О ЛОКАЛЬНО СВОБОДНЫХ ПУЧКАХ НА CP^3, СВЯЗАННЫХ С ПОЛЯМИ ЯНГА—МИЛЛСА

В. Г. Дринфельд, Ю. И. Манин

В этой заметке излагается алгебро-геометрическая часть доказательства основной теоремы работы [2].

1. Определение. Пучок L над CP^3 (алгебраический или аналитический) называется допустимым, если он локально свободен и $H^i(L(k)) = 0$ при $i = 0$, $k \leqslant -1$; $i = 1$, $k \leqslant -2$; $i = 2$, $k \geqslant -2$; $i = 3$, $k \geqslant -3$.

2. Определение. Специальной монадой называется комплекс M пучков над CP^3, изоморфный комплексу вида $O(-1)^k \xrightarrow{i} O^l \xrightarrow{j} O(1)^n$, где i инъективен на геометрических слоях, j сюръективен. Морфизмом монад называется морфизм комплексов.

3. Отображение $M \mapsto \operatorname{Ker} j/\operatorname{Im} i$ продолжается до функтора $\mathscr{L}$ из категории специальных монад в категорию локально свободных пучков.

Теорема А. *$\mathscr{L}$ индуцирует эквивалентность категории специальных монад с категорией допустимых пучков.*

Доказательство. а) Покажем, что каждый допустимый пучок L получается из некоторой специальной монады. Пусть $\Delta \subset P^3 \times P^3$ — диагональ, O_Δ — прямой образ на $P^3 \times P^3$ структурного пучка диагонали, $K \to O_\Delta$ — резольвента Кошуля: $K_i = p_1^*(O(-i+1)) \otimes p_2^*(\Omega^i(i-1))$, $i \geqslant 0$, где p_1, p_2: $P^3 \times P^3 \to P^3$ — проекции. Из допустимости L легко следует, что $R^j p_{1*}(K_i \otimes p_2^* L) = 0$ при $j \neq 1$, а также при $i = 3$. Поэтому $L = p_{1*}(O_\Delta \otimes p_2^* L)$ изоморфен пучку когомологий специальной монады $\widetilde{I}(-1) \to \widetilde{H} \to \widetilde{I}'(1)$, где $I = H^1(L \otimes \Omega^2(1))$, $H = H^1(L \otimes \Omega^1)$, $I' = H^1(L(-1))$; здесь $\widetilde{I}$, $\widetilde{H}$, $\widetilde{I}'$ — свободные пучки, соответствующие I, H, I'.

б) Допустимость пучков $\mathscr{L}(M)$ проверяется непосредственно.

в) Функтор $\mathscr{L}$ вполне строг, ибо $\operatorname{Ext}^i(O(k), O(l)) = 0$ при $i > 0$, $-1 \leqslant k$, $l \leqslant 1$; а также при $i = 0$, $k > l$.

4. Задание монады $\widetilde{I}(-1) \to \widetilde{H} \to \widetilde{I}'(1)$ равносильно заданию диаграммы векторных пространств $I \otimes V^* \to H \to I' \otimes V$, $V = H^0(O(1))$, удовлетворяющей очевидным условиям. Двойственной диаграмме отвечает двойственный пучок. Поэтому допустимые пучки L с невырожденной симметричной билинейной формой отвечают парам $(I \hookrightarrow H \otimes V, Q)$, где Q — невырожденная квадратичная форма на H и для любой ненулевой линейной формы l: $V \to C$ подпространство $(\mathrm{id}_H \otimes l)I \subset H$ Q — изотропно, а его размерность равна $\dim I$. Ранг L равен $\dim H - 2 \dim I$, $c_1(L) = c_3(L) = 0$, $c_2(L) = \dim I$.

5. Пусть L_0 — гладкое вещественное векторное расслоение над S^4 ранга r, снабженное автодуальной связностью ∇ и горизонтальной эвклидовой структурой (см. [3]). Пусть π: $CP^3 \to S^4$ — стандартное расслоение Атьи — Уорда [3]. Обозначим через L пучок гладких сечений s расслоения $\pi^*(L_0 \underset{R}{\otimes} C)$, для которых $(\pi^*\nabla)^{0,1}(s) = 0$. По теореме Атьи — Уорда он является локально свободным аналитическим пучком ранга r. По существу, это следует также из результатов Белавина — Захарова (см. [1], [5]).

Теорема Б. *Пучок L допустим.*

Идея доказательства. Показывается, что $H^1(L(-2)) \simeq \operatorname{Ker}(\Delta + 2) \otimes C$, где Δ — оператор Лапласа на L_0, определяемый с помощью ∇ и стандартной римановой метрики на S^4.

Эвклидова структура на L_0 индуцирует невырожденную симметричную билинейную форму на L. Пусть $(I \hookrightarrow H \otimes V, Q)$ соответствующая ему диаграмма ($H = H^1(L \otimes \Omega^1)$ и т. п.). Обозначим через σ стандартную антиголоморфную инволюцию CP^3 над S^4 (см. [3]). Она канонически поднимается до антиголоморфной инволюции расслоения над CP^3, ассоциированного с L. Этот подъем индуцирует вещественную структуру на H: $H = H' \underset{R}{\otimes} C$.

Теорема В. *Ограничение Q на H' положительно определено.*

Подпространство $I \subset H' \underset{R}{\otimes} V = H \underset{C}{\otimes} V$ инвариантно относительно $\mathrm{id}_{H'} \otimes \sigma$. Таким образом, мы построили по $O(r)$ — полю Янга — Миллса (L_0, ∇) объект линейной алгебры, введенный в заметке [2].

Проверка того, что конструкции, описанные здесь и в заметке [2], взаимно обратны, проводится стандартно. Отсюда следует основная теорема [2] для $O(r)$ — расслоений. Случаи $U(r)$ и $Sp(r)$ разбираются с помощью стандартных вложений в $O(2r)$ и $O(4r)$ соответственно.

6. Как показал А. Бейлинсон, теорема А может быть значительно обобщена, что приводит, в частности, к описанию производной категории когерентных пучков на P^n над любым полем.

7. Метод доказательства теоремы А является вариантом метода Барта [4]. Как сообщил авторам М. Атья в письме от 22.XI.77 г., результаты работы [2] и этой заметки были независимо получены им и Н. Хитчином.

ЛИТЕРАТУРА

[1] А. А. Белавин, В. Е. Захаров, Многомерный метод обратной задачи рассеяния и уравнения дуальности для поля Янга — Миллса. Письма в ЖЭТФ, 25:12 (1977), 603—607.

[2] В. Г. Дринфельд, Ю. И. Манин, Автодуальные поля Янга — Миллса над сферой. Функц. анализ 12:2 (1978).

[3] M. F. Atiyah, R. S. Ward, Instantons and algebraic geometry. Comm. Math. Phys., 55 (1977), 117—124.

[4] W. Barth, Moduli of vector bundles on the projective plane, Inventiones Math. 42 (1977), 63—91.

[5] A. A. Belavin, V. E. Zakharov. Yang — Mills equations as inverse scattering problem (preprint), Institute for theoretical physics, Chernogolovka, 1977.

Поступило в Правление общества 22 декабря 1977 г.