Доклады Академии наук СССР
1977. Том 237, № 1

УДК 517.862:517.54 МАТЕМАТИКА

А. Д. МЕДНЫХ

ОБ ОДНОМ ПРИМЕРЕ КОМПАКТНОЙ РИМАНОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ С ТРИВИАЛЬНОЙ ГРУППОЙ АВТОМОРФИЗМОВ

(Представлено академиком М. А. Лаврентьевым 20 VII 1977)

1. В работе [1] впервые было дано строгое доказательство следующего утверждения, принадлежащего А. Гурвицу.

Для любого целого числа $g>2$ существует компактная риманова поверхность рода g, группа всех конформных автоморфизмов которой тривиальна.

Позже Л. Гринбергом [2] было показано, что при $g>2$ почти все точки в пространстве Тейхмюллера T_g, за исключением аналитического подмножества, соответствуют римановым поверхностям с тривиальной группой автоморфизмов. Несмотря на это, конструктивных примеров римановых поверхностей с указанным выше свойством известно немного. Один из таких примеров содержится в работе Р. Акколы [3]. Ниже будет предложен способ, позволяющий в явном виде построить фундаментальные многоугольники для дискретного семейства римановых поверхностей с тривиальной группой конформных автоморфизмов.

Предлагаемый подход позволяет также установить существование разветвленного накрытия над сферой, группа преобразований наложения которого и полная группа автоморфизмов накрывающей поверхности являются заданными циклическими группами (теоремы 2, 3). В дальнейшем, без дополнительных ссылок, мы будем использовать определения и обозначения, принятые в [5].

2. Пусть $D=\{z\in\mathbb{C}:\ |z|<1\}$ — единичный круг, который мы будем рассматривать как модель плоскости Лобачевского с метрикой $d\sigma=\dfrac{|dz|}{1-|z|^2}$.

Для заданного простого числа $p>3$ определим три подстановки на p-символах

$$\zeta=(p-1,p-2,\ldots,4,3,1,p,2),$$
$$\eta=(1,4,6,\ldots,p-1,3,5,\ldots,p,2),$$
$$\xi=(1,2,\ldots,p-1,p), \qquad (1)$$

которые удовлетворяют условию $\zeta\eta=\xi$.

Пусть далее заданы r циклов длины p, для которых выполнено равенство

$$\theta_1\theta_2\ldots\theta_r=\xi, \qquad (2)$$

где r — целое число, выбираемое из условия $r\geqslant 2p$.

В круге D построим неэвклидов треугольник OAB, вершина которого O находится в точке $z=0$, а углы при вершинах O, A и B равны соответственно π/pr, π/p и π/r. Построенный треугольник будем обозначать через F, а его сторону AB через l. Соответствующие им при отражении относительно стороны OA треугольник и сторону обозначим через F^- и l^-. Пусть $y=e^{2\pi i/pr}z$ — эллиптическое преобразование D, имеющее порядок pr. Рассмотрим неэвклидов многоугольник

$$F_0=\bigcup_{l=0}^{pr-1} y^l(F\cup F^-), \tag{3}$$

который имеет $2pr$ сторон, определяемых через стороны треугольников F и F^- по формулам

$$I_{k,j}^+=y^{jr+k-1}(I), \quad I_{k,j}^-=y^{jr+k-1}(I^-), \tag{4}$$
$$k=1,2,\ldots,r, \quad j=1,2,\ldots,p.$$

Через x_k обозначим эллиптические преобразования порядка p, которые отображают сторону $I_{k,p}^+$ на $I_{k,p}^-$, $k=1,2,\ldots,r$. При помощи подстановок из (2) зададим отображения, попарно отождествляющие стороны многоугольника F_0:

$$T_{k,j}=y^{r\theta_k(j)}x_k y^{-rj}, \quad k=1,\ldots,r, \quad j=1,\ldots,p. \tag{5}$$

Заметим, что $T_{k,j}$ отображает сторону $I_{k,j}^+$ на $I_{k,\theta_k(j)}^-$. По теореме Пуанкаре ((4), стр. 227), преобразования $T_{k,j}$ порождают фуксову группу

$$\Gamma_0=\{T_{k,j},\ k=1,\ldots,r,\ j=1,\ldots,p\}, \tag{6}$$

для которой F_0 является фундаментальным многоугольником. При этом Γ_0 не содержит эллиптических элементов и определяет компактную риманову поверхность $T=D/\Gamma_0$.

3. Укажем теперь явный вид подстановок в (2), которым будет соответствовать риманова поверхность $T=D/\Gamma_0$ с тривиальной группой конформных автоморфизмов. Положим:

$$\theta_k=\xi^{(-1)^k}, \quad k=1,\ldots,r-2, \quad \theta_{r-1}=\zeta, \quad \theta_r=\eta, \tag{7}$$

если r четно, и

$$\theta_k=\xi^{(-1)^k}, \quad k=1,\ldots,r-4, \quad \theta_{r-3}=\xi^2, \quad \theta_{r-2}=\xi^{-1}, \quad \theta_{r-1}=\zeta, \quad \theta_r=\eta, \tag{7'}$$

если r нечетно.

Теорема 1. *Пусть p — простое число >3 и $r\geqslant 2p$. Пусть далее T — риманова поверхность, определяемая условиями* (7) *или* (7′). *Тогда* $C(T)\cong 1$.

Доказательство теоремы опирается на две следующие леммы. Обозначим через $N(\Gamma_0)$ нормализатор Γ_0 в группе всех конформных преобразований D.

Лемма 1. *Пусть p — простое число >3 и $r\geqslant 2p$. Тогда*

$$N(\Gamma_0)\subseteq\sum_{l=0}^{pr-1} y^l\Gamma_0.$$

Лемма 2. *Следующие условия являются необходимыми и достаточными для того, чтобы $y^{mr+n}\in N(\Gamma_0)$, $m=0,1,\ldots,p-1$, $n=0,1,\ldots,r-1$:*

$$\xi^m\theta_k\xi^{-m}=\theta_{k+n}, \quad k+n\leqslant r,$$
$$\xi^{m+1}\theta_k\xi^{-m-1}=\theta_{\overline{k+n}}, \quad k+n>r,$$

где $k=1,2,\ldots,r$ и $\overline{k+n}=k+n-r$.

Леммы 1, 2 и конкретный вид подстановок (7) и (7′) позволяют установить, что $N(\Gamma_0)=\Gamma_0$. Откуда

$$C(T)\cong N(\Gamma_0)/\Gamma_0\cong 1.$$

При определенном выборе подстановок $\theta_1, \ldots, \theta_r$, удовлетворяющих условию (2), с помощью лемм 1 и 2 удается установить также следующие результаты.

Теорема 2. *Пусть S — компактная риманова поверхность рода* 0 *и p — простое число* >3.

Тогда для любого натурального $N>2p$ и такого, что $(N, p)=1$, существуют компактная риманова поверхность T и регулярное разветвленное накрытие π: $T\to S$, такие, что $\mathrm{C}(T, S)\cong \mathbf{Z}_p$ и $\mathrm{C}(T)\cong \mathbf{Z}_{Np}$.

Теорема 3. *Пусть S — компактная риманова поверхность рода* 0 *и N — натуральное число ($N\geqslant 2$). Пусть, далее, p — простое число такое, что $p\equiv 1 \pmod{2N^2}$. Тогда существуют компактная риманова поверхность T и p-листное накрытие регулярного типа, разветвленное над $Np+1$ точками из S, такие, что $\mathrm{C}(T, S)\cong 1$ и $\mathrm{C}(T)\cong \mathbf{Z}_p$.*

Новосибирский государственный университет

Поступило 7 VII 1977

ЛИТЕРАТУРА

[1] *W. Baily,* J. Math. Kyoto Univ., v. 1, 101 (1961—1962). [2] *L. Greenberg,* Bull. Am. Math. Soc., v. 69, 569 (1963). [3] *R. D. M. Accola,* Proc. Am. Math. Soc., v. 26, 315 (1970). [4] *J. Lehner,* Discontinuous Groups and Automorphic Functions, 1964. [5] *А. Д. Медных,* ДАН, т. 235, № 6 (1977).