s = 0$. Предположим, что совокупность всех частот α_{kp} функции $\varphi(x)$, отличных по модулю от 2π и одна от другой, рационально зависима вместе с числом 2π; тогда некоторое $\alpha_{k_0p_0}$ будет равно:

$$\alpha_{k_0p_0} = 2\pi d_0 + \sum_{k\neq k_0,\ p\neq p_0} d_{kp}\alpha_{kp}, \tag{2}$$

где d_0 и d_{kp} — рациональные числа. Пусть d — наименьшее общее кратное их знаменателей. Сделаем замену переменной

$$x = dt$$

и подставим в $\varphi(x)$ вместо всех $\alpha_{k_ip_i}$, равных по модулю $\alpha_{k_0p_0}$, выражение (2).

После преобразования показательных функций от суммы аргументов в произведение соответствующих функций $\varphi(x)$ приводится к виду, аналогичному первоначальному, но содержащему меньшее количество отличных по модулю от 2π и одна от другой частот. Продолжая таким образом процесс исключения рационально зависимых частот, приведем функцию $\varphi(x)$ к функции $\varphi(y)$, принадлежащей классу Φ, но все отличные по модулю от 2π и одна от другой частоты которой рационально независимы вместе с числом 2π.

Переменные x и y связаны между собой равенством $x = cy$, где c — целое положительное число. Обозначим рационально независимые и отличные по модулю одна от другой частоты функции $\varphi(y)$ через $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_s$ ($\beta_0 = 2\pi$) и будем рассматривать функцию $\varphi(x)$ как функцию многих переменных

$$\varphi(x) = \varphi(x_0, x_1, \ldots, x_s), \tag{3}$$

определенную на одномерном множестве $x_i = \overline{\beta}_i x$, где $\overline{\beta}_i = \beta_i / c$. В силу периодичности показательной функции имеем

$$\varphi(\overline{\beta}_0 x, \overline{\beta}_1 x, \ldots, \overline{\beta}_s x) = \varphi\left(2\pi\left\{\frac{x}{c}\right\}, 2\pi\left\{\frac{\overline{\beta}_1 x}{2\pi}\right\}, \ldots, 2\pi\left\{\frac{\overline{\beta}_s x}{2\pi}\right\}\right),$$

где $\{\alpha\}$ означает дробную часть числа α. Очевидно, что числа

$$1, \frac{\overline{\beta}_1}{2\pi}, \frac{\overline{\beta}_2}{2\pi}, \ldots, \frac{\overline{\beta}_s}{2\pi}$$

рационально независимы. Выберем произвольное целое число p и заставим x пробегать значения

$$x^{(n)} = p + cn, \qquad n = 1, 2, \ldots;$$

тогда будем иметь

$$\left\{\frac{x^{(n)}}{c}\right\} = \left\{\frac{p}{c} + n\right\} = \left\{\frac{p}{c}\right\}.$$

Известно (см. [2]), что если числа $1, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ рационально независимы, то множество точек с координатами

$$\{\alpha_1 n + \gamma_1\}, \{\alpha_2 n + \gamma_2\}, \ldots, \{\alpha_s n + \gamma_s\}, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

всюду плотно в единичном кубе размерности s при любых числах $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_s$. Следовательно, множество точек с координатами

$$2\pi\left\{\frac{\overline{\beta}_1 (p + cn)}{2\pi}\right\}, 2\pi\left\{\frac{\overline{\beta}_2 (p + cn)}{2\pi}\right\}, \ldots, 2\pi\left\{\frac{\overline{\beta}_s (p + cn)}{2\pi}\right\}, \qquad n = 1, 2, \ldots, \tag{4}$$

всюду плотно в s-мерном кубе, сторона которого равна 2π.

Поэтому, учитывая непрерывность функции $\varphi(x_0, x_1, \ldots, x_s)$, можно сделать вывод, что, каково бы ни было целое число p, всегда найдется возрастающая последовательность целых положительных чисел $x^{(n_i)} = p + cn_i$ таких, что

$$\lim_{i \to \infty} \varphi(x^{(n_i)}) = \varphi(p).$$

Так как по условию леммы $\varphi(n) \to 0$, то из последнего равенства следует $\varphi(p) = 0$ для любого целого числа p.

Лемма 2. *Для того чтобы существовала возрастающая последовательность целых положительных чисел n_i таких, что*

$$|\varphi(n_i)| \geqslant \delta > 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, \tag{5}$$

необходимо и достаточно, чтобы $\varphi(x)$ была отлична от нуля хотя бы при одном целом значении аргумента.

Необходимость очевидна. Предположим, что $\varphi(p) \neq 0$, где p — целое число, но лемма 2 не имеет места; тогда будем иметь

$$\lim_{n\to\infty} \varphi(n) = 0, \qquad n = 1, 2, \ldots .$$

В этом случае из леммы 1 следует $\varphi(p) = 0$, что невозможно по предположению. Достаточность доказана.

Рассмотрим вопрос о «густоте» последовательности чисел n_i, удовлетворяющей (5). Обозначим через $\nu_n(\delta)$ число целых положительных чисел $n_i \leqslant n$, для которых $|\varphi(n_i)| \geqslant \delta$. Справедлива следующая

Лемма 3. *Имеет место соотношение*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\nu_n(\delta)}{n} = 1 - o(1).$$

Пусть некоторая последовательность точек $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \ldots, \mathcal{P}_n, \ldots$ лежит всюду плотно в множестве G меры g. Рассмотрим его подмножество F меры f и обозначим через μ_n число целых положительных чисел $n_i \leqslant n$, для которых соответствующие точки $\mathcal{P}_{n_i}$ не попадают в множество F. Будем называть последовательность $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \ldots, \mathcal{P}_n, \ldots$ равномерно распределенной в множестве G, если

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mu_n}{n} = 1 - \frac{f}{g}$$

независимо от положения множества F.

Очевидно, что рассмотрение вопроса о «густоте» последовательности чисел n_i, удовлетворяющих условию (5), эквивалентно рассмотрению вопроса о количестве точек с координатами (4), близких к нулям функции $\varphi(x_0, x_1, \ldots, x_s)$ и имеющих фиксированную координату $x_0 = \overline{x}_0$. $\varphi(\overline{x}_0, x_1, \ldots, x_s)$ есть аналитическая функция своих аргументов, поэтому множество ее нулей в s-мерном кубе со стороной 2π будет множеством меры нуль. Следовательно, для любого как угодно малого числа δ можно найти такое число $\varepsilon > 0$, что все нули функции $\varphi(\overline{x}_0, x_1, \ldots, x_s)$ будут содержаться в некотором множестве G_ε меры ε, причем вне этого множества $|\varphi(\overline{x}_0, x_1, \ldots, x_s)| \geqslant \delta$. ε как функция от δ есть по крайней мере $o(1)$. Так как последовательность точек (4) равномерно распределена в s-мерном кубе со стороной 2π (см. [2]), то отсюда следует утверждение леммы.

Теорема 1. *Пусть дано конечное число функций $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x), \ldots$ $\ldots, \varphi_s(x)$ из Φ. Если $\psi(x) = \varphi_1(x) \cdot \varphi_2(x) \ldots \varphi_s(x)$ отлична от нуля хотя бы при одном целом значении аргумента, то существует возрастающая последовательность целых положительных чисел n_i таких,* *что*

$$|\varphi_j(n_i)| \geqslant \delta > 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, s, \quad i = 1, 2, \ldots .$$

Эта подпоследовательность состоит почти из всех чисел натурального ряда.

Заметим, что все функции $\varphi_j(x)$ ограничены сверху, т. е.

$$|\varphi_j(x)| \leqslant N, \qquad j = 1, 2, \ldots s,$$

поэтому, для того чтобы их модули были ограничены одновременно снизу строго положительным числом, необходимо и достаточно, чтобы был ограничен снизу модуль их произведения. Действительно, если

$$|\varphi_1(x)| \geqslant \delta > 0, \ |\varphi_2(x)| \geqslant \delta > 0, \ldots, |\varphi_s(x)| \geqslant \delta > 0,$$

то

$$|\psi(x)| = |\varphi_1(x) \cdot \varphi_2(x) \ldots \varphi_s(x)| \geqslant \delta^s > 0.$$

Если же выполнено неравенство

$$|\varphi_1(x) \cdot \varphi_2(x) \ldots \varphi_s(x)| \geqslant \mu > 0,$$

то

$$|\varphi_j(x)| = \frac{|\varphi_1(x) \cdot \varphi_2(x) \ldots \varphi_s(x)|}{|\varphi_1(x) \ldots \varphi_{j-1}(x)\, \varphi_{j+1}(x) \ldots \varphi_s(x)|} \geqslant \frac{\mu}{N^{s-1}} > 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, s.$$

Так как $\psi(x) \in \Phi$, то теорема 1 следует непосредственно из леммы 2 и 3.

Пусть требуется решить полную проблему собственных значений для комплексной невырожденной матрицы A порядка n. Представим ее в виде произведения

$$A = Q^{-1} \Lambda Q,$$

где Q — невырожденная матрица, Λ — квазидиагональная матрица Жордана, клетки которой имеют следующее строение:

$$\begin{pmatrix} \lambda & & & & & 0 \\ 1 & \lambda & & & & \\ & 1 & \lambda & & & \\ & & \cdots & & & \\ & & & \cdots & & \\ & & & & \cdots & \\ 0 & & & & 1 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Здесь λ — некоторое собственное значение матрицы A. Известно (см. [3]), что соответствующие клетки матрицы Λ^k будут равны

$$\begin{pmatrix} \lambda^k & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ c_k^1 \lambda^{k-1} & \lambda^k & 0 & \ldots & 0 \\ c_k^2 \lambda^{k-2} & c_k^1 \lambda^{k-1} & \lambda^k & \ldots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_k^{p-1} \lambda^{k-p+1} & c_k^{p-2} \lambda^{k-p+2} & c_k^{p-3} \lambda^{k-p+3} & \ldots & \lambda^k \end{pmatrix},$$

где p — порядок клетки. Таким образом, любой элемент матрицы Λ^k есть произведение k-й степени некоторого собственного значения на многочлен от k степени не выше n. Любой минор l-го порядка матрицы есть сумма $l!$ произведений по l ее элементов, поэтому для всех миноров матрицы Λ^k будем иметь

$$\Lambda^k \begin{pmatrix} i_1 i_2 \dots i_l \\ j_1 j_2 \dots j_l \end{pmatrix} = \sum_{p_1 p_2 \dots p_l} f_{p_1 p_2 \dots p_l}(k)\, \lambda_{p_1}^k \lambda_{p_2}^k \dots \lambda_{p_l}^k, \tag{6}$$

где $f_{p_1 p_2 \dots p_l}(k)$ — многочлены от k степени не выше $l \cdot n$. Для больших k максимальными по модулю в этих суммах будут члены, содержащие множители $\lambda_{p_1}^k \cdot \lambda_{p_2}^k \dots \lambda_{p_l}^k$, равные по модулю $\lambda_1^k \cdot \lambda_2^k \dots \lambda_l^k$ (см. [1], формула (30)), и функции $f_{p_1 p_2 \dots p_l}(k)$ с наивысшей степенью k. Запишем собственные значения матрицы $\mathbf{A}$ в тригонометрической форме:

$$\lambda_j = |\lambda_j| e^{i\alpha_j}.$$

Вынося из сумм (6) модуль максимального члена, получаем для миноров матрицы $\mathbf{\Lambda}^k$ следующую формулу:

$$\mathbf{\Lambda}^k \begin{pmatrix} i_1 i_2 \dots i_l \\ j_1 j_2 \dots j_l \end{pmatrix} = f_l(k) |\lambda_1|^k \cdot |\lambda_2|^k \dots |\lambda_l|^k \left(M_{j_1 j_2 \dots j_l}^{i_1 i_2 \dots i_l}(k) + o(1)\right),$$

где все функции $M(k)$ принадлежат классу Φ и не все одновременно равны нулю во всех целых точках. Для функций $f_l(k)$ справедливы неравенства

$$1 \leqslant f_l(k) \leqslant \alpha \cdot k^{n^2}, \qquad l = 1, 2, \dots, n.$$

Будем предполагать, что собственные значения расположены по диагонали матрицы $\mathbf{\Lambda}$ в убывающем порядке; тогда для миноров порядка r_p (см. [1], формула (30)) можно указать более точные формулы. Именно:

$$\mathbf{\Lambda}^k \begin{pmatrix} 12 \dots r_p \\ 12 \dots r_p \end{pmatrix} = \lambda_1^k \lambda_2^k \dots \lambda_{r_p}^k, \quad \mathbf{\Lambda}^k \begin{pmatrix} i_1 i_2 \dots i_{r_p} \\ j_1 j_2 \dots j_{r_p} \end{pmatrix} = \lambda_1^k \cdot \lambda_2^k \dots \lambda_{r_p}^k \cdot o(1).$$

Возьмем две произвольные невырожденные матрицы $\mathbf{Q}_0$ и $\mathbf{F}_0$ и рассмотрим миноры матрицы $\mathbf{F}_0 \mathbf{A}^k \mathbf{Q}_0$. Используя формулу Бине — Коши (см. [3]) для определителя произведения двух прямоугольных матриц, находим

$$\mathbf{F}_0 \mathbf{A}^k \mathbf{Q}_0 \begin{pmatrix} i_1 i_2 \dots i_l \\ j_1 j_2 \dots j_l \end{pmatrix} = \sum_{1 \leqslant p_1 < p_2 < \dots < p_l \leqslant n} \mathbf{F}_0 \mathbf{Q}^{-1} \begin{pmatrix} i_1 i_2 \dots i_l \\ p_1 p_2 \dots p_l \end{pmatrix} \mathbf{\Lambda}^k \mathbf{Q} \mathbf{Q}_0 \begin{pmatrix} p_1 p_2 \dots p_l \\ j_1 j_2 \dots j_l \end{pmatrix} =$$

$$= \sum_{1 \leqslant p_1 < p_2 < \dots < p_l \leqslant n} F_0 Q^{-1} \begin{pmatrix} i_1 i_2 \dots i_l \\ p_1 p_2 \dots p_l \end{pmatrix} \times$$

$$\times \sum_{1 \leqslant t_1 < t_2 < \dots t_l \leqslant n} \Lambda^k \begin{pmatrix} p_1 p_2 \dots p_l \\ t_1 t_2 \dots t_l \end{pmatrix} \mathbf{Q} \mathbf{Q}_0 \begin{pmatrix} t_1 t_2 \dots t_l \\ j_1 j_2 \dots j_l \end{pmatrix} =$$

$$= f_l(k) |\lambda_1|^k |\lambda_2|^k \dots |\lambda_l|^k \left[\varphi_{j_1 j_2 \dots j_l}^{i_1 i_2 \dots i_l}(k) + o(1)\right],$$

где все функции $\varphi(k)$ принадлежат классу Φ. Будем требовать, чтобы матрицы $\mathbf{Q}_0$ и $\mathbf{F}_0$ были выбраны таким образом, чтобы функция

$$\psi(k) = \prod_{l=1}^{n} \varphi_{12 \dots l}^{12 \dots l}(k)$$

была отлична от нуля хотя бы при одном целом значении аргумента. Очевидно, что множество тех матриц $\mathbf{Q}_0$ и $\mathbf{F}_0$, для которых это требование не выполняется, в пространстве размерности $2n^2$ образует поверхность меньшей размерности. Учитывая результаты теоремы 1, заключаем, что справедлива следующая

Теорема 2. *Какова бы ни была комплексная невырожденная матрица* $\mathbf{A}$, *почти для всех невырожденных матриц* $\mathbf{Q}_0$ *и* $\mathbf{F}_0$ *существует возрастающая подпоследовательность целых положительных чисел* k_i *таких, что*

$$\left|\mathbf{F}_0\mathbf{A}^{k_i}\mathbf{Q}_0\begin{pmatrix} i_1 i_2 \ldots i_l \\ j_1 j_2 \ldots j_l\end{pmatrix}\right| \leqslant L f_l(k_i)\,|\lambda_1|^{k_i}\,|\lambda_2|^{k_i}\ldots|\lambda_l|^{k_i},$$

$$\left|\mathbf{F}_0\mathbf{A}^{k_i}\mathbf{Q}_0\begin{pmatrix} 12\ldots l \\ 12\ldots l\end{pmatrix}\right| \geqslant \delta\cdot f_l(k_i)\,|\lambda_1|^{k_i}\,|\lambda_2|^{k_i}\ldots|\lambda_l|^{k_i}, \qquad \delta>0,$$

$$\mathbf{F}_0\mathbf{A}^{k_i}\mathbf{Q}_0\begin{pmatrix} 12\ldots k_p \\ 12\ldots k_p\end{pmatrix} = \lambda_1^{k_i}\lambda_2^{k_i}\ldots\lambda_{k_p}^{k_i}(\sigma_{k_p}+o(1)), \qquad \sigma_{k_p}\neq 0,$$

$$1\leqslant f_l(k_i)\leqslant \alpha k_i^{n^2},$$

$$l=1,2,\ldots,n, \quad p=1,2,\ldots,m, \quad i=1,2,\ldots .$$

Здесь L, δ, σ_{k_p}, α — постоянные числа.

Аналогично доказывается

Теорема 3. *Какова бы ни была комплексная невырожденная матрица* $\mathbf{A}$, *почти для всех невырожденных матриц* $\mathbf{Q}_0$ *и* $\mathbf{F}_0$ *существует возрастающая подпоследовательность целых положительных чисел* k_i *таких, что*

$$\left|\mathbf{B}_{k_i}\begin{pmatrix} i_1 i_2 \ldots i_l \\ j_1 j_2 \ldots j_l\end{pmatrix}\right| \leqslant L\cdot f_l(k_i)\,|\lambda_1|^{2k_i}\,|\lambda_2|^{2k_i}\ldots|\lambda_l|^{2k_i},$$

$$\left|\mathbf{B}_{k_i}\begin{pmatrix} 12\ldots l \\ 12\ldots l\end{pmatrix}\right| \geqslant \delta\cdot f_l(k_i)\,|\lambda_1|^{2k_i}\,|\lambda_2|^{2k_i}\ldots|\lambda_l|^{2k_i}, \qquad \delta>0,$$

$$\mathbf{B}_{k_i}\begin{pmatrix} 12\ldots k_p \\ 12\ldots k_p\end{pmatrix} = \lambda_1^{2k_i}\cdot\lambda_2^{2k_i}\ldots\lambda_{k_p}^{2k_i}(\sigma_{k_p}+o(1)), \qquad \sigma_{k_p}\neq 0,$$

$$1\leqslant f_l(k_i)\leqslant \alpha k_i^{2n^2},$$

$$l=1,2,\ldots,n, \quad p=1,2,\ldots,m, \quad i=1,2,\ldots .$$

Здесь $\mathbf{B}_{k_i}=\mathbf{Q}_0^*\mathbf{A}^{*k_i}\mathbf{F}_0^*\mathbf{F}_0\mathbf{A}^{k_i}\mathbf{Q}_0$; L, δ, σ_{k_p}, a — постоянные числа. Более сложными выкладками можно показать, что неравенства теоремы 3 выполняются для всей последовательности целых положительных чисел.

При помощи теорем 2 и 3 легко доказать также сходимость треугольного степенного и ортогонального степенного методов. Поскольку оба доказательства проходят совершенно одинаково, докажем сходимость, например, ортогонального степенного метода.

Предположим, что теорема 2 выполняется при $\mathbf{F}_0=\mathbf{E}$, в противном случае вместо матрицы $\mathbf{A}$ будем рассматривать матрицу $\mathbf{F}_0\mathbf{A}\mathbf{F}_0^{-1}$. Из формул (43), (44) (см. [1]) и теоремы 3 легко получить, что матрицу ∇_{k_i} можно представить в виде произведения $\nabla_{k_i}=\mathbf{D}_{k_i}\overline{\nabla}_{k_i}$, где $\overline{\nabla}_{k_i}$ — правая треугольная матрица с единичными диагональными элементами, недиагональные элементы матрицы $\overline{\nabla}_{k_i}$ ограничены сверху равномерно по k_i. $\mathbf{D}_{k_i}$ — диагональная матрица:

$$\mathbf{D}_{k_i}=[\delta_{11}^{(k_i)},\ \delta_{22}^{(k_i)},\ldots,\delta_{nn}^{(k_i)}],$$

для элементов которой выполняются неравенства

$$\alpha_1 k_i^{-n^2} |\lambda_j|^{k_i} \leqslant |\delta_{jj}^{(k_i)}| \leqslant \alpha_2 \cdot k_i^{n^2} |\lambda_j|^{k_i}, \qquad \alpha_1 > 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{7}$$

Образуем матрицу $A_{k_i} = \overset{*}{Q}_{k_i} \cdot A Q_{k_i}$ и разобьем ее на клетки $A_{pj}^{(k_i)}$ аналогично (32) (см. [1]). Из формулы (47) (см. [1]) и неравенств (7) заключаем, что элементы клеток $A_{pj}^{(k_i)}$ для $p > j$ суть величины порядка

$$O\left[k_i^{2n^2} \left(\frac{\tau_p}{\tau_j}\right)^{k_i}\right],$$

следовательно, матрицы A_{k_i} сходятся к квазитреугольной.

Оценим скорость сходимости коэффициентов характеристических многочленов диагональных клеток $A_{pp}^{(k_i)}$.

Лемма 4. *Если последовательности*

$$P_1(\lambda), \; P_2(\lambda), \ldots, P_k(\lambda), \ldots; \qquad R_1(\lambda), \; R_2(\lambda), \ldots, R_k(\lambda), \ldots$$

многочленов со старшими коэффициентами, равными единице, сходятся к взаимно простым многочленам $P(\lambda)$ и $R(\lambda)$, то скорость их сходимости не меньше, чем скорость сходимости последовательности

$$P_1(\lambda) R_1(\lambda), \; P_2(\lambda) R_2(\lambda), \ldots, P_k(\lambda) R_k(\lambda), \ldots$$

Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ — корни многочлена $P(\lambda)$ кратности $m_1, m_2, \ldots, m_r$. Так как $P(\lambda)$ и $R(\lambda)$ взаимно просты, то для всех $k > k_0$ будем иметь

$$|R_k(\lambda_j)| \geqslant \delta > 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, r.$$

Запишем многочлен $P_k(\lambda) \cdot R_k(\lambda)$ в виде

$$P_k(\lambda) \cdot R_k(\lambda) = P(\lambda) \cdot R(\lambda) + \varepsilon_k(\lambda). \tag{8}$$

Для любого как угодно малого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое целое число $k_1(\varepsilon)$, что для $k > k_1(\varepsilon)$ все коэффициенты многочлена $\varepsilon_k(\lambda)$ будут по модулю меньше ε. Дифференцируя равенство (8) и подставляя значения $\lambda = \lambda_j$, легко получить следующие оценки:

$$|P_k^{(h)}(\lambda_j)| = p_{kj}^h \leqslant N \cdot \varepsilon, \qquad h = 0, 1, \ldots, m_j - 1; \quad j = 1, 2, \ldots, r, \quad k > k_1(\varepsilon),$$

где N — постоянное число, не зависящее от k.

Рассмотрим функцию

$$\eta_k(\lambda) = P_k(\lambda) - P(\lambda).$$

Это есть многочлен от λ степени не выше $m_1 + m_2 + \cdots + m_r - 1$, для которого в узлах λ_j известны $m_1 + m_2 + \cdots + m_r$ его значений и значений его производных. Именно:

$$\eta_k^{(h)}(\lambda_j) = p_{kj}^h, \qquad h = 0, 1, \ldots, m_j - 1, \quad j = 1, 2, \ldots, r, \quad k > k_1(\varepsilon).$$

Следовательно, полином Эрмита (см. [4]) будет совпадать с $\eta_k(\lambda)$. Коэффициенты полинома Эрмита линейно выражаются через его значения в узлах, поэтому все коэффициенты многочлена $\eta_k(\lambda)$ будут меньше $M \cdot \varepsilon$, где M — постоянное число, не зависящее от k. Лемма доказана.

Из формул (34) и (42) (см. [1]) находим

$$\mathbf{A}_{k_i} = \mathbf{Q}^*_{k_i}\mathbf{Q}_{k_i+1}\cdot\nabla_{k_i+1}\cdot\nabla^{-1}_{k_i},$$

откуда, используя формулу Бине — Коши и теорему 3, получаем

$$\left|\mathbf{A}_{k_i}\begin{pmatrix}12\ldots k_p\\12\ldots k_p\end{pmatrix}\right| = \tag{9}$$

$$= \left|\sum_{1\leqslant\alpha_1<\alpha_2<\ldots<\alpha_{k_p}\leqslant n} \mathbf{Q}^*_{k_i}\mathbf{Q}_{k_i+1}\begin{pmatrix}12\ldots k_p\\ \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{k_p}\end{pmatrix}\nabla_{k_i+1}\nabla^{-1}_{k_i}\begin{pmatrix}\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{k_p}\\12\ldots k_p\end{pmatrix}\right| =$$

$$= \left|\mathbf{Q}^*_{k_i}\mathbf{Q}_{k_i+1}\begin{pmatrix}12\ldots k_p\\12\ldots k_p\end{pmatrix}\right|\cdot\left|\nabla_{k_i+1}\nabla^{-1}_{k_i}\begin{pmatrix}12\ldots k_p\\12\ldots k_p\end{pmatrix}\right| =$$

$$= (1+o(1))\left|\nabla_{k_i+1}\nabla^{-1}_{k_i}\begin{pmatrix}12\ldots k_p\\12\ldots k_p\end{pmatrix}\right| =$$

$$= (1+o(1))\sqrt{\left|\mathbf{B}_{k_i+1}\begin{pmatrix}12\ldots k_p\\12\ldots k_p\end{pmatrix}\right|\cdot\left|\mathbf{B}_{k_i}\begin{pmatrix}12\ldots k_p\\12\ldots k_p\end{pmatrix}\right|^{-1}} =$$

$$= |\lambda_1||\lambda_2|\ldots|\lambda_{k_p}|(1+o(1)).$$

Обозначим через $L_n(\lambda)$, $L_p^{(k_i)}(\lambda)$, $L_{rt}^{(k_i)}(\lambda)$ характеристические многочлены, соответственно, матрицы $\mathbf{A}$, клетки $\mathbf{A}_{pp}^{(k_i)}$ и матрицы минора $\mathbf{A}_{k_i}\begin{pmatrix}k_r+1, & k_r+2, \ldots, k_t\\ k_r+1, & k_r+2, \ldots, k_t\end{pmatrix}$. Раскрывая определитель $|\mathbf{A}_{k_i}-\lambda\mathbf{E}|$ по элементам строк с номерами k_p+1, $k_p+2, \ldots, k_{p+1}$, легко получаем следующее соотношение:

$$L_{0p}^{(k_i)}(\lambda)\cdot L_p^{(k_i)}(\lambda)\cdot L_{p+1,\,m}^{(k_i)}(\lambda) = L_n(\lambda) + O\left[k_i^{2n^2}\left(\frac{\tau_p}{\tau_{p-1}}\right)^{k_i}\right] + O\left[k_i^{2n^2}\left(\frac{\tau_{p+1}}{\tau_p}\right)^{k_i}\right].$$

В силу равенства (9) заключаем, что многочлены в левой части соотношения сходятся к взаимно простым многочленам, поэтому из леммы 4 следует, что многочлены $L_p^{(k_i)}(\lambda)$ сходятся к предельным многочленам $L_p(\lambda)$ со скоростью, определяемой равенствами

$$L_1^{(k_i)}(\lambda) = L_1(\lambda) + O\left[k_i^{2n^2}\left(\frac{\tau_2}{\tau_1}\right)^{k_i}\right],$$

$$L_p^{(k_i)}(\lambda) = L_p(\lambda) + O\left[k_i^{2n^2}\left(\frac{\tau_p}{\tau_{p-1}}\right)^{k_i}\right] + O\left[k_i^{2n^2}\left(\frac{\tau_{p+1}}{\tau_p}\right)^{k_i}\right], \quad p = 2, 3, \ldots, m-1,$$

$$L_m^{(k_i)}(\lambda) = L_m(\lambda) + O\left[k_i^{2n^2}\left(\frac{\tau_m}{\tau_{m-1}}\right)^{k_i}\right].$$

Поступила в редакцию
30.03.1962

Цитированная литература

1. В. В. Воеводин. Некоторые методы решения полной проблемы собственных значений. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1962, **2**, № 1, 20—24.
2. J. F. Koksma. Diophantische Approximation. Berlin, 1936.
3. Ф. Р. Гантмахер. Теория матриц. М., Гостехиздат, 1954.
4. В. Л. Гончаров. Теория интерполирования и приближения функций. М., Гостехиздат, 1954.