К ВОПРОСУ ОБ ОЦЕНКЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ КРИТЕРИЕВ КАЧЕСТВА РЕГУЛИРОВАНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

Ю. М. ПЛИШКИН

(Свердловск)

Используются функции Ляпунова для нелинейных систем автоматического регулирования для оценки интегральных критериев качества регулирования.

1. К числу косвенных методов исследования переходных процессов в системах автоматического регулирования относятся интегральные критерии

$$J_2 = \int_0^\infty x^2\,dt \text{ и } J_3 = \int_0^\infty V dt,$$

где $x = x(t)$ — кривая переходного процесса, V — определенно-положительная квадратичная форма переменных x_i, в своей совокупности определяющих состояние движения системы.

Для систем автоматического регулирования, движение которых описывается линейным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами, существуют различные методы, позволяющие определить или оценить величину J_3 (или J_2) без решения характеристического уравнения системы. Наиболее удобный из таких методов приводится в работе [1]. Нахождение величины J_3 (или J_2) любым из упомянутых выше методов не представляет затруднений. Однако для систем уравнений порядка выше третьего решение вопроса уже сопряжено с громоздкими вычислениями. Поэтому часто бывает целесообразной оценка интегрального критерия сверху.

Для нелинейных систем автоматического регулирования не существует каких-либо эффективных методов нахождения критерия J_3 (или J_2). Лишь в частных случаях удается определить или оценить какой-нибудь интегральный критерий. В частности, знание функции Ляпунова для какой-либо нелинейной системы автоматического регулирования позволяет вместе с доказательством устойчивости движения оценить один из интегральных критериев. Это послужило поводом для написания настоящей статьи.

Ниже произведены оценки для тех систем автоматического регулирования, которые характеризуются нелинейными дифференциальными уравнениями второго и третьего порядков с известными функциями Ляпунова. Кроме того, оценивается интегральный критерий J_3 для системы дифференциальных уравнений n-го порядка особого вида.

2. Пусть переходный процесс системы автоматического регулирования определяется системой дифференциальных уравнений [2]

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f_1(x) + ay, \\ \frac{dy}{dt} &= f_2(x) + by, \end{aligned} \tag{1}$$

где a, b — постоянные, а функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ удовлетворяют условиям,

обеспечивающим единственность решений при любых начальных данных, и $f_1(0) = f_2(0) = 0$.

Пусть функции

$$h_1(x) = \frac{f_1(x)}{x} \quad \text{и} \quad h_2(x) = \frac{f_2(x)}{x}$$

удовлетворяют условиям

$$\begin{gathered} h_1(x) + b \leqslant -\varepsilon_1, \\ h_1(x)\, b - h_2(x)\, a \geqslant \varepsilon_2 \, (\varepsilon_1 > 0, \varepsilon_2 > 0), \end{gathered} \tag{2}$$

тогда тривиальное решение системы $x \equiv 0$, $y \equiv 0$ асимптотически устойчиво [2] и можно оценить интеграл

$$J_2 = \int_0^\infty x^2\, dt.$$

Для этой цели введем функцию

$$V(x, y) = 2\int_0^x [f_1(x)\, b - f_2(x)\, a]\, dx + (bx - ay)^2.$$

Ее производная по времени в силу системы (1) будет иметь вид

$$\frac{dV}{dt} = 2x^2 [h_1(x) + b][bh_1(x) - ah_2(x)].$$

Используя условия (2), заключаем, что

$$x^2 \leqslant \frac{1}{\varepsilon_1\varepsilon_2} [h_1(x) + b][ah_2(x) - bh_1(x)]\, x^2 = \frac{1}{2\varepsilon_1\varepsilon_2}\left(-\frac{dV}{dt}\right),$$

а отсюда следует оценка

$$J_2 = \int_0^\infty x^2\, dt \leqslant \frac{1}{2\varepsilon_1\varepsilon_2}\int_0^\infty -dv = \frac{V_0}{2\varepsilon_1\varepsilon_2},$$

так как ввиду устойчивости

$$V(x(t), y(t))|_{t\to\infty} \to 0.$$

Итак, если заданы начальные условия

$$x|_{t=0} = x_0, \quad y|_{t=0} = y_0,$$

то

$$\int_0^\infty x^2\, dt \leqslant \frac{1}{\varepsilon_1\varepsilon_2}\int_0^{x_0} [f_1(x)\, b - f_2(x)\, a]\, dx + \frac{1}{2\varepsilon_1\varepsilon_2}(bx_0 - ay_0)^2.$$

Этот результат можно использовать для оценки интегрального критерия

$$J_3 = \int_0^\infty \left[x^2 + \left(\frac{dx}{dt}\right)^2\right] dt$$

в случае, если система регулирования описывается уравнением

$$\frac{d^2x}{dt^2} + a\frac{dx}{dt} + \varphi(x) = 0. \tag{3}$$

Итак, пусть переходный процесс характеризуется уравнением (3), где $a > 0$ — постоянная, а $\varphi(x)$ удовлетворяет условиям, обеспечивающим единственность решений при любых начальных данных:

$$\varphi(0) = 0$$

и

$$\frac{\varphi(x)}{x} \geqslant \varepsilon \quad (\varepsilon > 0). \tag{4}$$

Так как система уравнений, эквивалентная уравнению (3):

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y, \\ \frac{dy}{dt} &= -\varphi(x) - ay \end{aligned} \tag{5}$$

есть частный случай (1), то решение системы (5) $x \equiv y \equiv 0$ асимптотически устойчиво и имеет место оценка

$$\int_0^\infty x^2\,dt \leqslant \frac{1}{a\varepsilon}\int_0^{x_0} \varphi(x)\,dx + \frac{1}{2a\varepsilon}(ax_0 + y_0)^2,$$

где $x|_{t=0} = x_0$, $y|_{t=0} = y_0$ — начальные условия.

Введем, далее, функцию

$$W(x, y) = 2\int_0^x \varphi(x)\,dx + y^2;$$

ее производная по времени в силу системы (5) равна

$$\frac{dW}{dt} = -2ay^2.$$

Отсюда следует

$$\int_0^\infty y^2 dt = -\frac{1}{2a}\int_0^\infty dW = \frac{W_0}{2a},$$

так как в силу устойчивости

$$W|_{t=\infty} = 0.$$

Резюмируя сказанное, получаем

$$J_3 = \int_0^\infty (x^2 + y^2)\,dt \leqslant \frac{1}{a\varepsilon}(1+\varepsilon)\int_0^{x_0} \varphi(x)\,dx + \frac{1}{2a\varepsilon}[(ax_0 + y_0)^2 + \varepsilon y_0^2].$$

3. Пусть переходный процесс описывается системой [2]

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f_1(x) + ay, \\ \frac{dy}{dt} &= bx + f_2(y), \end{aligned} \tag{6}$$

где a и b — постоянные, $ab \neq 0$, $f_1(0) = f_2(0) = 0$.

Если функции

$$h_1(x) = \frac{f_1(x)}{x} \quad \text{и} \quad h_2(y) = \frac{f_2(y)}{y}$$

удовлетворяют условиям

$$\begin{gathered} h_1(x)+c_2\leqslant-\varepsilon_1, \\ h_2(y)+c_1\leqslant-\varepsilon_2, \\ h_1(x)c_2-ab\geqslant\varepsilon_3 \qquad (x\neq 0), \\ h_2(y)c_1-ab\geqslant\varepsilon_4 \qquad (y\neq 0), \\ \varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\ \varepsilon_3,\ \varepsilon_4>0, \end{gathered} \tag{7}$$

где c_1 и c_2 — постоянные, удовлетворяющие условию

$$c_1c_2=ab,$$

то состояние равновесия $x\equiv y\equiv 0$ асимптотически устойчиво [2], и представляется возможность оценить интегральный критерий

$$J_3=\int_0^\infty (x^2+y^2)\,dt.$$

Для доказательства последнего утверждения рассмотрим функцию

$$V(x,y)=(c_2^2-ab)x^2+\left(a^2-\frac{a^3b}{c_1^2}\right)y^2+2c_2\int_0^x f_1(x)\,dx+$$
$$+2\,\frac{a^2}{c_1}\int_0^y f_2(y)\,dy-2ac_2xy.$$

Найдем ее производную по времени в силу системы (6)

$$\frac{dV}{dt}=2\,[f_1(x)c_2-abx]\,[f_1(x)+c_2x]+$$
$$+2\,\frac{a^2}{c_1^2}\,[f_2(y)+c_1y]\,[f_2(y)c_1-aby]=2\,[h_1(x)+c_2]\,[h_1(x)c_2-ab]\,x^2+$$
$$+2\,\frac{a^2}{c_1^2}\,[h_2(y)+c_1]\,[h_2(y)c_1-ab]\,y^2.$$

Ввиду условий (7) выполняется неравенство

$$-\frac{dV}{dt}\geqslant 2\varepsilon_1\varepsilon_3x^2+2\,\frac{a^2}{c_1^2}\,\varepsilon_2\varepsilon_4y^2.$$

Обозначим $m^2=\min\left\{2\varepsilon_1\varepsilon_3,\,2\,\frac{a^2}{c_1^2}\,\varepsilon_2\varepsilon_4\right\}$, тогда

$$J_3=\int_0^\infty (x^2+y^2)\,dt\leqslant\frac{1}{m^2}\int_0^\infty\left(2\varepsilon_1\varepsilon_3x^2+\frac{2a^2}{c_1^2}\,\varepsilon_2\varepsilon_4y^2\right)dt\leqslant\frac{1}{m^2}\int_0^\infty -dV=\frac{V_0}{m^2}$$

(имея в виду, что $V|_{t\to\infty}\to 0$ в силу устойчивости).

4. Пусть переходный процесс характеризуется уравнением [3]

$$\frac{d^3x}{dt^3}+a\,\frac{d^2x}{dt^2}+\varphi\left(\frac{dx}{dt}\right)+f(x)=0, \tag{8}$$

где $a>0$ — постоянная, $f(x)$ непрерывно дифференцируема, $\varphi(y)$ непрерывна при всех значениях аргумента. Если выполняются условия

$$\varphi(0) = f(0) = 0,$$

$$\frac{f(x)}{x} > 0 \qquad (x \neq 0),$$

$$a\frac{\varphi(y)}{y} - f'(x) \geqslant \varepsilon \qquad (y \neq 0, \quad \varepsilon > 0), \tag{9}$$

то тривиальное решение уравнения $x \equiv 0$ асимптотически устойчиво [3] и может быть оценен интеграл

$$J_2 = \int_0^\infty \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 dt.$$

Покажем это.

Уравнению (8) эквивалентна система уравнений

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y, \\ \frac{dy}{dt} &= z - ay, \\ \frac{dz}{dt} &= -\varphi(y) - f(x). \end{aligned} \tag{10}$$

Рассмотрим производную функции

$$V(x, y, z) = a\int_0^x f(x)\,dx + f(x)\,y + \int_0^y \varphi(y)\,dy + \frac{z^2}{2}$$

по времени в силу системы (10)

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x}\,y + \frac{\partial V}{\partial y}(z - ay) + \frac{\partial V}{\partial z}[-\varphi(y) - f(x)] =$$
$$= \left[f'(x) - a\frac{\varphi(y)}{y}\right]y^2.$$

Ввиду (9)

$$-\frac{dV}{dt} \geqslant \varepsilon y^2,$$

отсюда оценка

$$J_2 = \int_0^\infty y^2 dt \leqslant \frac{1}{\varepsilon}\int_0^\infty -dV = \frac{V_0}{\varepsilon}.$$

Таким образом, если заданы начальные условия

$$x|_{t=0} = x_0, \quad y|_{t=0} = y_0, \quad z|_{t=0} = z_0,$$

то

$$\int_0^\infty y^2 dt \leqslant \frac{a}{\varepsilon}\int_0^{x_0} f(x)\,dx + \frac{1}{\varepsilon} f(x_0)\,y_0 + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^{y_0} \varphi(y)\,dy + \frac{z_0^2}{2\varepsilon}.$$

5. Пусть переходный процесс описывается нелинейным уравнением [4]

$$\frac{d^3x}{dt^3} + f\left(x, \frac{dx}{dt}\right)\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + cx = 0, \tag{11}$$

где $b > 0$, $c > 0$ — постоянные, а функция $f(x, y)$ непрерывна и имеет непрерывную производную по x при всех значениях ее аргументов.

Если $f(x, y)$ удовлетворяет условиям

$$f(x, y) - \frac{c}{b} \geqslant \varepsilon \quad (\varepsilon > 0), \tag{12}$$

$$y \frac{\partial f}{\partial x} \leqslant 0 \tag{13}$$

при всех значениях аргументов, то тривиальное решение уравнения (11) $x \equiv 0$ асимптотически устойчиво [4], и представляется возможность оценить интегральный критерий

$$J_2 = \int_0^\infty \left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 dt.$$

Чтобы показать последнее, рассмотрим производную функции

$$V(x, y, z) = \frac{(bz + cy)^2}{2} + \frac{b}{2}(cx + by)^2 + bc\int_0^y f(x, y)\, y\, dy - \frac{c^2}{2} y^2$$

по времени в силу системы, эквивалентной уравнению (11):

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y, \\ \frac{dy}{dt} &= z, \\ \frac{dz}{dt} &= -[f(x, y) + by + cx], \\ \frac{dV}{dt} &= -b^2\left[f(x, y) - \frac{c}{b}\right] z^2 + bcy\int_0^y \frac{\partial f}{\partial x} y\, dy. \end{aligned} \tag{14}$$

Ввиду условия (13) второй член правой части отрицателен, поэтому

$$-\frac{dV}{dt} \geqslant b^2\left[f(x, y) - \frac{c}{b}\right] z^2 \geqslant \varepsilon b^2 z^2,$$

$$J_2 = \int_0^\infty z^2 dt \leqslant \frac{1}{\varepsilon b^2}\int_0^\infty -dV = \frac{V_0}{\varepsilon b^2}.$$

6. Пусть переходный процесс характеризуется уравнением [5]

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \varphi\left(\frac{dx}{dt}\right) + g\left(\frac{dx}{dt}\right) f(x) = 0, \tag{15}$$

где $f(x)$, $g(y)$ непрерывны, а $\varphi(y)$ такова, что система, эквивалентная уравнению (15):

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y, \\ \frac{dy}{dt} &= -\varphi(y) - g(y) f(x), \end{aligned} \tag{16}$$

обладает единственной траекторией, проходящей через любую наперед заданную точку.

Если $f(x)$, $\varphi(y)$ и $g(y)$ удовлетворяют следующим условиям:

$$\begin{aligned} &f(0) = \varphi(0) = 0, \quad f(x)x > 0 \quad (x \neq 0), \\ &\varphi(y)y > 0, \quad g(y) > 0, \quad (y \neq 0), \end{aligned} \tag{17}$$

$$\frac{\varphi(y)}{yg(y)} \geqslant \varepsilon \qquad (\varepsilon > 0) \tag{18}$$

$$\lim_{|x| \to \infty} \int_0^x f(x)\,dx = \infty,$$

то тривиальное решение уравнения (15) $x \equiv 0$ асимптотически устойчиво [5] при любых начальных возмущениях и имеет место оценка интеграла

$$J_2 = \int_0^\infty \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 dt.$$

Рассмотрим функцию

$$V(x, y) = \int_0^x f(x)\,dx + \int_0^y \frac{y}{g(y)}\,dy.$$

Ее производная по времени в силу системы (16) равна

$$\frac{dV}{dt} = -y\frac{\varphi(y)}{g(y)}.$$

Ввиду условий (17) и (18)

$$\varepsilon y^2 \leqslant \frac{y\varphi(x)}{g(y)} = -\frac{dV}{dt},$$

$$J_2 = \int_0^\infty y^2 dt \leqslant \frac{1}{\varepsilon} V_0.$$

Итак,

$$\int_0^\infty y^2 dt \leqslant \frac{1}{\varepsilon}\int_0^{x_0} f(x)\,dx + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^{y_0} \frac{y}{g(y)}\,dy,$$

где $x|_{t=0} = x_0$, $y|_{t=0} = y_0$ — начальные условия.

7. Пусть переходный процесс описывается системой

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^n \varphi_{ij}(t)\,x_j \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{19}$$

где функции $\varphi_{ij}(t)$ удовлетворяют следующим условиям: на всем промежутке $0 \leqslant t \leqslant \infty$

$$\varphi_{ii}(t) \leqslant -\varepsilon_i \qquad (\varepsilon_i > 1, \quad i = 1, 2, \ldots, n), \tag{20}$$

$$\varphi_{ij}(t) \equiv -\varphi_{ji}(t) \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n; \quad i \neq j). \tag{21}$$

Заданы начальные условия:

$$x_i|_{t=0} = x_{i0} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Тривиальное решение системы $x_1 \equiv x_2 \equiv \ldots \equiv x_n \equiv 0$ асимптотически устойчиво, т. е.

$$x_i|_{t\to\infty} \to 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Требуется оценить интегральный критерий

$$J_3 = \int_0^\infty \sum_{i=1}^n x_i^2\,dt.$$

Производная функции

$$V(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

по времени в силу системы (19), очевидно, имеет вид:

$$\frac{dV}{dt} = 2\sum_{i=1}^{n} \varphi_{ii}(t)\, x_i^2.$$

Обозначим $\min\{\varepsilon_i\} = m^2$, тогда

$$-\frac{dV}{dt} = 2\sum_{i=1}^{n} |\varphi_{ii}(t)|\, x_i^2 \geqslant 2m^2 \sum_{i=1}^{n} x_i^2,$$

$$J_3 = \int_0^\infty \sum_{i=1}^{n} x_i^2\, dt \leqslant \frac{1}{2m^2}\int_0^\infty -dV = \frac{V_0}{2m^2}.$$

Итак,

$$\int_0^\infty \sum_{i=1}^{n} x_i^2\, dt \leqslant \frac{1}{2m^2}\sum_{i=1}^{n} x_{i0}^2.$$

Поступила в редакцию
19 мая 1954 г.

Цитированная литература

1. Фельдбаум А. А. Интегральные критерии качества регулирования. Автоматика и телемеханика, т. IX, № 1, 1948.
2. Красовский Н. Н. Теоремы об устойчивости движений, определяемых системой двух уравнений. Прикладная математика и механика, т. XVI, вып. 5, 1952.
3. Барбашин Е. А. Об устойчивости решения одного нелинейного уравнения третьего порядка. Прикладная математика и механика, т. XVI, вып. 5, 1952.
4. Шиманов С. Н. Об устойчивости решения одного нелинейного уравнения третьего порядка. Прикладная математика и механика, т. XVII, вып. 3, 1953.
5. Барбашин Е. А. и Красовский Н. Н. Об устойчивости движения в целом. ДАН СССР, т. LXXXVI, № 3, 1952.