A. A. Golovan, N. A. Parusnikov, Methods for identifying the small parameter in a control system from the point of view of controllability measures, *Vestnik Moskov. Univ. Ser. 1. Mat. Mekh.*, 1993, Number 2, 73–77

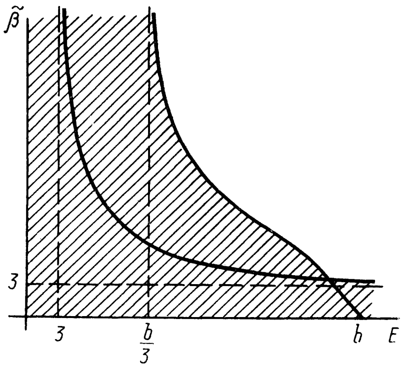
Условие

$$E > 2\left|\left(\frac{\partial\rho_a}{\partial R}\right)_0 \frac{R_0}{\rho_a}\right| \qquad (8)$$

обеспечивает выполнение третьего из условий (4).

Аналогичное условие для «почти вертикального» троса (в задаче зондирования) имеет вид [1—4]

$$E > \left|\left(\frac{\partial\rho_a}{\partial R}\right)_0 \frac{R_0}{\rho_a}\right|. \qquad (9)$$



Сравнение неравенств (8) и (9) показывает, что условие (8) более жесткое, чем аналогичное требование для «вертикального» зонда. Это приводит, например, к удвоению требуемого диаметра троса или к уменьшению в два раза «критической» длины троса и т. п.

Однако условие (8) завышено и может быть смягчено за счет достаточно большого значения члена $\frac{\beta R_0}{r_0}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Левин Е. М. Об устойчивости стационарных движений связки двух тел на орбите под действием гравитационных и аэродинамических сил//Космич. исследования. 1984. **22**, вып. 5. 675—682.
2. Белецкий В. В. Динамика космических тросовых систем//Механика и научно-технический прогресс. Т. 1: Общая и прикладная механика. М., 1987. 226—241.
3. Белецкий В. В. Прикладные задачи устойчивости. Препринт Ин-та прикл. матем. АН СССР. № 121. М., 1990.
4. Белецкий В. В., Левин Е. М. Динамика космических тросовых систем. М., 1990.
5. Сарычев В. А. Вопросы ориентации искусственных спутников//Итоги науки и техники: Исследование космического пространства. Т. 11. М., 1978. 5—79.

Поступила в редакцию
15.07.91

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 1, МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. 1993. № 2

УДК 629.7.052

А. А. Голован, Н. А. Парусников

О СПОСОБАХ ВЫДЕЛЕНИЯ МАЛОГО ПАРАМЕТРА В УПРАВЛЯЕМОЙ СИСТЕМЕ С ТОЧКИ ЗРЕНИЯ МЕР УПРАВЛЯЕМОСТИ

При построении практических алгоритмов оценивания и управления линейных динамических систем значительную роль играют характеристики, выявляющие качество наблюдения или управления системой. Проблема введения характеристик наблюдаемости обсуждалась в [1, 2]. В настоящей работе рассматриваются некоторые характеристики управляемости. Их смысл по существу состоит в выявлении в управляемой системе скрытых малых параметров.

Эти результаты докладывались авторами на различных конференциях и семинарах, но не были в свое время опубликованы. Отметим также конструктивный подход к построению мер управляемости, содержащийся в [3].

Рассмотрим динамическую систему с одним входом:

$$\dot{x}=Ax+bu. \tag{1}$$

Матрица A и вектор-столбец b предполагаются постоянными.

Будем считать, что проведена подходящая нормировка фазовых переменных x_j и времени τ системы (1), так что $|x_j|\leqslant 1$ и отводимое время τ для управления системой принадлежит [0, 1].

Цель управления — стабилизация (приведение вектора в нулевую точку).

Обозначим матрицу управляемости через

$$W=(g_1, g_2, ..., g_n), \quad g_1=b, \quad g_{j+1}=Ag_j. \tag{2}$$

Осуществим процедуру ортогонализации Грама—Шмидта для набора векторов $\{g_j\}$. Полученный набор ортонормированных векторов обозначим через $\{p_j\}$. Связь векторов $\{g_j\}$, $\{p_j\}$ определяется соотношением

$$g_1=s_{11}p_1, \quad g_2=s_{21}p_1+s_{22}p_2, \quad \ldots, \quad g_j=\sum_{k=1}^{j} s_{jk}p_k,$$

где s_{jk} — элементы нижнетреугольной матрицы S, факторизующей матрицу W^TW следующим образом:

$$SS^T=W^TW, \quad S=(W^TW)^{\frac{1}{2}}.$$

Запишем систему (1) в новом базисе, понимая в соответствии с [1] под координатами вектора x контравариантные координаты

$$x=y_1p_1+y_2p_2+ \ldots +y_np_n.$$

В новых переменных y система (1) примет вид

$$\dot{y}=Fy+b_yu,$$

где F является верхней квазитреугольной матрицей, у которой все элементы, лежащие ниже нижней квазидиагонали, равны нулю, причем

$$F=S^TA_\alpha(S^{-1})^T, \quad b_y=(s_{11}, 0, \ldots, 0)^T,$$

$$A_\alpha=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & \alpha_1 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & \alpha_2 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & \alpha_3 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & \alpha_n \end{pmatrix}.$$

Квазидиагональные элементы $f_{j,j-1}$ матрицы F имеют следующий вид:

$$f_{j,j-1}=s_{jj}/s_{j-1,j-1}.$$

Очевидно, что только элементы, составляющие нижнюю квазидиагональ, служат носителями информации о качестве управляемости.

Мерой управляемости μ_k переменной y_k естественно назвать величину

$$\mu_k=s_{11}f_{21}f_{32}\ldots f_{k,k-1}=s_{kk}.$$

Малость этой величины соответствует большим энергетическим затратам на приведение на интервале [0, 1] фазовой координаты y_k в нулевое состояние. Другая интерпретация: при управлении, осуществляемом с помощью линейной обратной связи, сформированной путем измерения всех фазовых переменных с некоторой погрешностью, возникает большая ошибка приведения на интервале [0, 1].

В многомерном случае один из вариантов отщепления слабоуправляемого подпространства состоит в применении указанной выше процедуры по отдельности к каждому из векторов b_j, составляющих матрицу $B=(b_1, b_2, ..., b_m)$, а затем декомпозиции стандартным способом хорошо управляемого подпространства по компонентам вектора управления u.

Рассмотрим второй возможный способ введения меры. Осуществим сингулярное разложение матрицы управляемости (2) [4]:

$$W=V\Lambda U^T.$$

Здесь V и U — ортогональные матрицы соответствующей размерности, $\Lambda=\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$, $\lambda_j \geqslant 0$ — сингулярные числа матрицы. Матрицы V и U всегда можно выбрать так, чтобы $\lambda_j \geqslant \lambda_{j+1}$.

Пусть матрица Λ имеет следующую структуру:

$$\Lambda=\begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & \varepsilon N \end{pmatrix}, \quad S=\mathrm{diag}(s_1, s_2, \ldots, s_k),$$

$$N=\mathrm{diag}(\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_r), \quad k+r=n,$$

где ε — малый параметр, а величины s_j, ν_i — порядка единицы.

Соответственно матрицу V представим в виде

$$V=(p_1, p_2, \ldots, p_k, q_1, q_2, \ldots, q_r).$$

Набор векторов $\{p_j\}$, $\{q_i\}$ примем в качестве ортонормированного базиса. Контравариантное представление вектора x в этом базисе таково:

$$x=\xi_1 p_1+\xi_2 p_2+\ldots+\xi_k p_k+\eta_1 q_1+\eta_2 q_2+\ldots+\eta_r q_r.$$

Выясним структуру уравнений (1) в переменных $\xi=(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k)^T$ и $\eta=(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_r)^T$. Поскольку в новом базисе соответствующая матрица управляемости имеет вид

$$W^*=V^T W=\Lambda U^T=\begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & \varepsilon N \end{pmatrix} U^T=\begin{pmatrix} W_{\mathrm{I}} \\ \varepsilon W_{\mathrm{II}} \end{pmatrix}, \tag{3}$$

из (3) непосредственно следует

$$\dot{\xi}=A_{11}\xi+A_{12}\eta+b_1 u,$$

$$\dot{\eta}=\varepsilon A_{21}\xi+A_{22}\eta+\varepsilon b_2 u.$$

Таким образом, вектор η слабоуправляем.

В более общем случае, когда управление u — вектор, аналогично можно получить:

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= A_{11}\xi+A_{12}\eta+B_1 u, \\ \dot{\eta} &= \varepsilon A_{21}\xi+A_{22}\eta+\varepsilon B_2 u. \end{aligned} \tag{4}$$

При практическом построении редуцированного алгоритма управления в виде линейной обратной связи часто бывает целесообразно от системы (4) перейти к новой системе относительно переменных ξ и $\eta^*=\eta-C\xi$, где матрица C выбирается таким образом, что уравнение относительно η^* не содержит управление u.

В новых переменных

$$\dot{\xi}=(A_{11}+A_{12}C)\xi+A_{12}\eta^*+B_1u,$$

$$\dot{\eta}^*=(\varepsilon A_{21}+A_{22}C-CA_{11}-CA_{12}C)\xi+(A_{22}-CA_{12})\eta^*+(\varepsilon B_2-CB_1)u.$$

Уравнение $CB_1=\varepsilon B_2$ имеет относительно матрицы C неоднозначное решение. Однозначности можно добиться, если положить $C=C^*B_1^T$. Матрица $B_1^TB_1$ невырождена, поэтому

$$C^*=\varepsilon B_2(B_1^TB_1)^{-1}.$$

Еще один способ задания меры управляемости в некоторой степени аналогичен введению стохастической меры оцениваемости [5]. Рассматривается классическая задача об оптимальном управлении линейной динамической системой

$$\dot{x}=Ax+Bu$$

с квадратичным критерием качества

$$J=\int_0^T[x^TQx+u^TRu]\,d\tau+x^T(T)Fx(T),$$

$Q(t)\geqslant 0$, $R(t)>0$, $F\geqslant 0$ — симметричные матрицы.

Оптимальность достигается (см., например, [6]) при $u=-R^{-1}BPx$, где симметрическая матрица $P(t)$ служит решением матричного уравнения Риккати

$$\dot{P}+PA+A^TP+Q-PBR^{-1}B^TP=0,\quad P(T)=F,$$

причем

$$J_{\text{опт}}=x^T(0)P(0)x(0).$$

Обозначим значение функционала в отсутствие управления через J^0. Легко показать, что

$$J^0=x^T(0)P^0(0)x(0),$$

$$\dot{P}^0+P^0A+A^TP^0+Q=0,\ P^0(T)=F.$$

Положим $x(0)=\|x(0)\|\alpha$, $\alpha^T\alpha=1$.

В качестве меры управляемости вектора $x(0)$ по направлению α введем величину

$$\mu[\alpha]=1-\left(\frac{\alpha^TP(0)\alpha}{\alpha^TP^0(0)\alpha}\right)^{1/2}.$$

Малое значение меры по какому-то направлению дает возможность при построении управления не учитывать проекцию вектора x на это направление.

Экстремальные свойства меры таковы. Согласно [7] уравнение $\frac{\partial\mu}{\partial\alpha}=0$ имеет n решений α^j, составляющих собственные векторы связки $\lambda P^0—P$, причем

$$\mu[\alpha^j]=1-(\lambda_j)^{1/2},$$

где λ_j — корни уравнения $|\lambda P^0—P|=0$.

Приведем простой иллюстративный пример, в котором малый параметр выступает в явном виде.

Задача управления описывается соотношениями

$$\dot{x}_1=u,\quad J=\int_0^1 u^2\,dt+x_1^2(1)+x_2^2(1),$$

$$\dot{x}_2=\varepsilon x_1,\ x_1(0)=x_2(0)=1,\ \ \varepsilon\ll 1.$$

Выкладки проводятся с точностью до малого параметра ε (включительно). Все уравнения в нашем случае решаются аналитически. Получим

$$P^0(0)=\begin{pmatrix}1 & \varepsilon\\ \varepsilon & 1\end{pmatrix},\ P(0)=\begin{pmatrix}1/2 & 3/4\varepsilon\\ \frac{3}{4}\varepsilon & 1\end{pmatrix},$$

$$J^0=2(1+\varepsilon),\quad J_{\text{опт}}=\frac{3}{2}(1+\varepsilon).$$

Введем $\alpha^1=(1,\ 0)^T$, $\alpha^2=(0,\ 1)^T$. Будем иметь

$$\mu[\alpha^1]\approx\frac{2}{7},\ \mu[\alpha^2]\approx 0.$$

Выбор управления без учета x_2 дает $u^*=-\frac{1}{2-t}x_1^*$. Легко получить в этом случае $x_1^*(t)=1-\frac{t}{2}$, $x_2^*(t)=1+\varepsilon\left(t-\frac{t^2}{4}\right)$. Откуда $J^*=\frac{3}{2}(1+\varepsilon)$, т. е., пренебрегая ε^2, получим $J^*=J_{\text{опт}}$.

Заметим также, что уравнение $|\lambda P^0—P|=0$ в нашем случае имеет корни $\lambda_1=\frac{1}{2}$, $\lambda_2=1$ и векторы α^1, α^2 могут считаться собственными векторами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Парусников Н. А., Морозов В. М., Борзов В. И. Задача коррекции в инерциальной навигации. М., 1982.
2. Парусников Н. А., Голован А. А. Об одном способе выделения малого параметра в наблюдаемой системе с точки зрения меры оцениваемости//Сб. науч. тр. МЭИ. № 217. М., 1989.
3. Везломцев Д. В., Кубинцев Г. М., Цатурян К. Т. Приближенное агрегирование линейных динамических систем//Автоматика и Телемеханика. 1986. № 3. 48—58.
4. Лоусон Ч., Хенсон Р. Численное решение задач метода наименьших квадратов. М.,1986.
5. Парусников Н. А., Голован А. А., Варавва В. Г. О стохастической мере оцениваемости//Коррекция в навигационных системах и системах ориентации искусственных спутников Земли. М., 1987. 4—7.
6. Дэвис М. Х. А. Линейное оценивание и стохастическое управление. М., 1984.
7. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М., 1966.

Поступила в редакцию
23.12.91