



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. Б. Шабат, А. В. Слепцов, О малочленных кривых. I, *Фундамент. и прикл. матем.*, 2014, том 19, выпуск 1, 173–193

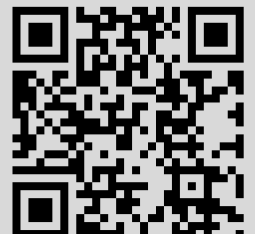
Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.14.89

19 марта 2025 г., 08:23:05



О малочленных кривых. I

Г. Б. ШАБАТ

*Российский государственный гуманитарный университет,
Институт теоретической и экспериментальной физики*
e-mail: george.shabat@gmail.com

А. В. СЛЕПЦОВ

*Институт теоретической и экспериментальной физики,
Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»*
e-mail: cccpsleptsov@gmail.com

УДК 512.75+519.17

Ключевые слова: плоские кривые, сложность, функции Белого.

Аннотация

Расклассифицированы плоские гладкие проективные кривые, задаваемые трёхчленными уравнениями.

Abstract

G. B. Shabat, A. V. Sleptsov, On the few-term curves. I, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 19 (2014), no. 1, pp. 173—193.

The plane smooth projective curves definable by three-term equations are classified.

Введение

Общий неформальный вопрос, связанный с предметом настоящей работы, таков:

что делает алгебраическую кривую замечательной?

Некоторые кривые настолько знамениты, что связываются с великими математиками; среди очевидных примеров — кривые Ферма, кватрика Клейна и кривая Бринга. В случае таких «персональных» кривых короткое имя полностью определяет кривую; мы обобщаем это явление и принимаем точку зрения, согласно которой для кривой замечательность означает возможность быть определённой коротким текстом (для присваивания имён модулярным эллиптическим кривым были выработаны специальные методы, см. «Список Кремоны»: <http://www.warwick.ac.uk/~masgaj/ftp/data>).

Принятая нами точка зрения приводит к следующему вопросу:

какое количество информации требуется для определения алгебраической кривой?

Фундаментальная и прикладная математика, 2014, том 19, № 1, с. 173—193.

© 2014 Издательский дом «Открытые системы»

По-видимому, этот вопрос имеет смысл только над счётными полями, однако в конце работы, когда наши кривые станут жёсткими, для упрощения обозначений мы будем работать над полем комплексных чисел.

Существует несколько способов придания математического смысла сформулированному вопросу, они связаны с высотами и сложностями (см. наши дальнейшие публикации).

Мы работаем над алгебраически замкнутым полем \mathbb{k} и рассматриваем неприводимые алгебраические кривые на проективной плоскости $\mathbb{P}_2(\mathbb{k})$ с однородными координатами $(X : Y : Z)$, используя также аффинные координаты $(x = X/Z, y = Y/Z)$.

1. Одночленные кривые

Одночленная кривая определяется уравнением

$$X^a Y^b Z^c = 0,$$

где $a, b, c \in \mathbb{N}$. Она представляет собой объединение трёх прямых (с произвольными кратностями), так что она неприводима только в случае, когда одно из чисел a, b, c равно 1, а два других равны 0. Следовательно, любая неприводимая одночленная кривая — это прямая.

2. Двучленные кривые

Двучленная кривая определяется уравнением

$$k_1 X^{a_1} Y^{b_1} Z^{c_1} + k_2 X^{a_2} Y^{b_2} Z^{c_2} = 0,$$

где $k_1 k_2 \neq 0$. После подходящего перемасштабирования оно принимает вид

$$X^{a_1} Y^{b_1} Z^{c_1} = X^{a_2} Y^{b_2} Z^{c_2}.$$

Легко проверяется, что кривая, определённая этим уравнением, неприводима тогда и только тогда, когда после возможного переименования координат она принимает вид

$$X^a Y^b = Z^{a+b}$$

с взаимно простыми $a, b \in \mathbb{N}$. Назовём такие кривые *обобщёнными гиперболами*, поскольку в аффинных координатах они задаются уравнением

$$x^a y^b = 1.$$

Разумеется, все они рациональны, поскольку допускают очевидную параметризацию $(x = t^b, y = t^{-a})$.

3. Трёхчленные кривые

Трёхчленная кривая степени d задаётся уравнением

$$k_1 X^{a_1} Y^{b_1} Z^{c_1} + k_2 X^{a_2} Y^{b_2} Z^{c_2} + k_3 X^{a_3} Y^{b_3} Z^{c_3} = 0,$$

где коэффициенты $(k_1 : k_2 : k_3) \in \mathbb{P}_2(\mathbb{k})$ удовлетворяют соотношению $k_1 k_2 k_3 \neq 0$ и степени a_1, \dots, c_3 удовлетворяют соотношениям $a_i + b_i + c_i = d$ для $i = 1, 2, 3$.

3.1. Матрица степеней и частичное отображение Веронезе

Введём некоторые новые обозначения и применим простые алгеброгеометрические средства.

Степени a_1, \dots, c_3 образуют *матрицу степеней*

$$\mathcal{P} := \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_2 \end{pmatrix}.$$

Введём три монома степени d

$$\xi_i := X^{a_i} Y^{b_i} Z^{c_i}$$

(для $i = 1, 2, 3$), определяемых при помощи строк матрицы степеней.

Рассмотрим соответствующие компоненты отображения Веронезе степени d

$$\text{ver}_{\mathcal{P}} : \mathbb{P}_2(\mathbb{k}) \dashrightarrow \mathbb{P}_2(\mathbb{k}), \quad (X : Y : Z) \mapsto (X^{a_1} Y^{b_1} Z^{c_1} : X^{a_2} Y^{b_2} Z^{c_2} : X^{a_3} Y^{b_3} Z^{c_3}),$$

или во введённых выше обозначениях

$$\text{ver}_{\mathcal{P}} : \mathbb{P}_2(\mathbb{k}) \dashrightarrow \mathbb{P}_2(\mathbb{k}), \quad (X : Y : Z) \mapsto (\xi_1 : \xi_2 : \xi_3).$$

Это отображение лишь рационально, поскольку может не быть определено в координатных вершинах или на координатных осях.

Лемма 1. *Размерность образа частичного отображения Веронезе равна*

$$\dim_{\mathbb{k}} \text{ver}_{\mathcal{P}}(\mathbb{P}_2(\mathbb{k})) = \text{rank } \mathcal{P} - 1.$$

Доказательство. Поскольку сумма элементов строк равна $d > 0$, матрица \mathcal{P} ненулевая, т. е. $\text{rank } \mathcal{P} \geq 1$.

Если $\text{rank } \mathcal{P} = 1$, то строки матрицы \mathcal{P} пропорциональны и, поскольку суммы по строкам совпадают, строки равны. Следовательно, мономы ξ_1, ξ_2, ξ_3 совпадают и $\text{ver}_{\mathcal{P}}$ -образ проективной плоскости состоит из точки $(1 : 1 : 1)$, так что $\dim_{\mathbb{k}} \text{ver}_{\mathcal{P}}(\mathbb{P}_2(\mathbb{k})) = 0$.

В случае $\text{rank } \mathcal{P} > 1$ достаточно проверить, что отображение $\text{ver}_{\mathcal{P}}$ вырожденно тогда и только тогда, когда $\det \mathcal{P} = 0$. Это вытекает из следующей леммы. \square

Лемма 2. *При подъёме морфизма и мономов $\text{ver}_{\mathcal{P}}, \xi_{1,2,3}$ и X, Y, Z с проективных плоскостей на аффинные 3-пространства имеем*

$$\text{ver}_{\mathcal{P}}^* \left(\frac{d\xi_1}{\xi_1} \wedge \frac{d\xi_2}{\xi_2} \wedge \frac{d\xi_3}{\xi_3} \right) = \det \mathcal{P} \frac{dX \wedge dY \wedge dZ}{XYZ}.$$

Доказательство. Имеем:

$$\begin{aligned} \text{ver}_{\mathcal{P}}^* \left(\frac{d\xi_1}{\xi_1} \wedge \frac{d\xi_2}{\xi_2} \wedge \frac{d\xi_3}{\xi_3} \right) &= \\ &= \left(a_1 \frac{dX}{X} + b_1 \frac{dY}{Y} + c_1 \frac{dZ}{Z} \right) \wedge \left(a_2 \frac{dX}{X} + b_2 \frac{dY}{Y} + c_2 \frac{dZ}{Z} \right) \wedge \\ &\wedge \left(a_3 \frac{dX}{X} + b_3 \frac{dY}{Y} + c_3 \frac{dZ}{Z} \right) = \det \mathcal{P} \frac{dX \wedge dY \wedge dZ}{XYZ}. \quad \square \end{aligned}$$

Начиная с этого момента мы рассматриваем наши трёхчленные кривые как $\text{ver}_{\mathcal{P}}$ -прообразы прямых

$$k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + k_3\xi_3 = 0.$$

3.2. Случай матрицы степеней ранга 1

Как мы видели при доказательстве леммы 1, в этом случае строки матрицы равны, и это возвращает нас к одночленному случаю.

3.3. Случай матрицы степеней ранга 2

В этом случае имеется нетривиальное соотношение между строками. Поскольку элементы матрицы неотрицательны, после возможной перенумерации строк это соотношение принимает вид

$$m_1(a_1, b_1, c_1) + m_2(a_2, b_2, c_2) = (m_1 + m_2)(a_3, b_3, c_3)$$

для некоторых положительных натуральных m_1, m_2 (если бы одно из чисел m_1, m_2 было нулевым, это означало бы, что две строки совпадают, что вернуло бы нас к двучленному случаю). Таким образом, образ проективной плоскости при частичном отображении Веронезе представляет собой проективную обобщённую параболу, определяемую уравнением

$$\xi_1^{m_1} \xi_2^{m_2} = \xi_3^{m_1+m_2},$$

и наша трёхчленная кривая является прообразом при частичном отображении Веронезе её пересечения с прямой

$$k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + k_3\xi_3 = 0.$$

Однако из нашего предположения, что $k_1k_2k_3 \neq 0$, вытекает, что это пересечение состоит из более чем одной точки, так что наша трёхчленная кривая приводима.

3.4. Случай матрицы степеней ранга 3

Это основной случай работы. Мы дадим полную классификацию трёхчленных кривых с матрицей степеней ранга 3 (они сгруппируются в пять гладких и два особых семейства) и предьявим некоторые коммутативные группы их автоморфизмов.

3.4.1. Канонический вид

Далее наши трёхчленные кривые будут зависеть только от матриц степеней: мы избавимся от коэффициентов k_1, k_2, k_3 .

Предложение 3. В случае невырожденной матрицы

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$$

трёхчленная кривая

$$k_1 X^{a_1} Y^{b_1} Z^{c_1} + k_2 X^{a_2} Y^{b_2} Z^{c_2} + k_3 X^{a_3} Y^{b_3} Z^{c_3} = 0$$

в предположении, что $k_1 k_2 k_3 \neq 0$, проективно эквивалентна кривой

$$C_{\mathcal{P}}: X^{a_1} Y^{b_1} Z^{c_1} + X^{a_2} Y^{b_2} Z^{c_2} + X^{a_3} Y^{b_3} Z^{c_3} = 0.$$

Доказательство. При заданных $(k_1 : k_2 : k_3) \in \mathbb{P}_2$ мы ищем такие обратимые преобразования

$$X \leftarrow \lambda X, Y \leftarrow \mu Y, Z \leftarrow \nu Z,$$

что

$$k_1 \lambda^{a_1} \mu^{b_1} \nu^{c_1} = k_2 \lambda^{a_2} \mu^{b_2} \nu^{c_2} = k_3 \lambda^{a_3} \mu^{b_3} \nu^{c_3}.$$

Над \mathbb{C} задача решается мгновенно: логарифмируя, мы получаем систему линейных уравнений относительно $\log \lambda, \log \mu, \log \nu$ с невырожденной матрицей \mathcal{P} .

Над произвольным полем мы действуем следующим образом. Потребовав, чтобы все рассматриваемые коэффициенты равнялись 1, получим систему

$$\begin{cases} \lambda^{a_1} \mu^{b_1} \nu^{c_1} = \frac{1}{k_1}, & (*) \\ \lambda^{a_2} \mu^{b_2} \nu^{c_2} = \frac{1}{k_2}, & (**) \\ \lambda^{a_3} \mu^{b_3} \nu^{c_3} = \frac{1}{k_3}. & (***) \end{cases}$$

Поскольку мы предполагаем, что матрица степеней \mathcal{P} невырождена с целым определителем

$$\Delta := \det \mathcal{P} \neq 0,$$

имеется присоединённая матрица

$$\mathcal{Q} = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{pmatrix},$$

удовлетворяющая соотношению

$$\mathcal{P}\mathcal{Q} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta & 0 & 0 \\ 0 & \Delta & 0 \\ 0 & 0 & \Delta \end{pmatrix},$$

поэтому при $1 \leq i, j \leq 3$

$$a_i A_j + b_i B_j + c_i C_j = \delta_{ij} \Delta.$$

Теперь произведения степеней уравнений

$$(*)^{A_1} (**)^{A_2} (***)^{A_3}, \quad (*)^{B_1} (**)^{B_2} (***)^{B_3}, \quad (*)^{C_1} (**)^{C_2} (***)^{C_3}$$

дают равенства

$$\lambda^\Delta = \frac{1}{k_1^{A_1} k_2^{A_2} k_3^{A_3}}, \quad \mu^\Delta = \frac{1}{k_1^{B_1} k_2^{B_2} k_3^{B_3}}, \quad \nu^\Delta = \frac{1}{k_1^{C_1} k_2^{C_2} k_3^{C_3}},$$

так что можно взять произвольные значения

$$\lambda \in \frac{1}{\sqrt[\Delta]{k_1^{A_1} k_2^{A_2} k_3^{A_3}}}, \quad \mu \in \frac{1}{\sqrt[\Delta]{k_1^{B_1} k_2^{B_2} k_3^{B_3}}}, \quad \nu \in \frac{1}{\sqrt[\Delta]{k_1^{C_1} k_2^{C_2} k_3^{C_3}}}. \quad \square$$

3.4.2. $(S_3 \times S_3)$ -орбиты

Теперь наши трёхчленные кривые $\mathcal{C}_\mathcal{P}$ полностью определяются матрицами степеней \mathcal{P} , и мы переходим к изучению вариантов нулевых/ненулевых элементов этих матриц. Точнее, рассмотрим 512 булевых (3×3) -матриц (0 будет означать нулевой, а * — ненулевой элемент матрицы степеней) под действием 36-элементной группы $S_3 \times S_3$, переставляющей строки (что соответствует изменению порядка слагаемых) и столбцы (что соответствует переименованию проективных координат X, Y, Z).

Предложение 4. *Имеется в точности 36 орбит этого действия. Их представители перечислены ниже в двух «двойственных» таблицах.*

# *	# орбит	Представители
0	1	$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
1	1	$A_1 = \begin{pmatrix} * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
2	3	$A_2 = \begin{pmatrix} * & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} * & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, C_2 = \begin{pmatrix} * & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

# *	# орбит	Представители
3	6	$A_3 = \begin{pmatrix} * & * & * \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B_3 = \begin{pmatrix} * & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 \end{pmatrix}, C_3 = \begin{pmatrix} * & * & 0 \\ 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$ $D_3 = \begin{pmatrix} * & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 \end{pmatrix}, E_3 = \begin{pmatrix} * & * & 0 \\ * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, F_3 = \begin{pmatrix} * & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}$
4	7	$A_4 = \begin{pmatrix} * & * & * \\ * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B_4 = \begin{pmatrix} * & * & 0 \\ * & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 \end{pmatrix}, C_4 = \begin{pmatrix} * & * & 0 \\ * & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$ $D_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & * \\ 0 & * & 0 \\ 0 & * & * \end{pmatrix}, E_4 = \begin{pmatrix} * & 0 & * \\ 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, F_4 = \begin{pmatrix} 0 & * & * \\ * & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 \end{pmatrix},$ $G_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & * \\ 0 & * & 0 \\ * & 0 & * \end{pmatrix}$

# *	# орбит	Представители
9	1	$A_9 = \begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$
8	1	$A_8 = \begin{pmatrix} 0 & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$
7	3	$A_7 = \begin{pmatrix} 0 & * & * \\ 0 & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}, B_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}, C_7 = \begin{pmatrix} 0 & * & * \\ * & 0 & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$
6	6	$A_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}, B_6 = \begin{pmatrix} 0 & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix}, C_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & * \\ * & * & 0 \\ * & * & * \end{pmatrix},$ $D_6 = \begin{pmatrix} 0 & * & * \\ 0 & * & * \\ * & 0 & * \end{pmatrix}, E_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & * \\ 0 & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}, F_6 = \begin{pmatrix} 0 & * & * \\ * & 0 & * \\ * & * & 0 \end{pmatrix}$
5	7	$A_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}, B_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & * \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix}, C_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & * \\ * & * & * \end{pmatrix},$ $D_5 = \begin{pmatrix} * & * & 0 \\ * & 0 & * \\ * & 0 & 0 \end{pmatrix}, E_5 = \begin{pmatrix} 0 & * & 0 \\ * & 0 & 0 \\ * & * & * \end{pmatrix}, F_5 = \begin{pmatrix} * & 0 & 0 \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix},$ $G_5 = \begin{pmatrix} * & * & 0 \\ * & 0 & * \\ 0 & * & 0 \end{pmatrix}$

3.4.3. Классификация

Теперь мы извлечём из полученного списка матрицы, которые действительно интересуют нас.

Теорема 5. Любая структура нулевых и ненулевых элементов матрицы степеней, определяющей неприводимую трёхчленную кривую ранга 3, принадлежит (с точностью до перестановок строк и столбцов) к одному из следующих семи типов:

$$\begin{array}{ll}
 \begin{pmatrix} * & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix} \leftrightarrow X^d + Y^d + Z^d = 0, & \text{тип Ферма;} \\
 \begin{pmatrix} * & 0 & 0 \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix} \leftrightarrow X^d + Y^{m_1} Z^{d-m_1} + Y^{d-m_2} Z^{m_2} = 0, & \text{блочный тип;} \\
 \begin{pmatrix} * & * & 0 \\ 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix} \leftrightarrow X^m Y^{d-m} + Y^d + Z^d = 0, & \begin{array}{l} \text{малый} \\ \text{жорданов тип;} \end{array} \\
 \begin{pmatrix} * & * & 0 \\ 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix} \leftrightarrow X^d + X^{m_1} Y^{d-m_1} + Y^{m_2} Z^{d-m_2} = 0, & \begin{array}{l} \text{большой} \\ \text{жорданов тип;} \end{array} \\
 \begin{pmatrix} * & * & 0 \\ * & 0 & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix} \leftrightarrow X^{m_1} Y^{d-m_1} + Y^{m_2} Z^{d-m_2} + Z^{m_3} X^{d-m_3} = 0, & \begin{array}{l} \text{клеиновский} \\ \text{тип;} \end{array} \\
 \begin{pmatrix} * & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 \\ * & * & * \end{pmatrix} \leftrightarrow X^d + Y^d + X^{m_1} Y^{m_2} Z^{d-m_1-m_2} = 0, & \begin{array}{l} \text{испорченный} \\ \text{тип Ферма;} \end{array} \\
 \begin{pmatrix} * & 0 & 0 \\ 0 & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \leftrightarrow X^d + Y^{m_1} Z^{d-m_1} + X^{m_2} Y^{m_3} Z^{d-m_2-m_3} = 0, & \text{смешанный тип.}
 \end{array}$$

Доказательство. Предположение о ранге позволяет отбросить матрицы с нулевыми столбцами и нулевыми строками и оставляет нам 17 матриц:

$$\begin{array}{l}
 F_3; F_4, G_4; C_5, D_5, E_5, F_5, G_5; \\
 C_6, D_6, E_6, F_6; A_7, B_7, C_7; A_8; A_9.
 \end{array}$$

Столбец из * (скажем, первый) означает, что соответствующая переменная (скажем, X) входит во все три монома в положительной степени, что говорит о приводимости соответствующей кривой. Вычёркивание матриц со столбцами из * оставляет 8 матриц:

$$F_3 = \begin{pmatrix} * & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}; \quad F_4 = \begin{pmatrix} 0 & * & * \\ * & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad G_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & * \\ 0 & * & 0 \\ * & 0 & * \end{pmatrix}; \quad E_5 = \begin{pmatrix} 0 & * & 0 \\ * & 0 & 0 \\ * & * & * \end{pmatrix},$$

$$F_5 = \begin{pmatrix} * & 0 & 0 \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix}, \quad G_5 = \begin{pmatrix} * & * & 0 \\ * & 0 & * \\ 0 & * & 0 \end{pmatrix}; \quad C_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & * \\ * & * & 0 \\ * & * & * \end{pmatrix}, \quad F_6 = \begin{pmatrix} 0 & * & * \\ * & 0 & * \\ * & * & 0 \end{pmatrix}.$$

Среди них матрица типа F_4 имеет ранг не больше 2 с любыми элементами, тогда как семь оставшихся определяют неприводимые кривые и принадлежат к списку теоремы; параметры будут определены в следующем разделе. \square

Замечания.

1. Предполагается, что все степени в уравнениях положительны.
2. В следующем разделе будет показано, что при надлежащем выборе параметров уравнения первых пяти типов задают гладкие кривые, тогда как любые параметры в последних двух типах определяют особые кривые.
3. Названия первых пяти типов очевидны с точки зрения линейно-алгебраических ассоциаций.

3.4.4. Гладкость

Мы собираемся показать, что в каждом из пяти основных типов трёхчленных кривых в каждой степени имеется ровно один гладкий представитель.

Теорема 6. Любую гладкую трёхчленную кривую степени $d \geq 2$ можно задать одним из следующих уравнений:

(Ферма)	$X^d + Y^d + Z^d = 0;$
(малое жорданово)	$X^d + Y^d + YZ^{d-1} = 0;$
(большое жорданово)	$X^d + XY^{d-1} + YZ^{d-1} = 0;$
(блочное)	$X^d + Y^{d-1}Z + YZ^{d-1} = 0;$
(клеиновское)	$X^{d-1}Y + Y^{d-1}Z + Z^{d-1}X = 0.$

Доказательство. Мы будем использовать следующие пары аффинных координат:

$$(x, y) = \left(\frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z} \right) \text{ в карте } Z \neq 0,$$

$$(x, z) = \left(\frac{X}{Y}, \frac{Z}{Y} \right) \text{ в карте } Y \neq 0,$$

$$(y, z) = \left(\frac{Y}{X}, \frac{Z}{X} \right) \text{ в карте } X \neq 0.$$

Так как аффинные координаты будут использоваться только попарно, эти обозначения недвусмысленны.

В случае типа Ферма доказывать нечего.

В случае малого жорданова типа используем проективное уравнение

$$X^d + Y^d + Z^m Y^{d-m} = 0,$$

переписываем его в карте $Z \neq 0$ в виде

$$x^d + y^d + y^{d-m} = 0$$

и убеждаемся, что эта кривая будет гладкой в точке $(x, y) = (0, 0)$ тогда и только тогда, когда $d - m = 1$.

В случае большого жорданова типа используем проективное уравнение

$$X^d + X^{m_1} Y^{d-m_1} + Y^{m_2} Z^{d-m_2} = 0,$$

переписываем его в карте $Z \neq 0$ в виде

$$x^d + x^{m_1} y^{d-m_1} + y^{m_2} = 0$$

и видим, что эта кривая будет неособой в начале координат $(x, y) = (0, 0)$ тогда и только тогда, когда $m_2 = 1$.

Проективное уравнение принимает вид

$$X^d + X^{m_1} Y^{d-m_1} + Y Z^{d-1} = 0.$$

Переписывая его в карте $Y \neq 0$ в виде

$$x^d + x^{m_1} + z^{d-1} = 0,$$

убеждаемся, что кривая будет гладкой в начале координат $(x, z) = (0, 0)$ тогда и только тогда, когда $m_1 = 1$.

В случае блочного типа используем проективное уравнение

$$X^d + Y^{m_1} Z^{d-m_1} + Y^{d-m_2} Z^{m_2} = 0,$$

переписываем его в карте $Z \neq 0$ в виде

$$x^d + y^{m_1} + y^{d-m_2} = 0$$

и замечаем, что эта кривая будет неособой в начале координат $(x, y) = (0, 0)$ тогда и только тогда, когда либо $m_1 = 1$, либо $d - m_2 = 1$. Поскольку два последних слагаемых в уравнении кривой взаимозаменяемы, мы можем считать, что $m_1 = 1$, и проективное уравнение принимает вид

$$X^d + Y Z^{d-1} + Y^{d-m_2} Z^{m_2} = 0.$$

Теперь в карте $Y \neq 0$ оно выглядит как

$$x^d + z^{d-1} + z^{m_2} = 0,$$

а эта кривая является неособой в $(x, z) = (0, 0)$ тогда и только тогда, когда $m_2 = 1$.

В случае клейновского типа используем проективное уравнение

$$X^{m_1} Y^{d-m_1} + Y^{m_2} Z^{d-m_2} + Z^{m_3} X^{d-m_3} = 0,$$

переписываем его в карте $Z \neq 0$ как

$$x^{m_1} y^{d-m_1} + y^{m_2} + x^{d-m_3} = 0$$

и видим, что задаваемая им кривая будет гладкой в точке $(x, y) = (0, 0)$, только если либо $m_2 = 1$, либо $d - m_3 = 1$.

Рассмотрим случай $m_2 = 1$. Проективное уравнение принимает вид

$$X^{m_1} Y^{d-m_1} + YZ^{d-1} + Z^{m_3} X^{d-m_3} = 0.$$

В карте $Y \neq 0$ перепишем его как

$$x^{m_1} + z^{d-1} + z^{m_3} x^{d-m_3} = 0$$

и убедимся, что соответствующая кривая будет гладкой в точке $(x, z) = (0, 0)$ тогда и только тогда, когда $m_1 = 1$. Теперь проективное уравнение принимает вид

$$XY^{d-1} + YZ^{d-1} + Z^{m_3} X^{d-m_3} = 0,$$

и в карте $X \neq 0$ убеждаемся, что $m_3 = 1$. Проективное уравнение принимает требуемый вид

$$XY^{d-1} + YZ^{d-1} + ZX^{d-1} = 0.$$

Переходя к случаю $d - m_3 = 1$, заключаем аналогичным образом, что $d - m_2 = d - m_3 = 1$, и приходим к уравнению

$$X^{d-1}Y + Y^{d-1}Z + Z^{d-1}X = 0,$$

которое приводится к предыдущему циклической заменой координат X, Y, Z . \square

3.4.5. Определители матриц степеней

В соответствии с предыдущим разделом имеем следующие значения определителей матриц степеней.

Матрица степеней	Уравнение	Определитель
$\begin{pmatrix} d & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & d \end{pmatrix}$	$X^d + Y^d + Z^d = 0$	d^3
$\begin{pmatrix} d & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 \\ 0 & 1 & d-1 \end{pmatrix}$	$X^d + Y^d + YZ^{d-1} = 0$	$d^2(d-1)$
$\begin{pmatrix} d & 0 & 0 \\ 1 & d-1 & 0 \\ 0 & 1 & d-1 \end{pmatrix}$	$X^d + XY^{d-1} + YZ^{d-1} = 0$	$d(d-1)^2$
$\begin{pmatrix} d & 0 & 0 \\ 0 & d-1 & 1 \\ 0 & 1 & d-1 \end{pmatrix}$	$X^d + Y^{d-1}Z + YZ^{d-1} = 0$	$d^2(d-2)$
$\begin{pmatrix} d-1 & 1 & 0 \\ 0 & d-1 & 1 \\ 1 & 0 & d-1 \end{pmatrix}$	$X^{d-1}Y + Y^{d-1}Z + Z^{d-1}X = 0$	$d(d^2 - 3d + 3)$

3.4.6. Диагональные автоморфизмы: определения

Пусть $\rho \in \sqrt{1}$. Назовём *диагональным* автоморфизмом трёхчленной кривой любой автоморфизм вида

$$\text{diag}_{p,q,r}: (X : Y : Z) \mapsto (\rho^p X : \rho^q Y : \rho^r Z)$$

с целыми p, q, r . Напомним наши обозначения: для матрицы степеней

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \in \text{GL}_3(\mathbb{Z}),$$

удовлетворяющей

$$a_1 + b_1 + c_1 = a_2 + b_2 + c_2 = a_3 + b_3 + c_3 =: d,$$

мы обозначаем через

$$\mathbf{C}_{\mathcal{P}} \subset \mathbb{P}_2(\mathbb{k})$$

плоскую проективную кривую, задаваемую уравнением

$$X^{a_1} Y^{b_1} Z^{c_1} + X^{a_2} Y^{b_2} Z^{c_2} + X^{a_3} Y^{b_3} Z^{c_3} = 0.$$

Введём группы автоморфизмов

$$\text{AutDiag}(\mathbf{C}_{\mathcal{P}}) := \{ \alpha \in \text{Aut}(\mathbf{C}_{\mathcal{P}}) \mid \text{найдутся } \rho \in \sqrt{1}, p, q, r \in \mathbb{Z}, \\ \text{такие что } \alpha: (X : Y : Z) \mapsto (\rho^p X : \rho^q Y : \rho^r Z) \}$$

и для $m \in \mathbb{N}$ их подгруппы

$$\text{AutDiag}_m(\mathbf{C}_{\mathcal{P}}) := \{ \alpha \in \text{Aut}(\mathbf{C}_{\mathcal{P}}) \mid \text{найдутся } \rho \in \sqrt[m]{1}, p, q, r \in \mathbb{Z}, \\ \text{такие что } \alpha: (X : Y : Z) \mapsto (\rho^p X : \rho^q Y : \rho^r Z) \}.$$

3.4.7. Редуцированные матрицы степеней

Вместе с матрицами степеней \mathcal{P} мы будем рассматривать также *редуцированные матрицы степеней*

$$\mathcal{P}' := \begin{pmatrix} a_1 - a_2 & b_1 - b_2 \\ a_1 - a_3 & b_1 - b_3 \end{pmatrix}.$$

Лемма 7.

$$\det \mathcal{P} = d \det \mathcal{P}',$$

т. е.

$$\det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} = d \det \begin{pmatrix} a_1 - a_2 & b_1 - b_2 \\ a_1 - a_3 & b_1 - b_3 \end{pmatrix}.$$

Доказательство. Осуществляя очевидные операции над строками и столбцами матриц, получаем, что

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} &= \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & d - a_1 - b_1 \\ a_2 & b_2 & d - a_2 - b_2 \\ a_3 & b_3 & d - a_3 - b_3 \end{pmatrix} = \\ &= \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & d \\ a_2 & b_2 & d \\ a_3 & b_3 & d \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a_1 - a_2 & b_1 - b_2 & 0 \\ a_2 - a_3 & b_2 - b_3 & 0 \\ a_3 & b_3 & d \end{pmatrix} = \\ &= d \det \begin{pmatrix} a_1 - a_2 & b_1 - b_2 \\ a_2 - a_3 & b_2 - b_3 \end{pmatrix} = d \det \begin{pmatrix} a_1 - a_2 & b_1 - b_2 \\ a_1 - a_3 & b_1 - b_3 \end{pmatrix}. \quad \square \end{aligned}$$

Следствие 8.

$$\delta := \det \begin{pmatrix} a_1 - a_2 & b_1 - b_2 \\ a_1 - a_3 & b_1 - b_3 \end{pmatrix} = \frac{\det \mathcal{P}}{d} \in \mathbb{Z}.$$

3.4.8. Диагональные автоморфизмы: результаты

Мы приведём полные списки диагональных автоморфизмов всех пяти серий кривых.

Предложение 9. Если тройка $(p, q, r) \in \mathbb{Z}^3$ такова, что

$$[(X : Y : Z) \mapsto (\rho^p X : \rho^q Y : \rho^r Z)] \in \text{AutDiag}_m(\mathbf{C}_{\mathcal{P}})$$

для некоторого $m \in \mathbb{N}$, то существует такое $e \in \mathbb{Z}$, что

$$\begin{cases} a_1 p + b_1 q + c_1 r \equiv e, & (*) \\ a_2 p + b_2 q + c_2 r \equiv e, & (**) \\ a_3 p + b_3 q + c_3 r \equiv e, & (***) \end{cases}$$

где $\text{под} \equiv$ подразумевается $\equiv \pmod{m}$.

Доказательство. Утверждение следует из определения AutDiag_m . □

Следствие 10. В тех же предположениях и обозначениях

$$\begin{cases} (a_1 - a_2)p + (b_1 - b_2)q \equiv 0, & (*) \\ (a_1 - a_3)p + (b_1 - b_3)q \equiv 0. & (**) \end{cases}$$

Доказательство. Имеем $(*) = (*) - (**)$ и аналогично $(**) = (*) - (***)$. □

Следствие 11. В тех же предположениях и обозначениях

$$\delta p \equiv \delta q \equiv 0.$$

Доказательство. Утверждение доказывают комбинации $(b_1 - b_3)(*) - (b_1 - b_2)(*)$ и $(a_1 - a_3)(*) - (a_1 - a_2)(*)$. □

Теорема 12. Для любой матрицы степеней \mathcal{P}

$$\text{AutDiag}(\mathbf{C}\mathcal{P}) = \text{AutDiag}_\delta(\mathbf{C}\mathcal{P}).$$

Доказательство. Утверждение вытекает из следствия 11. \square

Далее $\mathbb{k} = \mathbb{C}$ и \equiv означает $\equiv \pmod{\delta}$. Группы $\text{AutDiag}(\mathbf{C}\mathcal{P})$ рассматриваются как подмодули свободного модуля ранга 2 над $\mathbb{Z}/\delta\mathbb{Z}$, определённые системой $(*)$, $(**)$.

3.4.9. Основной результат

Теорема 13. Группы диагональных автоморфизмов плоских трёхчленных кривых таковы:

$$\text{AutDiag}(\text{Fermat}_d) \simeq \frac{\mathbb{Z}}{d\mathbb{Z}} \times \frac{\mathbb{Z}}{d\mathbb{Z}},$$

порождённая в аффинной форме

$$x^d + y^d + 1 = 0$$

автоморфизмами

$$(x, y) \mapsto \left(e^{\frac{2\pi i}{d}} x, y \right), \quad (x, y) \mapsto \left(x, e^{\frac{2\pi i}{d}} y \right);$$

$$\text{AutDiag}(\text{SmallJordan}_d) \simeq \frac{\mathbb{Z}}{d(d-1)\mathbb{Z}},$$

порождённая в аффинной форме

$$x^d + y^d + y = 0$$

автоморфизмом

$$(x, y) \mapsto \left(e^{\frac{2\pi i}{d(d-1)}} x, e^{\frac{2\pi i}{d-1}} y \right);$$

$$\text{AutDiag}(\text{BigJordan}_d) \simeq \frac{\mathbb{Z}}{(d-1)^2\mathbb{Z}},$$

порождённая в аффинной форме

$$x^d + xy^{d-1} + y = 0$$

автоморфизмом

$$(x, y) \mapsto \left(e^{\frac{2\pi i}{(d-1)^2}} x, e^{\frac{2\pi i d}{(d-1)^2}} y \right);$$

$$\text{AutDiag}(\text{Block}_d) \simeq \frac{\mathbb{Z}}{d(d-2)\mathbb{Z}},$$

порождённая в аффинной форме

$$x^d + y^{d-1} + y = 0$$

автоморфизмом

$$(x, y) \mapsto \left(e^{\frac{2\pi i}{d(d-2)}} x, e^{\frac{2\pi i}{d-2}} y \right);$$

$$\text{AutDiag}(\text{Klein}_d) \simeq \frac{\mathbb{Z}}{(d^2 - 3d + 3)\mathbb{Z}},$$

порождённая в аффинной форме

$$x^{d-1}y + y^{d-1} + x = 0$$

автоморфизмом

$$(x, y) \mapsto \left(e^{\frac{2\pi i}{d^2-3d+3}} x, e^{\frac{2\pi i(d-2)}{d^2-3d+3}} y \right).$$

Доказательство. В случае Ферма (\star) , $(\star\star)$ превращаются в

$$\begin{cases} dp \equiv 0, \\ dq \equiv 0, \end{cases}$$

и при этом $\delta = d^2$, так что AutDiag очевидно распадается в произведение двух копий групп

$$\frac{\frac{\mathbb{Z}}{d^2\mathbb{Z}}}{\frac{\mathbb{Z}}{d\mathbb{Z}}} \simeq \frac{\mathbb{Z}}{d\mathbb{Z}}.$$

В малом жордановом случае (\star) , $(\star\star)$ превращается в

$$\begin{cases} dp - dq \equiv 0, \\ dp - q \equiv 0 \end{cases}$$

при $\delta = d(d-1)$. Вычитание даёт

$$(d-1)q \equiv 0.$$

Теперь рассмотрим изоморфизм

$$\frac{\mathbb{Z}}{d(d-1)\mathbb{Z}} \rightarrow \frac{\mathbb{Z}}{d\mathbb{Z}} \times \frac{\mathbb{Z}}{(d-1)\mathbb{Z}} : x \mapsto (x' \times x'').$$

Так как $(d-1)q \equiv 0$, для всех пар (p, q) имеем $q'' = 0$, так что модуль решений системы порождён элементами вида (p, \underline{d}) . Ядро морфизма $(p, q) \mapsto (p', q')$ порождено элементом $(\underline{d-1}, 0)$. Соответствующий автоморфизм

$$(x, y) \mapsto \left(e^{\frac{2\pi i}{d(d-1)}} x, e^{\frac{2\pi i}{d-1}} y \right),$$

однако, имеет степень $d(d-1)$, так что мы заменяем его на его d -ю степень, откуда и следует утверждение.

В большом жордановом случае (\star) , $(\star\star)$ превращаются в

$$\begin{cases} (d-1)p - (d-1)q \equiv 0, \\ dp - q \equiv 0 \end{cases}$$

при $\delta = (d-1)^2$. Подставляя $q \equiv dp$, получаем, что $(d-1)^2p \equiv 0$, что тавтологично, так что группа решений порождена элементом $(p, q) = (1, d)$.

В блочном случае (\star) , $(\star\star)$ превращаются в

$$\begin{cases} dp - (d-1)q \equiv 0, \\ dp - q \equiv 0 \end{cases}$$

при $\delta = d(d-2)$. Подставляя $q \equiv dp$ в $dp - (d-1)q \equiv 0$, получаем, что $d(d-2)p \equiv 0$, что тавтологично, так что группа решений порождена $(p, q) = (1, d)$.

В клейновском случае (\star) , $(\star\star)$ превращаются в

$$\begin{cases} (d-1)p - (d-2)q \equiv 0, \\ (d-2)p - q \equiv 0 \end{cases}$$

при $\delta = d^2 - 3d + 3$. Подставляя $q \equiv (d-2)p$ в $(d-1)p - (d-2)q \equiv 0$, получаем, что $(d^2 - 3d + 3)p \equiv 0$, что тавтологично, так что группа решений порождена элементом $(p, q) = (1, d-2)$. \square

3.4.10. Проективная версия

Теорема 14. Группы диагональных автоморфизмов плоских трёхчленных кривых таковы:

$$\text{AutDiag}(\text{Fermat}_d) \simeq \frac{\mathbb{Z}}{d\mathbb{Z}} \times \frac{\mathbb{Z}}{d\mathbb{Z}}$$

порождена в проективной форме

$$X^d + Y^d + Z^d = 0$$

автоморфизмами

$$(X : Y : Z) \mapsto \left(e^{\frac{2\pi i}{d}} X : Y : Z \right), \quad (X : Y : Z) \mapsto \left(X : e^{\frac{2\pi i}{d}} Y : Z \right);$$

$$\text{AutDiag}(\text{SmallJordan}_d) \simeq \frac{\mathbb{Z}}{d(d-1)\mathbb{Z}}$$

порождена в проективной форме

$$X^d + Y^d + YZ^{d-1} = 0$$

автоморфизмом

$$(X : Y : Z) \mapsto \left(e^{\frac{2\pi i}{d(d-1)}} X : e^{\frac{2\pi i}{d-1}} Y : Z \right);$$

$$\text{AutDiag}(\text{BigJordan}_d) \simeq \frac{\mathbb{Z}}{(d-1)^2\mathbb{Z}}$$

порождена в проективной форме

$$X^d + XY^{d-1} + YZ^{d-1} = 0$$

автоморфизмом

$$(X : Y : Z) \mapsto \left(e^{\frac{2\pi i}{(d-1)^2}} X, e^{\frac{2\pi i d}{(d-1)^2}} Y : Z \right);$$

$$\text{AutDiag}(\text{Block}_d) \simeq \frac{\mathbb{Z}}{d(d-2)\mathbb{Z}}$$

порождена в проективной форме

$$X^d + Y^{d-1}Z + YZ^{d-1} = 0$$

автоморфизмом

$$(X : Y : Z) \mapsto \left(e^{\frac{2\pi i}{d(d-2)}} X : e^{\frac{2\pi i}{(d-2)}} Y : Z \right);$$

$$\text{AutDiag}(\text{Klein}_d) \simeq \frac{\mathbb{Z}}{(d^2 - 3d + 3)\mathbb{Z}}$$

порождена в проективной форме

$$X^{d-1}Y + Y^{d-1}Z + Z^{d-1}X = 0$$

автоморфизмом

$$(X : Y : Z) \mapsto \left(e^{\frac{2\pi i}{d^2-3d+3}} X : e^{\frac{2\pi i(d-2)}{d^2-3d+3}} Y : Z \right).$$

4. Функции Белого на трёхчленных кривых

В этом разделе мы покажем, что на всех гладких трёхчленных кривых имеются простые функции Белого; их степени ограничены степенями кривых квадратично.

Теорема 15. Частичное отображение Веронезе

$$\text{pver}_d : (X : Y : Z) \mapsto (X^{a_1} Y^{b_1} Z^{c_1} : X^{a_2} Y^{b_2} Z^{c_2} : X^{a_3} Y^{b_3} Z^{c_3})$$

гладкой трёхчленной кривой, определённой на проективной плоскости уравнением

$$X^{a_1} Y^{b_1} Z^{c_1} + X^{a_2} Y^{b_2} Z^{c_2} + X^{a_3} Y^{b_3} Z^{c_3} = 0,$$

на прямую в проективной плоскости с координатами $(\xi_1 : \xi_2 : \xi_3)$, определённую уравнением

$$\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 0,$$

осуществляет факторизацию трёхчленной кривой по группе её диагональных автоморфизмов. Оно разветвляется только над точками $(0 : 0 : 1)$, $(0 : 1 : 0)$ и $(1 : 0 : 0)$ и, следовательно, является накрытием Белого проективной прямой.

Доказательство. В соответствии с (\star) и $(\star\star)$ отображение rver_d постоянно на орбитах группы AutDiag .

Степень отображения rver_d совпадает, скажем, со степенью рациональной функции

$$\beta := \frac{\xi_1}{\xi_3} = X^{a_1-a_3} Y^{b_1-b_3} Z^{c_1-c_3} = x^{a_1-a_3} y^{b_1-b_3},$$

которая совпадает с порядком группы AutDiag , вычисленной в разделах 3.4.7 и 3.4.8.

Остаётся проверить утверждение, касающееся ветвления.

Случай Ферма хорошо известен и прост: функция

$$\beta := \frac{X^d}{Z^d} = x^d$$

AutDiag -инвариантна, а её степень равна d^2 , так что она осуществляет факторизацию

$$\beta: \text{Fermat}_d \rightarrow \frac{\text{Fermat}_d}{\text{AutDiag}}.$$

Это функция Белого, поскольку на аффинной части $Z \neq 0$ кривой $d\beta = x^{d-1}dx = 0$ влечёт $x = 0$ или $dx = 0$. Из равенства $x^d + y^d = 1$ следует, что

$$x^{d-1}dx + y^{d-1}dy = 0,$$

поэтому, принимая во внимание, что dx и dy не обращаются в ноль одновременно, имеем $d\beta = 0$, следовательно, $xy = 0$, а это означает, что на аффинной части из $d\beta = 0$ следует, что $\beta = 0$ или $\beta = 1$. Что касается оставшихся точек, в которых $Z = 0$, то в них $\beta = \infty$ или $\beta = 1$.

В оставшихся четырёх случаях группы AutDiag циклические и достаточно проанализировать неподвижные точки их образующих. Однако из явных формул теоремы 13 видно, что порядки орбит этих образующих максимальны на множествах точек, в которых $xy \neq 0$, откуда и следует утверждение. \square

Следующее простое утверждение содержит существенно более простой аргумент для доказательства последней теоремы.

Предложение 16. На любой трёхчленной кривой, определённой уравнением

$$X^{a_1} Y^{b_1} Z^{c_1} + X^{a_2} Y^{b_2} Z^{c_2} + X^{a_3} Y^{b_3} Z^{c_3} = 0,$$

имеется функция Белого

$$\beta := -\frac{X^{a_3} Y^{b_3} Z^{c_3}}{X^{a_2} Y^{b_2} Z^{c_2}};$$

она удовлетворяет соотношению

$$1 - \beta = -\frac{X^{a_1} Y^{b_1} Z^{c_1}}{X^{a_2} Y^{b_2} Z^{c_2}}.$$

Доказательство. Утверждение, касающееся $1 - \beta$, следует непосредственно из уравнения кривой. То, что и β и $1 - \beta$ являются функциями Белого, вытекает из приведённых выше соображений. \square

Подведём итоги в следующей самодостаточной таблице.

Уравнение кривой	Функция Белого	Степень
$X^d + Y^d + Z^d = 0$	$-\frac{Y^d}{Z^d}$	d^2
$X^d + Y^d + YZ^{d-1} = 0$	$-\frac{X^d}{YZ^{d-1}}$	$d(d-1)$
$X^d + XY^{d-1} + YZ^{d-1} = 0$	$-\frac{Z^{d-1}}{XY^{d-2}}$	$(d-1)^2$
$X^d + Y^{d-1}Z + YZ^{d-1} = 0$	$-\frac{X^d}{YZ^{d-1}}$	$d(d-2)$
$X^{d-1}Y + Y^{d-1}Z + Z^{d-1}X = 0$	$-\frac{X^{d-1}}{Y^{d-2}Z}$	$d^2 - 3d + 3$

Итак, мы получили пять семейств пар Белого. Их следовало бы нарисовать средствами теории гротендиговских детских рисунков, однако в настоящее время мы не в состоянии это сделать. Более того, мы не знаем языка, на котором могут быть описаны пять счётных семейств графов на поверхностях.

Мы можем выписать паспорта всех наших пар Белого, т. е. списки кратностей всех критических точек функций Белого; мы приведём их в дивизориальной форме. Все координаты всех критических точек окажутся корнями из единицы.

Теорема 17. В обозначениях конца предыдущего раздела дивизоры, связанные с функциями Белого β , имеют следующий вид.

Случай Ферма, $X^d + Y^d + Z^d = 0$, $\beta = -\left(\frac{Y}{Z}\right)^d$, $1 - \beta = -\left(\frac{X}{Z}\right)^d$:

$$\operatorname{div}(\beta) = d \sum_{k=1}^d A_k - d \sum_{k=1}^d C_k,$$

$$\operatorname{div}(1 - \beta) = d \sum_{k=1}^d B_k - d \sum_{k=1}^d C_k,$$

где

$$[X : Y : Z](A_k) = \left(0 : e^{\frac{(2k-1)\pi i}{d}} : 1\right),$$

$$[X : Y : Z](B_k) = \left(e^{\frac{(2k-1)\pi i}{d}} : 0 : 1\right),$$

$$[X : Y : Z](C_k) = \left(1 : e^{\frac{(2k-1)\pi i}{d}} : 0\right).$$

Малый жорданов случай, $X^d + Y^d + YZ^{d-1} = 0$, $\beta = -\frac{X^d}{YZ^{d-1}}$, $1 - \beta = -\frac{Y^{d-1}}{Z^{d-1}}$:

$$\operatorname{div}(\beta) = d \sum_{k=1}^{d-1} A_k - (d-1) \sum_{k=1}^d C_k,$$

$$\operatorname{div}(1 - \beta) = d(d-1)B - (d-1) \sum_{k=1}^d C_k,$$

где

$$[X : Y : Z](A_k) = \left(0 : 1 : e^{\frac{(2k-1)\pi i}{d-1}}\right),$$

$$[X : Y : Z](B) = (0 : 0 : 1),$$

$$[X : Y : Z](C_k) = \left(1 : e^{\frac{(2k-1)\pi i}{d}} : 0\right).$$

Большой жорданов случай, $X^d + XY^{d-1} + YZ^{d-1} = 0$, $\beta = -\frac{Z^{d-1}}{XY^{d-2}}$, $1 - \beta = -\frac{X^{d-1}}{Y^{d-1}}$:

$$\operatorname{div}(\beta) = (d-1) \sum_{k=1}^{d-1} A_k - (d-1)^2 C,$$

$$\operatorname{div}(1 - \beta) = (d-1)^2 B - (d-1)^2 C,$$

где

$$[X : Y : Z](A_k) = \left(1 : e^{\frac{(2k-1)\pi i}{d-1}} : 0\right),$$

$$[X : Y : Z](B) = (0 : 1 : 0),$$

$$[X : Y : Z](C) = (0 : 0 : 1).$$

Блочный случай, $X^d + Y^{d-1}Z + YZ^{d-1} = 0$, $\beta = -\frac{X^d}{YZ^{d-1}}$, $1 - \beta = -\frac{Y^{d-2}}{Z^{d-2}}$:

$$\operatorname{div}(\beta) = d(d-2)A - d(d-2)C,$$

$$\operatorname{div}(1 - \beta) = d(d-2)B - d(d-2)C,$$

где

$$[X : Y : Z](A) = (1 : 0 : 0),$$

$$[X : Y : Z](B) = (0 : 0 : 1),$$

$$[X : Y : Z](C) = (0 : 1 : 0).$$

Обобщённый клейновский случай, $X^{d-1}Y + Y^{d-1}Z + Z^{d-1}X = 0$, $\beta = -\frac{X^{d-1}}{Y^{d-2}Z}$, $1 - \beta = -\frac{Z^{d-2}}{Y^{d-2}}$:

$$\operatorname{div}(\beta) = d(d-2)A - d(d-2)C,$$

$$\operatorname{div}(1 - \beta) = d(d-2)B - d(d-2)C,$$

где

$$[X : Y : Z](A) = (1 : 0 : 0),$$

$$[X : Y : Z](B) = (0 : 0 : 1),$$

$$[X : Y : Z](C) = (0 : 1 : 0).$$

Теорема доказывается прямой проверкой.