

## ДИНАМИКА ЛУЧЕЙ В ОКРЕСТНОСТИ ТОЧЕК РАСПРЯМЛЕНИЯ ГРАНИЦЫ

С каждой волной шепчущей галереи, как хорошо известно, ассоциируется совокупность лучей, многократно отражающихся от границы. Эти лучи заключены между границей и каустикой и образуют две нормальные конгруэнции. Одна из них состоит из отрезков лучей, ограниченных точкой касания с огибающей (каустикой) и точкой падения на границу. Вторая — образована отрезками лучей от точки отражения на границе до точки касания с каустикой. Конгруэнции переходят друг в друга на каустике и при отражении от границы.

При набегании волны шепчущей галереи на точку распрямления границы (т.е. точку, где обращается в нуль кривизна границы или эффективная кривизна в случае неоднородной среды) происходит разрушение этой волны, см. [1,2]. В связи с этим разрушается и семейство лучей, ассоциированное с набегавшей волной, и представляется интересным проследить за поведением этих лучей в окрестности точек распрямления границы. Интерес к этому обусловлен также следующим обстоятельством. В работе [3] построена асимптотика волнового поля в каустической тени в окрестности точки перегиба границы, т.е. в области, куда не проникают лучи, ассоциированные с набегавшей волной шепчущей галереи. Поэтому знание динамики лучей в окрестности этой точки позволяет уточнить область применимости полученных асимптотических формул.

Настоящая статья посвящена изучению поведения описанного выше семейства лучей в окрестности простого нуля кривизны границы (точка перегиба) и двукратного нуля (точка распрямления вогнутой границы). Построения основываются на следующей задаче рассеяния для уравнения типа Шредингера, которое описывает в главном члене высокочастотной асимптотики процесс распространения волны шепчущей галереи в окрестности точек распрямления границы, см. [4]. Требуется в области  $t \in (-\infty, +\infty), x > 0$  найти решение уравнения

$$i \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + Q(x, t) \Psi, \quad (1)$$

удовлетворяющее краевым условиям

$$\Psi|_{x=0} = 0, \quad \Psi \in L_2(0, \infty) \quad \text{при } \forall t \quad (2)$$

и при  $t \rightarrow -\infty$  имеющее заданную асимптотику

$$\Psi(x,t) \rightarrow \Psi_0(x,t) \quad (3)$$

в смысле  $L_2(0, \infty)$ . В случае точки перегиба границы потенциал  $Q(x,t)$  в уравнении (I) и функция  $\Psi_0$  в условии (3) определяются соответственно формулами

$$Q(x,t) = -xt, \\ \Psi_0(x,t) = D(-t)^{1/6} \exp\left\{i\nu \frac{\xi}{5} 2^{-1/3} (-t)^{5/3}\right\} V\left[(-2t)^{1/3} x - \nu\right], \quad (4)$$

где  $V(y)$  - функция Эйри, экспоненциально убывающая при  $y \rightarrow -\infty$ ,  $-\nu$  - ее корень ( $\nu > 0$ ),  $D$  - нормировочная постоянная. В случае точки распрямления вогнутой (со стороны волнового поля) границы

$$Q(x,t) = xt^2, \\ \Psi_0(x,t) = D 2^{1/6} \xi^{1/3} \exp\left\{i\nu 2^{-1/3} \frac{\xi}{7} (-t)^{7/3}\right\} V\left[2^{1/3} (-t)^{2/3} x - \nu\right], \quad (5)$$

причем смысл  $\nu$ ,  $V(y)$  и  $D$  тот же, что и в (4).

В приведенных формулах переменные  $x$  и  $t$  имеют следующий физический смысл:  $t$  пропорциональна длине дуги  $\xi$  границы, при этом  $\xi$  отсчитывается от точки распрямления последней,  $x$  - пропорциональна длине нормали к границе ( $x > 0$  по ту сторону границы, где рассматривается волновой процесс). Физический смысл условия (3) в обоих случаях состоит в том, что со стороны отрицательных значений  $t$  (соответственно  $\xi$ ) на точку  $t=0$ , где обращается в нуль кривизна границы, набегает одна волна шепчущей галереи, характеризуемая значением корня  $-\nu$  функции Эйри  $V$ .

Формулы (I)-(5) остаются справедливыми как в случае однородной, так и неоднородной среды, меняются лишь коэффициенты пропорциональности между координатами  $t, x$  и  $\xi, n$ , где  $n$  - длина нормали к границе.

В координатах  $x, t$  граница становится локально плоской (в окрестности точки распрямления  $\xi=0$ ), но в "параболическом" уравнении (I) появляется потенциал  $Q(x,t)$ . Лучи описываются решениями канонической системы уравнений

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x}, \quad (6)$$

в которой  $H = \frac{1}{2} p^2 + Q(x,t)$ , и оказываются кривыми даже в однородной среде. Луч, выходящий из точки  $t = \tau$  границы  $x=0$  с началь-

ным импульсом  $\rho_0(\tau) = \frac{dx}{dt} \Big|_{t=\tau}$  задается начальными условиями

$$x \Big|_{t=\tau} = 0, \quad \rho \Big|_{t=\tau} = \rho_0(\tau). \quad (7)$$

Для описания семейства лучей, ассоциированного с набегающей волной шепчущей галереи необходимо, опираясь на асимптотику  $\Psi_0(x, t)$ , найти функцию  $\rho_0(\tau)$  для достаточно больших отрицательных  $\tau$ . После этого лучи восстанавливаются вслужу с помощью уравнений (6) и условий отражения на границе  $x=0$ .

Для определения функции  $\rho_0(\tau)$  воспользуемся построениями, изложенными в работе [3]. При достаточно больших отрицательных  $t$  решение  $\Psi(x, t)$  задачи (I)-(3) представляется в виде

$$\Psi(x, t) = \frac{g}{2i} \int_{-\infty}^t dx (t-\tau)^{-1/2} g_0(\tau) \exp\{i[\sigma(x, t|0, \tau) + \sigma_0(\tau)]\}, \quad (8)$$

где  $g(t-\tau)^{-1/2} \exp\{i\sigma(x, t|0, \tau)\} = G(x, t|0, \tau)$  - функция Грина уравнения (I), и по определению  $g_0(\tau) \exp\{i\sigma_0(\tau)\} = \frac{\partial \Psi_0(x, \tau)}{\partial x} \Big|_{x=0}$ .

Уравнение для нахождения критических точек интеграла (8), т.е. уравнение  $\frac{\partial}{\partial \tau} \sigma(x, t|0, \tau) + \frac{d}{d\tau} \sigma_0(\tau) = 0$  приводит (подробнее см. [3]) к следующему выражению для  $\rho_0(\tau)$ :

$$\rho_0(\tau) = \pm \sqrt{-2 \frac{d\sigma_0}{d\tau}}. \quad (9)$$

Поскольку волна шепчущей галереи набегаёт на точку распрямления  $t=0$  границы со стороны  $t < 0$ , в формуле (9) следует взять

$\rho_0(\tau) = + \sqrt{-2 \frac{d\sigma_0}{d\tau}}$  Можно убедиться путем непосредственных вычислений, что совокупность лучей, определяемая формулами (6), (7) и (9) (с  $\rho_0(\tau) > 0$ ) соответствует при  $t \rightarrow -\infty$  лучам, ассоциируемым с волной шепчущей галереи. Действительно, при отражении от границы каждый луч этого семейства переходит в луч того же семейства и огибающая (т.е. каустика) этого семейства определяется уравнением  $(-2t)^{1/3} x - \nu = 0$  в случае точки перегиба и  $2^{1/3} (-t)^{2/3} x - \nu = 0$  - в случае точки распрямления вогнутой границы.

### § I. Расчеты и обсуждения результатов

Для построения лучей на плоскости  $x, t$  проинтегрируем систему уравнений (6) с начальными условиями (7). В результате получим в случае точки перегиба границы и в случае точки распрямления вогнутой границы соответственно следующие формулы

$$x = \rho_0(\tau)(t-\tau) + \frac{1}{6}(t-\tau)^2(t+2\tau) \quad (10.a)$$

$$x = \rho_0(\tau)(t - \tau) - \frac{1}{12}(t - \tau)(t^3 + t^2\tau + t\tau^2 - 3\tau^3). \quad (10.6)$$

Равенства (10) позволяют представить поведение лучей в области  $x > 0$ , если известен начальный импульс  $\rho_0(\tau)$ . Считая  $\tau$  достаточно большим отрицательным, определим  $\rho_0(\tau)$  по формуле (9) (со знаком + в правой части). Принимая во внимание выражения (4) и (5) для функции  $\Psi_0(x, t)$  получаем для двух рассматриваемых случаев соответственно

$$\rho_0(\tau) = \sqrt{\frac{3}{5}} 2^{-1/3} (-\tau)^{5/3}; \quad \rho_0(\tau) = 2^{1/3} \sqrt[3]{-\tau}^{1/3}; \quad (11.a)$$

$$\rho_0(\tau) = \sqrt{\frac{3}{4}} 2^{-1/3} (-\tau)^{7/3}; \quad \rho_0(\tau) = 2^{1/3} \sqrt[3]{-\tau}^{2/3} \quad (11.б)$$

Формулы (10), (11) описывают семейство лучей, ассоциируемое с набегающей волной шепчущей галереи, лишь при достаточно больших отрицательных  $\tau$  и  $t$  и не годятся вблизи точки  $t = 0$  распрямления границы. Эти формулы используются в качестве начальных для описания упомянутого семейства лучей непосредственно в окрестности точки  $t = 0$ . Осуществляется это следующим образом. Из точки  $t = \tau_0$  границы, лежащей достаточно далеко от точки  $t = 0$ , ( $\tau_0 < 0$ ) выпускаем луч (10) с начальным импульсом  $\rho_0^{(0)} = \rho_0(\tau_0)$ , определяемым формулой (11). Затем отыскивается точка  $t = \tau_1 > \tau_0$  падения этого луча на границу  $x = 0$  и строится отраженный по закону геометрической оптики луч, для чего достаточно, очевидно, в формуле (10) взять начальный импульс  $\rho_0^{(1)}$  в виде  $\rho_0^{(1)} = -\frac{d}{dt} x(t, \rho_0^{(0)}, \tau_0) \Big|_{t=\tau_1}$ . Далее, отыскивается точка падения  $t = \tau_2$  на границу найденного отраженного луча и повторяются описанные выше построения.

Приведем расчетные формулы для первого из рассматриваемых случаев - точки перегиба границы. Последовательность точек отражения  $\tau_n$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$  вычисляется по формуле

$$\tau_n = -\frac{1}{2} \tau_{n-1} - \sqrt{\frac{g}{4} \tau_{n-1}^2 - 6\rho_0^{(n-1)}}, \quad (12)$$

а для соответствующих значений импульсов  $\rho_0^{(n)}$  отраженных лучей имеем

$$\rho_0^{(n)} = -\left[ \rho_0^{(n-1)} + \frac{\tau_n^2 - \tau_{n-1}^2}{2} \right]. \quad (13)$$

Процесс последовательных отражений луча от границы будет происходить до тех пор, пока вычисляемая по формуле (12) точка  $\tau_{n+1}$  не

окажется комплексной. При этом для всех  $t \geq \tau_n$  уравнение луча описывается равенством (10.а) с  $\tau = \tau_n$  и начальным импульсом  $\rho_0^{(n)}$ .

В случае точки распрямления вогнутой границы схема построения лучей в основном остается такой же. Отличие состоит в том, что точки отражения  $\tau_n$  определяются из уравнения третьей степени (см. формулу (10.б)), корень которого отыскивается с помощью линейной интерполяции. Необходимая точность определения корня достигалась за счет соответствующего выбора шага. Начальный импульс  $\rho_0^{(n)}$  отраженного в точке  $\tau_n$  луча определяется по формуле

$$\rho_0^{(n)} = - \left[ \rho_0^{(n-1)} - \frac{\tau_n^3 - \tau_{n-1}^3}{3} \right], \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Описанный алгоритм вычисления  $\tau_n$  и  $\rho_0^{(n)}$  реализован на ЭВМ БЭСМ-6, построение лучей между точками отражения выполнено при помощи графопостроителя. Результаты вычислений приведены в виде рисунков.

Результаты расчетов в случае точки перегиба границы приведены на рисунках 1 и 2. При этом на рис.1 изображено поведение лучей, ассоциированных с набегавшей волной шепчущей галереи под номером один ( $\nu = 2,33\dots$ ) в формуле (4)), а рис.2 соответствует второй волне шепчущей галереи ( $\nu = 4,08\dots$  в (4)). В обоих случаях точка выхода  $\tau_0$  исходных лучей бралась в интервале  $-7, -6$  и лучи строились до значения  $t \approx 3$ .

Как следует из приведенных рисунков 1 и 2 до значений  $t \approx -2$  наблюдается типичное для волны шепчущей галереи поведение лучевого поля, четко просматривается наличие каустики. Начиная с  $t \approx -1$  происходит изменение структуры лучевого поля, усиливающееся с ростом  $t$ . При  $t > 0$  лучи быстро удаляются от границы, правее точки  $t \approx +1$  образуется зона тени, приближительной границей которой является предельный луч <sup>\*)</sup>, изображенный на рисунках 1 и 2 прерывистой линией. Сравнение этих рисунков с теневыми (см. [1]) показывает, что области максимального значения волнового поля (затененные области) совпадают с областями, занятыми лучами.

В случае точки распрямления вогнутой границы поведение семейства лучей, ассоциированного с первой и со второй волнами шепчущей галереи изображено соответственно на рисунках 3 и 4. Характерная для шепчущей галереи структура лучей сохраняется до  $t \approx -2$

<sup>\*)</sup> Предельный луч - это луч, касающийся границы в точке перегиба  $t = 0$ . Его уравнение, как следует из формулы (10.а), имеет вид  $x = \frac{1}{6} t^3$ .

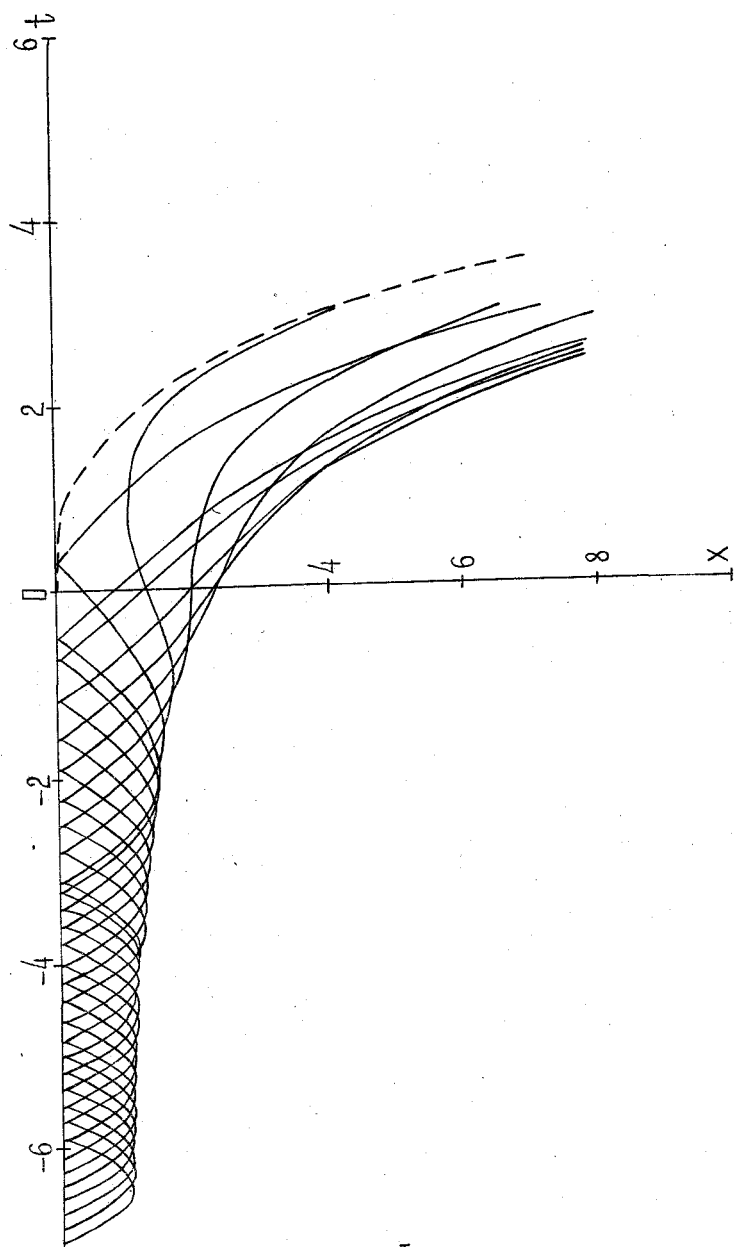


рис. I.

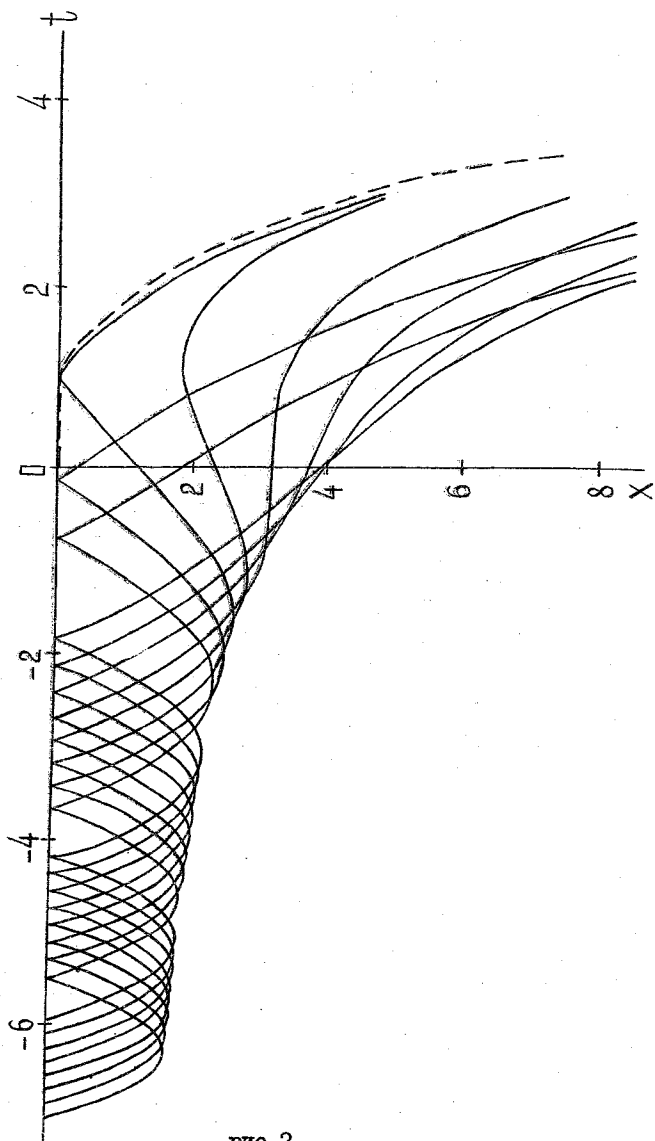


рис.2

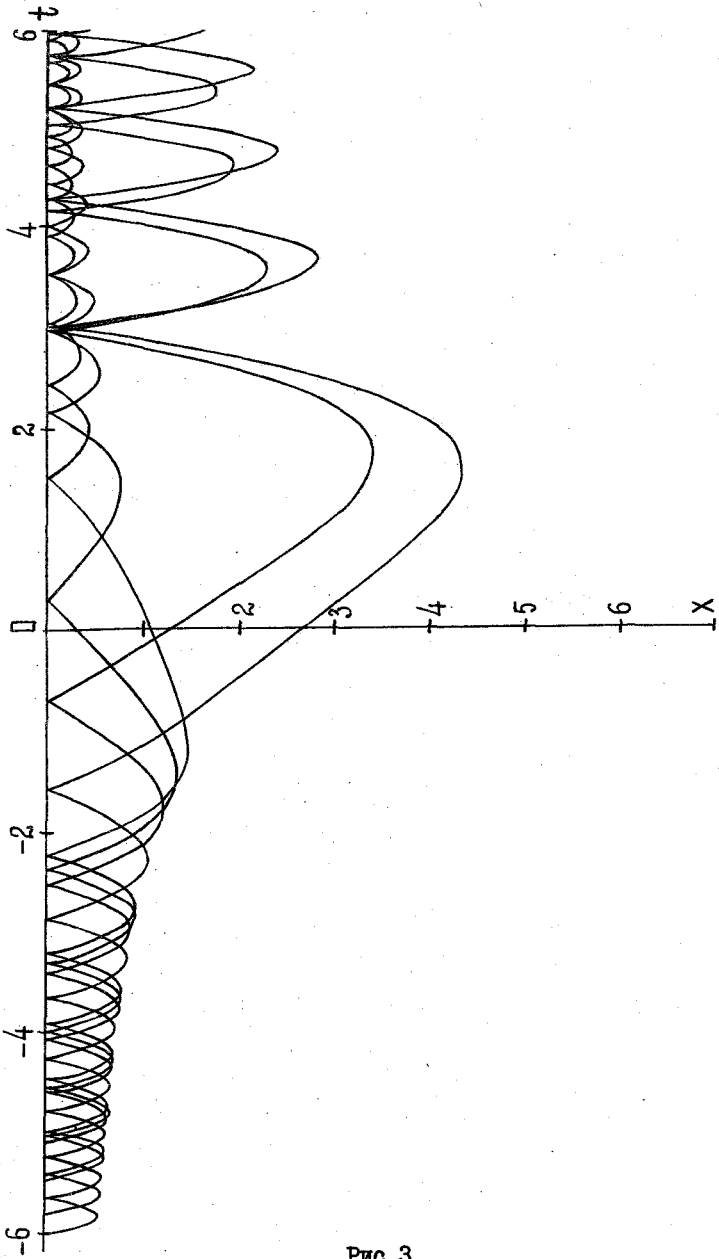


Рис. 3.

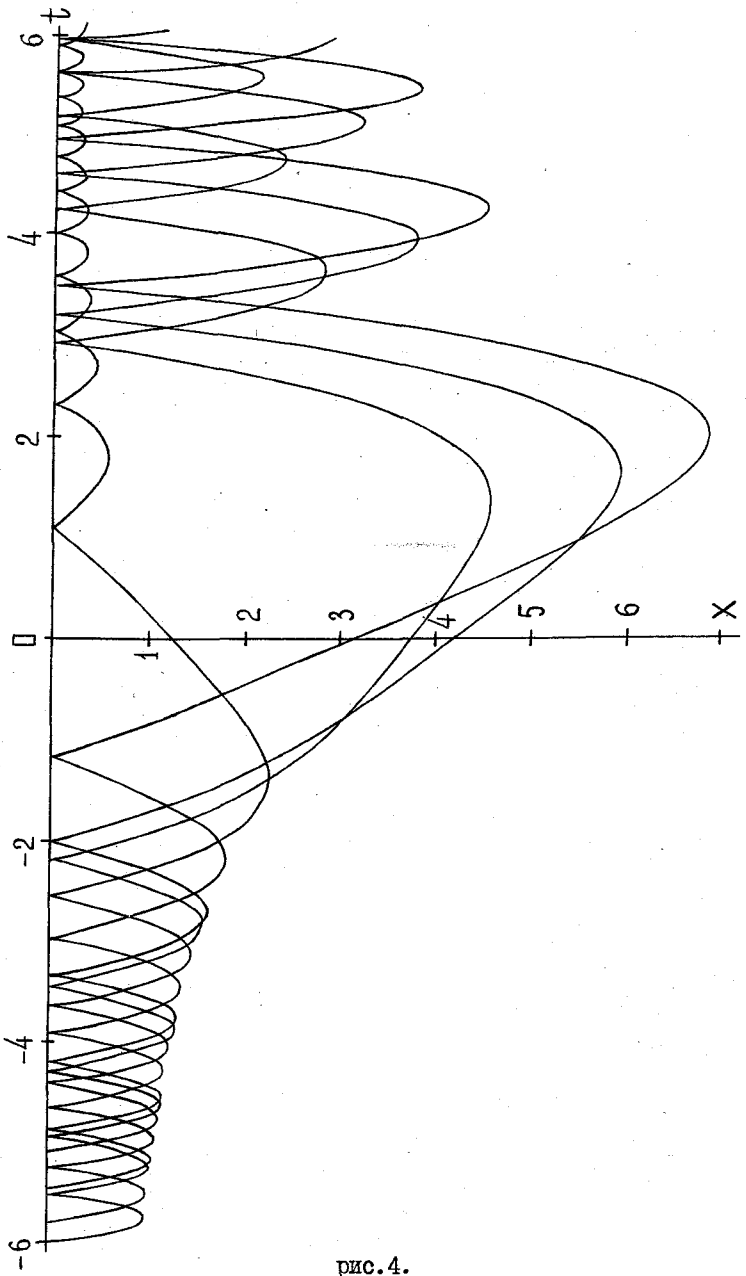


рис. 4.

На промежутке от  $-2$  до  $+2$  лучи наиболее сильно удаляются от границы, и, начиная с  $t \approx +3$ , они вновь концентрируются около границы, порождая довольно сложную лучевую картину. Отметим, что именно в этой области (т.е. при  $t \geq +3$ ) на теневых рисунках (см. [2]) возникает интерференционная картина, обусловленная возбуждением за точкой распрямления  $t=0$  границы большого числа волн шепчущей галереи. Так же, как и в случае точки перегиба границы, области максимального значения волнового поля на теневых рисунках [2] совпадают с областями, занятыми лучами.

Таким образом, имеет место четкая связь между качественным поведением волнового поля и динамикой лучей в окрестности рассмотренных точек распрямления границы.

#### Литература

1. Попов М.М., Пшенчик И. Численное решение задачи о волнах шепчущей галереи в окрестности простого нуля эффективной кривизны границы. - Зап. науч. семинар ЛОМИ, 1976, т.62, с. 207-219.
2. Попов М.М., Пшенчик И. Волны шепчущей галереи в окрестности точки распрямления вогнутой границы. - Зап. науч. семинар ЛОМИ, 1978, т.78, с.203-210.
3. Попов М.М. Волновое поле в каустической тени в окрестности точки перегиба границы. - Зап. науч. семинар ЛОМИ, 1979, т.89, с.246-260.
4. Попов М.М. К задаче о волнах шепчущей галереи в окрестности простого нуля эффективной кривизны границы. - Зап. науч. семинар ЛОМИ, 1976, т.62, с.197-206.

Lanin A.I., Popov M.M. Behaviour of the whispering gallery rays in a vicinity of a point where curvature of the boundary vanishes.

Behavior of whispering gallery rays in a vicinity of the boundary point  $S=0$  with zero curvature is investigated in two cases. In the first one boundary curvature  $K$  is zero in this point, but  $\left. \frac{dK}{dS} \right|_{S=0} \neq 0$ . In the second one  $K = \frac{dK}{dS} = 0$  in the point  $S=0$ , but  $\frac{d^2K}{dS^2} \neq 0$ . Results are obtained by the help of a computer and presented on the pictures.