ными координатами рациональна (как единственное решение системы линейных уравнений с рациональными коэффициентами). Значит, вершины нашего 2021-угольника рациональны. Приведем координаты вершин к общему знаменателю N и рассмотрим гомотетию с центром в начале координат и коэффициентом N. Она переведет наш 2021-угольник в удовлетворяющий условию задачи.

Олимпиада «Ломоносов»

(см. «Квант» №4)

Физика
Отборочный этап

7–9 классы

1. Уравнение движения бруска по горизонтали имеет вид $ma = F\cos\alpha - F_{тр}$, где $F_{тр} = \mu N$ – модуль силы трения скольжения, $N = mg - F\sin\alpha$ – модуль силы нормального давления бруска на стол. Отсюда ускорение бруска $a = \frac{F}{m}(\cos\alpha + \mu\sin\alpha) - \mu g$. За время t брусок переместится на расстояние

$$L = \frac{at^2}{2} = \frac{Ft^2}{2m}(\cos\alpha + \mu\sin\alpha) - \frac{\mu g t^2}{2}.$$

2. Разобьем траекторию санок на три участка, каждый из которых представляет собой наклонную плоскость, образующую с горизонтом угол α_i, имеющую перепад высот h_i и длину основания l_i (рис.24; $i = 1, 2, 3$). Поскольку санки перемещаются медленно, их ускорение равно нулю. Поэтому в проекциях на оси x и y уравнения движения санок на каждом участке имеют такой вид: $0 = mg\sin\alpha_i + F_{тр\,i} - F_i$, $0 = N_i - mg\cos\alpha_i$. Поскольку $F_{тр\,i} = \mu N_i$, то $F_i = mg\sin\alpha_i + \mu mg\cos\alpha_i$, а работа на участке траектории длиной s_i равна $A_i = (mg\sin\alpha_i + \mu mg\cos\alpha_i)s_i = mg(h_i + \mu l_i)$. Суммируя работы на всех участках, вычислим работу по подъему тела на горку:

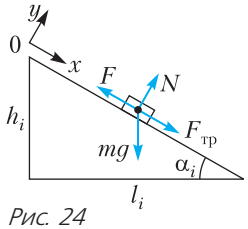

Рис. 24

$$A = mg\sum_{i=1}^{3}(h_i + \mu l_i) = mg(h + \mu l).$$

Отсюда находим коэффициент трения:

$$\mu = \frac{A - mgh}{mgl}.$$

3. До охлаждения масса водяных паров в банке была $m_к = \varphi_1\rho_к V$, где $\varphi_1 = \varphi/100\%$. После охлаждения масса насыщенного пара в банке будет $m_х = \rho_х V$. Поэтому масса образовавшегося в банке льда равна $m = m_к - m_х = \left(\rho_к\frac{\varphi}{100\%} - \rho_х\right)V$.

4. Справедлива следующая система уравнений: $I_1 = I_2 + I_3$, $U_2 = I_2R_2$, $U_2 = I_3R_3$, $R_3 = nR_2$. Решая ее относительно R_3, получаем $R_3 = (n+1)\frac{U_2}{I_1}$.

5. Из формулы для тонкой собирающей линзы $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{F}$ получаем, что расстояние от линзы до стенки $b = \frac{aF}{a - F}$. Из подобия треугольников (рис.25) находим модуль скорости изображения

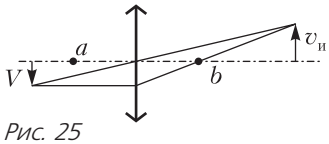

Рис. 25

паука относительно стенки: $v_и = V\frac{b}{a} = \frac{VF}{a - F}$. Следовательно, модуль искомой скорости равен $v = V + v_и = \frac{aV}{a - F}$.

10–11 классы

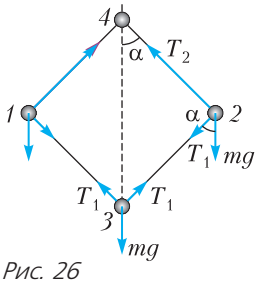

Рис. 26

1. На рисунке 26 показаны силы, действующие на грузы *2* и *3*. Из рисунка следует, что проекции уравнения движения грузов *2* и *3* на вертикальную ось и проекция уравнения движения груза *2* на горизонтальную ось имеют вид

$$T_2\cos\alpha = T_1\cos\alpha + mg,$$

$$2T_1\cos\alpha = mg,$$

$$\frac{mv^2}{l\sin\alpha} = T_2\sin\alpha + T_1\sin\alpha,$$

где v – линейная скорость груза *2*. Из записанных уравнений находим $v^2 = 2gl\sin\alpha\,\mathrm{tg}\,\alpha$. Следовательно, приращение кинетической энергии системы $\Delta E_к = 2\frac{mv^2}{2} = 2mgl\sin\alpha\,\mathrm{tg}\,\alpha$. Приращение потенциальной энергии системы $\Delta E_п = 2mgl(1 - \cos\alpha) + mg\cdot 2l(1 - \cos\alpha)$. По закону изменения механической энергии искомая работа

$$A = \Delta E_к + \Delta E_п = 2mgl\sin\alpha\,\mathrm{tg}\,\alpha + 4mgl(1 - \cos\alpha).$$

2. Пусть растяжения пружин в положении равновесия равны l_1, l_2 и l_3 соответственно. Тогда

сила натяжения первой пружины и нити, прикрепленной к грузу, равна $F_1 = k_1 l_1$, а сила натяжения нити, переброшенной через блок, равна $F_2 = k_2 l_2 = k_3 l_3$, так как блок гладкий. Из условия невесомости блока следует $F_1 = 2F_2$, а потому $l_2 = \frac{k_1}{2k_2} l_1$ и $l_3 = \frac{k_1}{2k_3} l_1$. При смещении груза вправо на расстояние Δx первая пружина сократится на Δx, а вторая и третья удлинятся на Δx_2 и Δx_3 соответственно, причем $\Delta x_2 + \Delta x_3 = 2\Delta x$ (так как нити нерастяжимы) и $k_2 \Delta x_2 = k_3 \Delta x_3$ (пружины невесомы). Отсюда находим $\Delta x_2 = \frac{2k_3}{k_2 + k_3} \Delta x$, $\Delta x_3 = \frac{2k_2}{k_2 + k_3} \Delta x$. Изменение потенциальной системы при этом будет

$$\Delta E_п = \frac{1}{2}\Big(k_1 (l_1 - \Delta x)^2 + k_2 (l_2 + \Delta x_2)^2 + k_3 (l_3 + \Delta x_3)^2 - k_1 l_1^2 - k_2 l_2^2 - k_3 l_3^2\Big) = \frac{1}{2}\left(k_1 + \frac{4k_2 k_3}{k_2 + k_3}\right)\Delta x^2.$$

Обозначив через v_0 скорость груза в положении равновесия, по закону сохранения механической энергии имеем $\Delta E_п = \frac{m v_0^2}{2}$. Поскольку амплитудное значение скорости v_0 связано с амплитудой смещения Δx соотношением $v_0 = \omega \Delta x$, частота

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{m}\left(k_1 + \frac{4k_2 k_3}{k_2 + k_3}\right)}.$$

3. Плотность жидкого пропана в баллоне $\rho = \frac{m_0}{V_0}$, давление в баллоне p. По условию в баллоне осталось $m = (1 - \alpha_1) m_0$ пропана, где $\alpha_1 = \alpha/100\%$. Пусть часть пропана, которая находится в газообразном состоянии, занимает объем V. Тогда $m_1 = \frac{MpV}{RT}$ и $(1 - \alpha_1) m_0 = \rho (V_0 - V) + \frac{MpV}{RT}$. Отсюда $V = \frac{\alpha_1 m_0 V_0 RT}{m_0 RT - MpV_0}$, и $m_1 = \frac{\alpha m_0 V_0 Mp}{(m_0 RT - MpV_0) \cdot 100\%}$.

4. Потенциальная энергия притяжения зарядов в исходном положении равна $W_0 = -\frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0 l}$. Когда вторую частицу переместили первый раз, потенциальная энергия стала $W_1 = -\frac{Qq}{4\pi\varepsilon\sqrt{l^2 + l_1^2}}$. При этом была совершена работа $A_1 = W_1 - W_0$. Потенциальная энергия системы при конечном положении второй частицы $W_2 = -\frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{(l + l_2)^2 + l_1^2}}$. Совершенная при таком перемещении работа $A_2 = W_2 - W_1$. Окончательно получаем

$$A_2 = \frac{A_1 l}{\sqrt{l^2 + l_1^2} - l}\left(1 - \frac{\sqrt{l^2 + l_1^2}}{\sqrt{(l + l_2)^2 + l_1^2}}\right).$$

5. На рисунке 27 показан ход лучей, дающих изображение C глаза человека A в зеркале. Луч

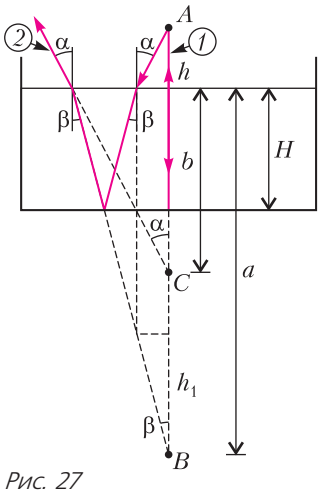

Рис. 27

1 идет от глаза по нормали к зеркалу и после отражения от него возвращается в глаз по тому же пути. Луч *2* идет от глаза под углом α к нормали к поверхности воды и после отражения от зеркала и повторного прохождения сквозь воду также попадает в глаз человека. Продолжения лучей *1* и *2* пересекаются в точке C, являющейся искомым изображением глаза. Согласно закону преломления, $\sin\alpha = n \sin\beta$. Поскольку диаметр зрачка человеческого глаза составляет несколько миллиметров, в глаз попадут только те лучи, которые идут под малыми углами к вертикали, т.е. справедливо приближенное равенство $\alpha = n\beta$. Поэтому $\frac{h_1}{h} = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta} = \frac{\alpha}{\beta} = n$ и $a = 2H + h_1 = 2H + nh$. Из рисунка видно, что $l = h + b$. Поскольку $\frac{b}{a} = \frac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{1}{n}$, то $b = \frac{2H + nh}{n}$. Следовательно, $H = \frac{(l - 2h)n}{2}$.

Заключительный этап

7–9 классы

1. Используя закон Гука, запишем силы натяжения пружин в виде $F_1 = k_1 \Delta l_1$, $F_2 = k_2 \Delta l_2$, $F_3 = k_3 \Delta l_3$, где Δl_1, Δl_2 и Δl_3 – удлинения пружин. Условия равновесия пружин представим в виде $F = F_1$, $F_1 = F_2$ и $F = F_3$. Удлинение составной пружины

равно $\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3$, или $\Delta l = \left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3}\right)F$.

Отсюда находим

$$k_3 = \frac{Fk_1k_2}{\Delta l k_1 k_2 - F(k_1 + k_2)}.$$

2. Уравнение теплового баланса имеет вид $(t_1 - t)cm_1 + (t_2 - t)cm_2 = 0$, где c – удельная теплоемкость воды, m_1 – масса горячей, а m_2 – масса холодной воды, причем $m_1 + m_2 = m$. Отсюда находим

$$m_1 = \frac{m(t - t_2)}{t_1 - t_2},\ m_2 = m - m_1 = \frac{m(t_1 - t)}{t_1 - t_2}.$$

3. При постоянной скорости вращения ротора двигателя протекание тока по его обмотке сопровождается только выделением тепла в ней и совершением двигателем механической работы. Потребляемая двигателем мощность равна UI, где I – сила тока, текущего по обмотке. Мощность тепловых потерь равна RI^2. Поэтому развиваемая двигателем механическая мощность N удовлетворяет соотношению $UI = N + RI^2$. Так как N зависит от силы тока по квадратичному закону: $N = UI - RI^2$, максимум этого выражения достигается при значении силы тока, лежащем в середине интервала $\left[0; \frac{U}{R}\right]$ и равном $I_0 = \frac{U}{2R}$. Следовательно, максимальная мощность $N_{\max} = U\frac{U}{2R} - R\left(\frac{U}{2R}\right)^2 = \frac{U^2}{4R}$. При постоянной скорости движения поднимаемого двигателем груза натяжение нити равно mg. Приравнивая максимальную мощность двигателя мощности силы натяжения mgv, получаем $v_{\max} = \frac{U^2}{4mgR}$.

4. Из условия задачи следует, что экран находится ближе к проектору, чем четкое изображение диапозитива, иначе после установки добавочной линзы размер изображения точки увеличился бы. Ход лучей для первого и второго случаев, указанных в условии, изображен на рисунке 28, где D – оптическая сила объектива,

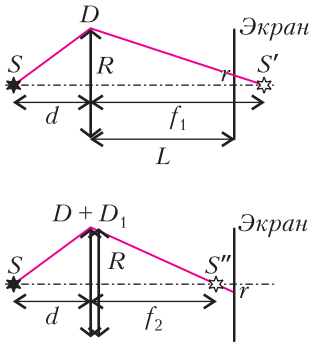

Рис. 28

$D_1 = 1/F_1$ – оптическая сила добавочной линзы, d – расстояние от диапозитива до объектива, f_1 и f_2 – расстояния от объектива до изображения, L – расстояние от объектива до экрана, R – радиус линзы и r – радиус пятна на экране. Из рисунка видно, что $\frac{r}{R} = \frac{f_1 - L}{f_1} = \frac{L - f_2}{f_2}$. Отсюда $\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} = \frac{2}{L}$. Формула тонкой линзы, примененная для обоих случаев, дает $\frac{1}{d} + \frac{1}{f_1} = D$, $\frac{1}{d} + \frac{1}{f_2} = D + D_1$. Сложив эти равенства, получаем $\frac{2}{d} + \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} = 2D + D_1$, или $2\left(\frac{1}{d} + \frac{1}{L}\right) = 2D + D_1$. Изображение диапозитива на экране будет резким, если выполняется равенство $\frac{1}{d} + \frac{1}{L} = D + D_x$. Сопоставив последние два выражения, получаем

$$D_x = \frac{D_1}{2} = \frac{1}{2F_1}.$$

10–11 классы

1. Брусок и клин движутся под действием сил, изображенных на рисунке 29. В частности, к

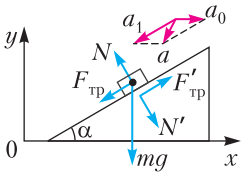

Рис. 29

бруску приложены: сила тяжести $m\vec{g}$, нормальная составляющая силы реакции клина $\vec{N}$ и сила трения $\vec{F}_{\text{тр}}$. В свою очередь, брусок действует на клин с силами $\vec{N}'$ и $\vec{F}'_{\text{тр}}$, причем $N' = N$, $F'_{\text{тр}} = F_{\text{тр}}$. Обозначим через $\vec{a}$ ускорение бруска в неподвижной системе отсчета. В соответствии с законом сложения ускорений, $\vec{a} = \vec{a}_0 + \vec{a}_1$, где $\vec{a}_0$ – ускорение клина, $\vec{a}_1$ – ускорение бруска относительно клина. Применяя к бруску второй закон Ньютона, имеем в проекциях на оси координат $m(a_0 - a_1\cos\alpha) = -N\sin\alpha - F_{\text{тр}}\cos\alpha$, $-ma_1\sin\alpha = -mg + N\cos\alpha - F_{\text{тр}}\sin\alpha$. Уравнение движения клина в проекциях на горизонтальную ось имеет вид $Ma_0 = N\sin\alpha + F_{\text{тр}}\cos\alpha$. Учитывая, что $F_{\text{тр}} = \mu N$, окончательно получаем

$$N = \frac{mg\cos\alpha}{1 + m\left(\sin^2\alpha + \mu\sin\alpha\cos\alpha\right)/M}.$$

Модуль суммарной работы сил $\vec{F}_{тр}$ и $\vec{F}'_{тр}$ равен произведению модуля силы трения скольжения на модуль перемещения бруска относительно клина: $|A_{тр}| = \mu Nh/\sin\alpha$. По закону сохранения энергии эта работа равна количеству теплоты, выделившемуся при скольжении бруска по клину:

$$Q = \frac{\mu mgh\,\mathrm{ctg}\alpha}{1 + m\left(\sin^2\alpha + \mu\sin\alpha\cos\alpha\right)/M}.$$

2. Катушка находится в равновесии под действием сил, модули и направления которых показаны на рисунке 30. Поскольку ускорение катушки должно оставаться равным нулю, сумма моментов и сумма действующих на катушку сил должны быть равны нулю. По закону сухого трения, $F_{тр1} = \mu N_1$, $F_{тр2} = \mu N_2$. Имеем следующую систему уравнений: $N_1 - \mu N_2 - F = 0$, $Mg - N_2 - \mu N_1 = 0$, $FR = 2\mu R(N_1 + N_2)$. Отсюда получаем

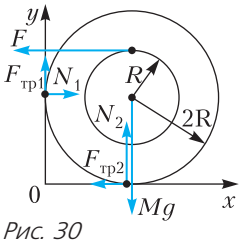

Рис. 30

$$F = \frac{2Mg\mu(1+\mu)}{1 - 2\mu + 3\mu^2}.$$

3. Среднеквадратичная скорость молекул газа определяется выражением $v = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}}$, где k – постоянная Больцмана, T – абсолютная температура, m_0 – масса молекулы. Следовательно, искомое отношение равно $\alpha = \sqrt{\frac{T_2}{T_1}}$, где T_2 и T_1 – температуры газа в конечном и начальном состояниях. Из уравнения начального состояния газа, $\left(p_0 + \frac{Mg}{S}\right)hS = \nu RT_1$. При нагреве газ совершает изобарное расширение, поэтому $\Delta Q = \frac{5}{2}\nu R(T_2 - T_1)$. Отсюда находим

$$\alpha = \sqrt{1 + \frac{2\Delta Q}{5(p_0 S + Mg)h}}.$$

4. Зависимость давления от объема в процессе *1–2* описывается линейной функцией вида $p(V) = b - kV$. По условию $p(V_0) = 3p_0$, $p(3V_0) = p_0$, или $3p_0 = b - kV_0$, $p_0 = b - 3kV_0$. Из этой системы находим, что $b = 4V_0$, $k = \frac{p_0}{V_0}$. Следовательно, $p = 4p_0 - \frac{p_0}{V_0}V$. Для аргона, который можно считать одноатомным идеальным газом, $U = \frac{3}{2}pV = \frac{3}{2}\left(4p_0V - \frac{p_0}{V_0}V^2\right)$. График зависимости $U(V)$ изображен на рисунке 31, причем он

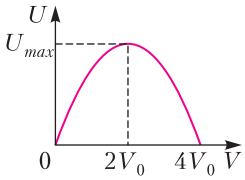

Рис. 31

пересекает ось абсцисс в точках $V = 0$ и $V = 4V_0$. Поэтому максимум внутренней энергии достигается при объеме аргона $V = 2V_0$ и равен $U_{max} = 6p_0V_0$.

5. До нейтрализации заряда кольца пружина растянута под действием силы тяжести mg и силы электростатического притяжения со стороны равномерно заряженного кольца

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2h}{\left(R^2 + h^2\right)^{3/2}} = \frac{1}{8\sqrt{2}\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{R^2}.$$

После нейтрализации заряда кольца положение равновесия бусинки скачком изменится на новое, находящееся на расстоянии $\Delta x = \frac{F}{k}$ от первоначального. В результате возникнут гармонические колебания бусинки с амплитудой $A = \Delta x$ и циклической частотой $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$. Максимальное (амплитудное) значение скорости движения бусинки будет равно при этом

$$v_{max} = A\omega_0 = \frac{1}{8\sqrt{2}\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{kR^2}\sqrt{\frac{k}{m}}.$$

6. После замыкания ключа в цепи возникают гармонические колебания, в процессе которых происходит периодическая перезарядка конденсаторов. В каждый момент времени суммарное напряжение на конденсаторах равно напряжению на катушке, которое, в свою очередь, опережает по фазе ток в цепи на $\pi/2$. В момент достижения максимального напряжения на конденсаторах ток в цепи обратится в ноль, следовательно, вся энергия будет сосредоточена в конденсаторах. При этом на конденсатор C_2 перете-

чет из конденсатора C_1 некоторый заряд q, а на конденсаторе C_1 останется заряд $C_1U_1 - q$. Величину заряда q на конденсаторе C_2 можно найти из закона сохранения энергии в контуре

$$\frac{1}{2}C_1U_1^2 = \frac{(C_1U_1 - q)^2}{2C_1} + \frac{q^2}{2C_2}.$$

Учитывая, что $U_2 = \frac{q}{C_2}$, получаем

$$U_{2\max} = \frac{2U_1C_1}{C_1 + C_2},$$

откуда

$$U_1 = \frac{(C_1 + C_2)U_{2\max}}{2C_1}.$$

7. Каждый из лучей света, падающих на призму, преломляется дважды: на передней и задней ее гранях (рис.32). Закон преломления на этих

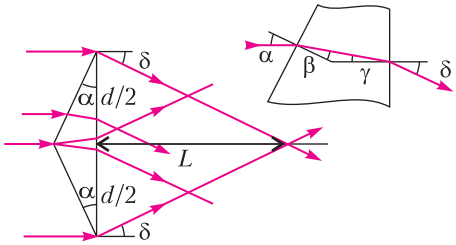

Рис. 32

гранях, записанный с учетом малости углов падения и преломления, дает следующие соотношения: $\beta = \frac{\alpha}{n}$, $\delta = n\gamma$. Поскольку $\gamma = \alpha - \beta$, для угла преломления δ получаем $\delta = \alpha(n-1)$. Из рисунка видно, что пучки света, преломленные призмой, перестанут перекрываться на расстоянии

$$L = \frac{d}{2\operatorname{tg}\delta} = \frac{d}{2\delta} = \frac{d}{2\alpha(n-1)}.$$

8. Построение изображений предмета при двух его положениях показано на рисунке 33. Из

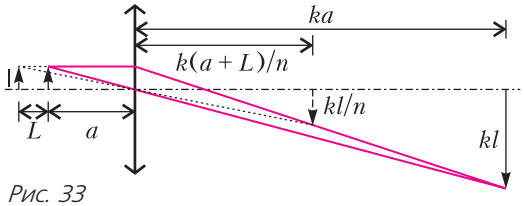

Рис. 33

формулы тонкой линзы следуют равенства

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{ka} = \frac{1}{F},$$

$$\frac{1}{a+L} + \frac{n}{k(a+L)} = \frac{1}{F}.$$

Отсюда находим

$$F = \frac{kL}{n-1}.$$

КВАНТ

НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ

Е.В.Бакаев, Е.М.Епифанов, А.Ю.Котова, С.Л.Кузнецов, В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан

НОМЕР ОФОРМИЛИ

В.Н.Власов, Д.Н.Гришукова, А.Е.Пацхверия, М.Н.Сумнина

ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР

Е.В.Морозова

КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА

М.Н.Грицук, Е.А.Митченко

Журнал «Квант» зарегистрирован в Комитете РФ по печати. Рег. св-во ПИ №ФС77–54256

Тираж: 1-й завод 900 экз. Заказ № 211581

Адрес редакции:
119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант»
Тел.: +7 916 168-64-74
E-mail: math@kvant.ras.ru, phys@kvant.ras.ru

Отпечатано в соответствии с предоставленными материалами в ООО «Принт-Хаус» г. Нижний Новгород, ул. Интернациональная, д. 100, корп. 8
Тел.: (831) 216-40-40