В. А. Медведев УДК 517.948

ОБ ОПТИМАЛЬНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ ФУНКЦИЙ СУММОЙ ДВУХ КОМПОЗИЦИЙ

§ 1. Введение

Пусть даны множества Q, Q_1, Q_2 и сюръективные отображения $\varphi_1 : Q \to Q_1$, $\varphi_2 : Q \to Q_2$, причем $Q_1 \cap Q_2 = \varnothing$. Для любой ограниченной комплексной функции g, заданной на $T = Q_1 \cup Q_2$, обозначим через g_1 и g_2 ее сужения на Q_1 и Q_2 и положим $Ag = g_1 \circ \varphi_1 + g_2 \circ \varphi_2$. Тогда A — линейный ограниченный оператор, действующий из $B(T)$ в $B(Q)$. Если Q, Q_1, Q_2 — топологические пространства, то предположим, что φ_1, φ_2 непрерывны, а T наделено топологией суммы Q_1 и Q_2. Последнее означает [1], что множество в T открыто, если и только если его пересечения с Q_i открыты в Q_i, $i = 1, 2$. Сужение A на $C(T)$ обозначается тоже через A, хотя формально оно является другим оператором. $B(T)$ и $C(T)$ обозначают пространства ограниченных и непрерывных ограниченных функций с sup-нормой. Если $f = Ag$, то g будем называть функцией, представляющей f. Если среди ограниченных функций, представляющих f, функция g имеет наименьшую норму, то равенство $f = Ag$ называется оптимальным представлением f в классе ограниченных функций. Аналогично понимается оптимальное представление в классе непрерывных функций.

В данной работе при некоторых предположениях доказывается существование оптимальных представлений и изучаются смежные вопросы. Один из них — вопрос существования хотя бы одного представления $f = Ag$ для данной функции f. В работе [2] получено необходимое и достаточное условие, налагаемое на данные множества и отображения, при котором $B(Q) = AB(T)$. Там же доказано, что это условие необходимо и достаточно для выполнения равенства $C(Q) = AC(T)$, если Q, T — метрические компакты. С. Я. Хавинсон [3] дал простое эквивалентное условие, используя понятие молнии. Дадим определение молнии в виде, удобном для дальнейшего изложения.

Введем в Q отношения эквивалентности R_i, $i = 1, 2$, полагая xR_iy, если $\varphi_i(x) = \varphi_i(y)$. Назовем молнией конечную последовательность точек $(x_1, \ldots, x_n)$ в Q, если $x_1R_1x_2$, $x_2R_2x_3$, ... или $x_1R_2x_2$, $x_2R_1x_3$, ..., где R_1, R_2 чередуются. Допускается совпадение некоторых точек молнии. Число n назовем длиной молнии и будем говорить, что молния соединяет x_1 и x_n. Одну точку будем считать молнией единичной длины. Молния $(x_1, \ldots, x_n)$ называется неприводимой, если не существует молнии, соединяющей x_1 с x_n и имеющей меньшую длину. Точки неприводимой молнии попарно различны. Молния $(x_1, \ldots, x_n)$ называется замкнутой, если $n \geqslant 3$, $x_i \neq x_{i+1}$, $i = 1, \ldots, n-1$, $x_n = x_1$ и n нечетно.

В [3] рассматривается случай, когда Q — компакт в R^2, φ_1, φ_2 — проекции на оси координат. Получено необходимое и достаточное условие равенства $C(Q) = AC(T)$. Доказательство проводится так, что оно почти дословно переносится на случай произвольных компактов с заменой проекций непрерывными отображениями. Этот результат с учетом принятых здесь определений можно сформулировать следующим образом.

Если Q, T — компакты и φ_1, φ_2 непрерывны, то для выполнения равенства $C(Q) = AC(T)$ необходимо и достаточно выполнение условий:

a) в Q нет замкнутых молний;

b) длины неприводимых молний равномерно ограничены.

Именно условия a) и b), как показано в [3], равносильны условию того же равенства, полученному в [2] в случае метрических компактов. Мы не приводим условие из [2], т. к. оно здесь не используется. Из результатов [2] и [3] следует, что выполнение условий a) и b) необходимо и достаточно для равенства $B(Q) = AB(T)$, когда Q, T — просто множества. Отсюда, в свою очередь, вытекает, что это равенство равносильно равенству $C(Q) = AC(T)$, если Q, T — компакты и φ_1, φ_2 непрерывны. Указанная равносильность будет распространена ниже на случай нормальных топологических

пространств, если φ_1, φ_2 помимо непрерывности обладают некоторым свойством, близким к замкнутости, которым заведомо обладают замкнутые отображения.

Связь между свойствами оператора A на $B(T)$ и оператора A на $C(T)$ обобщается и в других направлениях. Пусть выполняется условие:

c) Q, T — компакты, φ_1, φ_2 непрерывны, и верно условие b).

Тогда если для непрерывной f найдется ограниченная функция, представляющая f, то найдется и непрерывная функция, представляющая f, причем существует оптимальное представление f в классе непрерывных функций, которое одновременно является оптимальным представлением в классе ограниченных функций.

Пусть $\operatorname{Ker} A$ — ядро A как оператора на $B(T)$. Возьмем в $B(Q)$ замкнутое подпространство X, содержащееся в $AB(T)$. Обозначим через Y его полный прообраз. Определим на фактор-пространстве $Y/\operatorname{Ker} A$ оператор A_X, полагая его значение на классе $g+\operatorname{Ker} A$ равным Ag, $g\in Y$. Тогда A_X — линейный ограниченный оператор, отображающий взаимно однозначно B-пространство на B-пространство. Следовательно [4], существует ограниченный обратный оператор A_X^{-1}. Обозначим его норму через $\tau(X)$. Аналогичным образом введем $\tau(X)$, если здесь вместо $B(Q)$ и $B(T)$ взять $C(Q)$ и $C(T)$ и рассматривать A как оператор на $C(T)$. При тех или иных предположениях будет получена оценка или точное значение $\tau(X)$. В частности, будет доказано, что при выполнении условий a) и b) имеет место равенство $\tau(B(Q))=N/2$. Здесь и в дальнейшем N обозначает наибольшую длину неприводимых молний. Если выполняются условия a) и c), то $\tau(C(Q))=N/2$ независимо от того, считается ли A оператором на $C(T)$ или оператором на $B(T)$.

§ 2. Случай ограниченных функций

Две точки в Q назовем эквивалентными по R, если их можно соединить молнией. Насыщения множества $E\subset Q$ по R_1 и R_2 обозначим соответственно через $R_1(E)$ и $R_2(E)$. Следующая лемма очевидна.

Лемма 1. *Если E — класс по R, то $R_1(E)=R_2(E)=E$.*

Пусть X — подмножество в $B(Q)$. Будем говорить, что X обладает M-свойством, если существует неубывающая функция $M(n)$ натурального аргумента, удовлетворяющая условиям: 1) для каждого натурального n, любых попарно различных $x_1,\dots,x_n\in Q$ и любого набора чисел $a_1,\dots,a_n$, равных 1 или -1, найдется функция $f\in X$ такая, что $|f|\leqslant M(n)$ и $f(x_i)=a_i$, $i=1,\dots,n$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty} n^{-1}M(n)=0$.

Теорема 1. *Предположим, что X — замкнутое подпространство в $B(Q)$, обладающее M-свойством, и $M(n)$ — соответствующая функция натурального аргумента. Тогда для включения $X\subset AB(T)$ необходимо и достаточно выполнение условий* a), b). *Если условия* a), b) *выполняются, то*

$$N/(2M(N))\leqslant\tau(X)\leqslant N/2 \tag{1}$$

и, следовательно, $\tau(X)=N/2$ при $M(N)=1$; в частности, $\tau(B(Q))=N/2$.

Доказательство. Пусть $(x_1,\dots,x_n)$ — молния. Рассмотрим случай, когда чередование отношений в молнии начинается с R_1. Обозначим $y_1=\varphi_1(x_1)$, $y_2=\varphi_1(x_3)$, $y_3=\varphi_1(x_5),\dots$, $z_0=\varphi_2(x_1)$, $z_1=\varphi_2(x_2)$, $z_2=\varphi_2(x_4),\dots$ Пусть $f=Ag$, $g\in B(T)$. Положим $a=g_2(z_0)$. Тогда из $f=Ag$ последовательно получим $g_1(y_1)=f(x_1)-a$, $g_2(z_1)=f(x_2)-f(x_1)+a$ и, вообще,

$$\begin{aligned} g_1(y_k)&=f(x_{2k-1})-f(x_{2k-2})+\dots+f(x_1)-a,\\ g_2(z_k)&=f(x_{2k})-f(x_{2k-1})+\dots-f(x_1)+a. \end{aligned} \tag{2}$$

Если молния замкнутая, то n нечетно и $z_{(n-1)/2}=z_0$. Тогда из (2) следует

$$f(x_1)-f(x_2)+\dots-f(x_{n-1})=0. \tag{3}$$

Равенство (3) получается и при другом чередовании отношений в замкнутой молнии.

Допустим, что в Q имеются замкнутые молнии, $(x_1, \ldots, x_n)$ — замкнутая молния минимальной длины. Тогда $x_1, \ldots, x_{n-1}$ попарно различны. Если $X \subset AB(T)$, то (3) приводит к противоречию при $f \in X$, $f(x_k) = (-1)^k$, $k = 1, \ldots, n-1$. Поэтому верно условие а). Предположим, что $X \subset AB(T)$, но в Q существуют неприводимые молнии сколь угодно большой длины. Пусть $(x_1, \ldots, x_n)$ — неприводимая молния, в которой для определенности чередование отношений начинается с R_1. Возьмем $f \in X$ так, чтобы $|f| \leqslant M(n)$ и $f(x_k) = (-1)^k$, $k = 1, \ldots, n$. Для любого прообраза функции f получим из (2): $g_2(z_{n/2}) = n + a$ при четном n, $g_1(y_{(n+1)/2}) = -n - a$ при нечетном n. Кроме того, $g_2(z_0) = a$. Так как $\max\{|a|, |n+a|\} \geqslant n/2$, то $|g| \geqslant n/2$. Поскольку g — любой прообраз функции f, то $|g + \operatorname{Ker} A| \geqslant n/2$. Отсюда и из $|f| \leqslant M(n)$ следует, что $\tau(X) \geqslant n/(2M(n))$. Так как $\lim\limits_{n\to\infty} n^{-1}M(n) = 0$, то предположение о существовании неприводимых молний сколь угодно большой длины противоречит ограниченности A_X^{-1}. Необходимость условий а) и b) доказана. Доказано также левое неравенство (1).

Перейдем к доказательству достаточности и второго неравенства (1). Пусть условия а), b) выполняются. Тогда из известных результатов, изложенных во введении, следует $B(Q) = AB(T)$. Поэтому $X \subset AB(T)$. В силу леммы 1 функцию g, представляющую данную f, можно строить отдельно для каждого класса E по R на $\varphi_1(E) \cup \varphi_2(E)$ независимо от других классов. Пусть $N(E)$ — наибольшая длина неприводимых молний в E. Рассмотрим случай, когда $N(E)$ нечетно: $N(E) = 2p + 1$. Возьмем в E неприводимую молнию $(x_{-p}, \ldots, x_{-1}, x_0, x_1, \ldots, x_p)$ длины $2p + 1$. Положим $g_i(\varphi_i(x_0)) = (1/2) f(x_0)$, $i = 1, 2$. Если E состоит из одной точки, то для этого E функция g построена. Если E содержит больше одной точки, то для каждой точки $x \in E$, отличной от x_0, возьмем неприводимую молнию $(x_0, x_1', \ldots, x_n')$, соединяющую x_0 и $x = x_n'$. Допустим для определенности, что $x_0 R_1 x_1'$. Положим $g_2(\varphi_2(x_1')) = f(x_1') - f(x_0)/2$, $g_1(\varphi_1(x_2')) = f(x_2') - f(x_1') + f(x_0)/2$ и т. д., по существу повторяя выкладки, приведшие к (2). Функции g_1, g_2 определены корректно, потому что неприводимая молния, соединяющая x_0, x, единственна, иначе в E нашлась бы замкнутая молния. В полученных равенствах правая часть с наибольшим числом членов имеет вид $f(x_n') - f(x_{n-1}') + \ldots \pm f(x_0)/2$. Поэтому $|g_i(\varphi_i(x))| \leqslant (n + 1/2)|f|$, $i = 1, 2$. Далее, $n \leqslant p$, иначе или молния от x_{-p} до x_n', или молния от x_p до x_n' будет неприводимой и будет иметь длину, большую $2p + 1$. Тогда $n + 1/2 \leqslant N(E)/2$ и $|g(\cdot)| \leqslant (1/2) N(E) |f|$ для всех точек из $\varphi_1(E) \cup \varphi_2(E)$.

Пусть $N(E)$ четно: $N(E) = 2p$. Возьмем в E неприводимую молнию $(x_{-p}, \ldots, x_{-1}, x_1, \ldots, x_p)$ длины $2p$. Произвольную точку $x \in E$, отличную от x_1, соединим неприводимой молнией $(x_1, x_2', \ldots, x_n')$ с x_1, $x_n' = x$. Допустим для определенности, что $x_{-1} R_1 x_1$ и $x_1 R_1 x_2'$. Положим $g_1(\varphi_1(x_1)) = 0$, $g_2(\varphi_2(x_1)) = f(x_1)$, $g_2(\varphi_2(x_2')) = f(x_2')$, $g_1(\varphi_1(x_3')) = f(x_3') - f(x_2')$ и т. д., чтобы выполнялось $f = Ag$. Правая часть в этих равенствах с наибольшим числом членов будет иметь вид $f(x_n') - f(x_{n-1}') + \ldots \pm f(x_2')$. Следовательно, верны неравенства $|g_i(\varphi_i(x))| \leqslant (n-1)|f|$, $i = 1, 2$. Далее, $n - 1 \leqslant p$, иначе неприводимая молния от x_p до x_n' будет иметь длину, большую $2p$. При других сочетаниях отношений в молниях значения g определяются аналогично. В любом случае $|g(\cdot)| \leqslant (1/2) N(E) |f|$ для точек из $\varphi_1(E) \cup \varphi_2(E)$. Объединяя результаты построения g по всем классам E, получим $f = Ag$ и $|g| \leqslant (1/2) N |f|$. Отсюда следует правое неравенство (1). К тому же мы еще раз доказали равенство $B(Q) = AB(T)$.

Следствие 1. *Если $AB(T)$ содержит подпространство, замкнутое в $B(Q)$ и обладающее М-свойством, то $B(Q) = AB(T)$.*

Таким подпространством может служить, напр., $C(Q)$, если Q — вполне регулярное топологическое пространство.

Сделаем несколько замечаний в связи с проведенным доказательством.

1) При доказательстве второго неравенства (1) для оператора A по существу построен правый обратный оператор с нормой $N/2$, который оптимален по норме, а именно, не существует правого обратного оператора с меньшей нормой.

2) Условие a) без предположения b) необходимо и достаточно для представления всех функций на Q, ограниченных и неограниченных, в виде $f = g_1 \circ \varphi_1 + g_2 \circ \varphi_2$. Это вытекает из построения g в доказательстве теоремы. Может случиться, что ограниченная функция f с необходимостью представляется неограниченной g.

3) При выводе формул (2) условия a) и b) не использовались.

В классе E можно зафиксировать одну точку x_1, а остальные соединять с ней любыми молниями. Пусть g — функция на T, возможно, неограниченная, и $f = g_1 \circ \varphi_1 + g_2 \circ \varphi_2$. Если указать значение g_1 в точке $\varphi_1(x_1)$ или значение g_2 в точке $\varphi_2(x_1)$, то остальные значения g_1, g_2 соответственно на $\varphi_1(E)$, $\varphi_2(E)$ восстанавливаются по f однозначно в силу (2) или аналогичных равенств при другом чередовании отношений. В частности, если $f = 0$, то g_1 на $\varphi_1(E)$ и g_2 на $\varphi_2(E)$ постоянны, и сумма постоянных равна нулю. Следовательно, ядро оператора A состоит из функций g таких и только таких, что для каждого класса E по R функции g_1 и g_2 постоянны на $\varphi_1(E)$ и $\varphi_2(E)$, а сумма постоянных равна нулю. Это верно, даже если A продолжить на неограниченные функции.

Теорема 2. *Для каждой функции $f \in AB(T)$ существует оптимальное представление.*

Доказательство. Пусть $f = A\hat{g}$, $\hat{g} \in B(T)$. В силу замечания 3) все остальные представления $f = Ag$ таковы, что

$$g_1(\varphi_1(x)) = \hat{g}_1(\varphi_1(x)) + c, \quad g_2(\varphi_2(x)) = \hat{g}_2(\varphi_2(x)) - c,$$

где на каждом классе E по R c — произвольная постоянная. Очевидно, что норма сужения g на $\varphi_1(E) \cup \varphi_2(E)$ непрерывно зависит от c и стремится к ∞ при $c \to \infty$. Следовательно, для каждого E существует c, при котором норма указанного сужения достигает минимума. Отсюда следует существование оптимального представления f, т. к. как минимизацию g можно проводить для каждого класса E в силу леммы 1 отдельно. Теорема доказана.

Пространство $B(Q)$ является сопряженным к $l_1(Q)$. Поэтому на $B(Q)$ можно определить слабую $l_1(Q)$-топологию, которую мы будем называть l_1-топологией.

Теорема 3. *Пусть выполняется условие* b). *Тогда $AB(T)$ состоит из тех и только тех ограниченных функций f, которые для каждой замкнутой молнии $(x_1, \ldots, x_n)$ удовлетворяют равенству* (3). *$AB(T)$ есть l_1-замкнутое подпространство в $B(Q)$ и $\tau(AB(T)) \leqslant N - 1/2$.*

Доказательство. Равенство (3) для $f = AB(T)$ установлено в доказательстве теоремы 1. Предположим, что ограниченная функция f удовлетворяет (3) для всех замкнутых молний. Докажем, что $f \in AB(T)$. Возьмем произвольный класс E по R и отметим в нем некоторую точку x_0. Положим $g_1(\varphi_1(x_0)) = g_2(\varphi_2(x_0)) = (1/2) f(x_0)$. Если $x \in E$ и $x \neq x_0$, то соединим x_0 с x неприводимой молнией $(x_0, x_1', \ldots, x_m')$. Дальнейшие выкладки аналогичны тем, которые делались при построении g в доказательстве теоремы 1 для нечетного $N(E)$. Но на этот раз неприводимая молния, соединяющая x_0 с x, вообще говоря, не единственная. Нетрудно проверить, что определение g остается корректным благодаря выполнению (3) для всех замкнутых молний. Следует изменить оценку длины молнии. Теперь $m \leqslant N(E) - 1$. Получим $f = Ag$ и $|g| \leqslant (N - 1/2)|f|$. Следовательно, $f \in AB(T)$. Левые части равенств (3) являются значениями на f линейных непрерывных функционалов, которые можно отождествить с элементами из $l_1(Q)$ частного вида. По доказанному $AB(T)$ есть множество ограниченных функций, на которых эти функционалы аннулируются. Отсюда следует замкнутость $AB(T)$ в l_1-топологии. Кроме

того, из последнего неравенства вытекает $\tau(AB(T)) \leqslant N-1/2$. Теорема доказана.

Следствие 2. *Если выполняется условие* b), *то для любой функции* $f \in B(Q)$ *существует наилучшее приближение функциями из* $AB(T)$.

Доказательство. Пусть $d = \inf|f - Ag|$ по $g \in B(T)$. По теореме Алаоглу [4] замкнутые шары пространства $B(Q)$ с центром f и радиусом $d + 1/n$, $n = 1, 2, \ldots$, компактны в l_1-топологии. Тогда их пересечения с $AB(T)$, которое является l_1-замкнутым, образуют убывающую последовательность множеств, компактных в l_1-топологии. Поэтому они имеют общую точку, которая и будет наилучшим приближением для f. Доказанное следствие обобщает теорему 4 из [5], где предположение о существовании креста приводит к $N \leqslant 4$ и, следовательно, к выполнению условия b).

§ 3. Случай непрерывных функций

Введем еще два отношения эквивалентности. Из леммы 1 следует, что Q_i разбивается на непересекающиеся множества, каждое из которых имеет вид $\varphi_i(E)$, где E — класс по R, $i = 1, 2$. Обозначим через r_i отношение, которое определяет указанное разбиение.

Теорема 4. *Если выполняется условие* c), *то графики отношений* R, r_1, r_2 *замкнуты соответственно в* Q^2, Q_1^2, Q_2^2.

Доказательство. Случай $N = 1$ тривиален. Предположим, что $N > 1$. Пусть n — натуральное число, причем $2 \leqslant n \leqslant N$. Рассмотрим молнии длины n как точки компакта Q^n. Множество таких молний, в которых чередование отношений начинается с R_1, обозначим через A_{n1}. Так как φ_1, φ_2 непрерывны, то A_{n1} замкнуто и, следовательно, компактно. Каждой точке $(x_1, \ldots, x_n) \in A_{n1}$ поставим в соответствие пару $(x_1, x_n) \in Q^2$, а множество этих пар обозначим через B_{n1}. Тогда B_{n1} замкнуто как проекция компакта A_{n1} на произведение первого и последнего множителей произведения Q^n. Аналогично определим B_{n2}, когда чередование отношений начинается с R_2. График отношения R есть объединение замкнутых множеств B_{ni} по $i = 1, 2$ и $n = 2, \ldots, N$. Поэтому замкнут и сам график. Отображение, которое каждой точке $(x, y) \in Q^2$ ставит в соответствие $(\varphi_i(x), \varphi_i(y)) \in Q_i^2$, непрерывно и преобразует график отношения R в график отношения r_i, $i = 1, 2$. Так как первый график компактен, то график отношения r_i замкнут.

Следствие 3. *Пусть выполняется условие* c). *Тогда отношения* R, r_1, r_2 *замкнуты. Фактор-пространства* Q/R, Q_1/r_1, Q_2/r_2 *хаусдорфовы. Каждый класс эквивалентности по* R, r_1, r_2 *обладает фундаментальной системой окрестностей, насыщенных соответственно по* R, r_1, r_2 [1].

В отличие от [1], здесь подразумеваются открытые окрестности. Утверждение о системе окрестностей остается справедливым ввиду доказательства в [1] для замкнутых отношений эквивалентности.

Пусть $\psi: Q \to Q/R$, $\psi_i: Q_i \to Q_i/r_i$ — канонические отображения, $i = 1, 2$. Определим отображение $\hat{\varphi}_i: Q/R \to Q_i/r_i$ формулой $\hat{\varphi}_i(E) = \varphi_i(E)$.

Теорема 5. *Если выполняется условие* c), *то* $\hat{\varphi}_i$ — *сюръективный гомеоморфизм*, $i = 1, 2$.

Доказательство. Сюръективность $\hat{\varphi}_i$ очевидна. Непрерывность следует из компактности Q и равенства $\hat{\varphi}_i \circ \psi = \psi_i \circ \varphi_i$, в котором остальные отображения непрерывны. Тогда $\hat{\varphi}_i$ — гомеоморфизм в силу компактности Q/R.

Теорема 6. *Если выполняется условие* c) *и* Q *представляет собой один класс по* R, *то из непрерывности* Ag *следует непрерывность* g.

Доказательство. При $N = 1$ утверждение очевидно. Пусть $N > 1$. Так как φ_i — непрерывное отображение компакта на компакт, то функция g_i непрерывна, если непрерывна функция $h_i = g_i \circ \varphi_i$, $i = 1, 2$. Докажем непрерывность h_1, предполагая непрерывность $f = Ag$. Тогда будет непрерывной и $h_2 = f - h_1$.

Допустим, что в некоторой точке $x_1 \in Q$ функция h_1 разрывна. Тогда при некотором $\varepsilon > 0$ в любой окрестности V точки x_1 найдется точка x такая, что $|h_1(x) - h_1(x_1)| > \varepsilon$. Соединим x_1 и x неприводимой молнией $(x_1, \ldots, x_n)_V$, $x_n = x$. Индекс V указывает на зависимость молнии от выбора окрестности. Можно считать, что эти молнии имеют одинаковую длину. Действительно, если для каждого n от 2 до N найдется окрестность точки x_1, никакую точку x которой при условии $|h_1(x) - h_1(x_1)| > \varepsilon$ нельзя соединить с x_1 неприводимой молнией длины n, то никакую точку пересечения этих окрестностей с тем же условием нельзя соединить молнией с x_1. По аналогичным соображениям будем считать, что чередование R_1 и R_2 в выбранных молниях одинаково. Упорядочим окрестности по включению. Тогда $\{(x_1, \ldots, x_n)_V\}$ — обобщенная последовательность в компакте Q^n. Следовательно, она имеет обобщенную предельную точку $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$. Очевидно, что $x_1^0 = x_n^0 = x_1$ и $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ — молния, где отношения чередуются, как в молниях последовательности. Пусть для определенности R_1 первое в молниях и n нечетно. Обозначим $a = h_2(x_1)$. Учитывая $x_n = x$, $x_n^0 = x_1$, из (2) получим

$$h_1(x) = f(x_n) - f(x_{n-1}) + \ldots + f(x_1) - a,$$

$$h_1(x_1) = f(x_n^0) - f(x_{n-1}^0) + \ldots + f(x_1^0) - a.$$

Так как f непрерывна, то значения $h_1(x)$ и $h_1(x_1)$ могут быть сколь угодно близкими при подходящем выборе $(x_1, \ldots, x_n)_V$, что противоречит неравенству $|h_1(x) - h_1(x_1)| > \varepsilon$. Теорема доказана.

Лемма 2. *Предположим, что выполняется условие* c). *Если* $f \in AC(T)$ *и* $f = A\hat{g}$ — *оптимальное представление* f *в классе ограниченных функций, то для любого* $\varepsilon > 0$ *найдется функция* $g \in C(T)$ *такая, что* $f = Ag$ *и* $|g| \leqslant |\hat{g}| + \varepsilon$.

Доказательство. Заметим, что $\hat{g}$ существует по теореме 2. Пусть $f = Ag_0$, где $g_0 \in C(T)$. Возьмем класс E по R. Если $x \in E$, то $g_i(\varphi_i(x)) = g_{0i}(\varphi_i(x)) + (-1)^i c$, $i = 1, 2$, где c — постоянная, зависящая от выбора E: $c = c(E)$. При $x \in E$ имеем $|g_{0i}(\varphi_i(x)) + (-1)^i c| \leqslant |\hat{g}|$. Тогда в некоторой окрестности класса E будет $|g_{0i}(\varphi_i(x)) + (-1)^i c| \leqslant |\hat{g}| + \varepsilon$, где c остается тем же. По следствию теоремы 4 такую окрестность можно выбрать насыщенной по R. Пусть $U(E)$ — образ этой окрестности в Q/R. Так как компактное пространство нормально, то найдется окрестность $V(E)$ класса E как точки в Q/R такая, что $\overline{V}(E) \subset U(E)$. Окрестности $V(E)$ всех E покрывают Q/R. Выделим конечную совокупность классов $E_1, \ldots, E_n$, окрестности которых $V_1 = V(E_1), \ldots, V_n = V(E_n)$ покрывают Q/R. По теореме Урысона для каждого $i = 1, \ldots, n$ существует вещественная непрерывная на Q/R функция β_i такая, что $\beta_i(E) \geqslant 0$ для всех E, $\beta_i(E) \neq 0$ при $E \in \overline{V}_i$, $\beta_i(E) = 0$ при $E \notin U(E_i)$. Положим $\alpha_k(E) = \beta_k(E) : \sum_{i=1}^{n} \beta_i(E)$, $k = 1, \ldots, n$. Функции α_k непрерывны на Q/R, неотрицательны и $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k(E) = 1$ для всех E.

Используя обозначения, введенные перед теоремой 5, рассмотрим композиции $\alpha_k^i = \alpha_k \circ \hat{\varphi}_i^{-1} \circ \psi_i$, $i = 1, 2$; $k = 1, \ldots, n$. По теореме 5 функции α_k^i непрерывны на Q_i. Ясно, что $\alpha_k^i(\varphi_i(x)) = \alpha_k(\psi(x))$ и, следовательно, $\alpha_k^1(\varphi_1(x)) = \alpha_k^2(\varphi_2(x))$ для всех $x \in Q$. Обозначим $c_1 = c(E_1), \ldots, c_n = c(E_n)$. Определим на T непрерывную функцию g по формулам

$$g_i(\varphi_i(x)) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^i(\varphi_i(x))(g_{0i}(\varphi_i(x)) + (-1)^i c_k), \quad x \in Q, \ i = 1, 2. \tag{4}$$

На классах E по R функции $\alpha_k^i(\varphi_i(x))$ постоянны, а их сумма по k равна 1. Поэтому $Ag = Ag_0 = f$. Для каждого x в сумме (4) выделим те значения k, для которых $\alpha_k(\varphi_i(x)) \neq 0$. Для таких k $|g_{0i}(\varphi_i(x)) + (-1)^i c_k| \leqslant |\hat{g}| + \varepsilon$. Поскольку α_k^i неотрицательны, а их сумма по k равна 1, то из (4) вытекает, что $|g| \leqslant |\hat{g}| + \varepsilon$. Лемма доказана.

Следствие 4. *Если выполняется условие* c), *то* $AC(T)$ *замкнуто в* $C(Q)$.

Доказательство. Если $f \in AC(T)$, то для ее оптимального представления $f = A\hat{g}$ в классе ограниченных функций $|\hat{g}| \leqslant (N - 1/2)|f|$ по теореме 3. По доказанной лемме найдется непрерывный прообраз g функции f такой, что $|g| \leqslant N|f|$. Так как A отображает B-пространство $C(T)$ в B-пространство $C(Q)$ и N не зависит от f, то из общей теории операторов [4] следует замкнутость $AC(T)$.

Теорема 7. *Если выполняется условие* c), *то непрерывная на* Q *функция* f, *имеющая прообраз в* $B(T)$, *имеет и непрерывный прообраз.*

Доказательство. Пусть $f = Ag$, $f \in C(Q)$, $g \in B(T)$. Зададим $\varepsilon > 0$ и возьмем произвольный класс E по R. По следствию теоремы 4 E замкнут. Если в теореме 6 заменить Q на E, то из нее следует, что сужения функций g_1 и g_2 соответственно на $\varphi_1(E)$ и $\varphi_2(E)$ непрерывны. По теореме Урысона о непрерывном продолжении существуют функции $g_1(y, E)$ и $g_2(z, E)$, непрерывные соответственно на Q_1 и Q_2 как функции от y и z и такие, что $g_i(\varphi_i(x), E) = g_i(\varphi_i(x))$ при $x \in E$, $i = 1, 2$. В Q найдется окрестность класса E, насыщенная по R, для точек x которой выполняется неравенство

$$|g_1(\varphi_1(x), E) + g_2(\varphi_2(x), E) - f(x)| < \varepsilon. \tag{5}$$

Пусть $U(E)$ — образ этой окрестности в Q/R, $V(E)$ — другая окрестность для E как точки в Q/R, содержащаяся вместе с замыканием в $U(E)$. Выделим конечную совокупность $E_1, \ldots, E_n$ точек в Q/R и построим функции α_k, α_k^i в точности так же, как в доказательстве леммы 2. Определим на T непрерывную функцию g_0 формулами

$$g_{0i}(\varphi_i(x)) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^i(\varphi_i(x))\, g_i(\varphi_i(x), E_k), \quad i = 1, 2.$$

Для каждого k от 1 до n из (5) следует

$$\left|\sum_{i=1}^{2} \alpha_k^i(\varphi_i(x))\, g_i(\varphi_i(x), E_k) - \alpha_k(\psi(x)) f(x)\right| \leqslant \varepsilon \alpha_k(\psi(x)).$$

Отсюда по неравенству треугольника получим $|g_{01}(\varphi_1(x)) + g_{02}(\varphi_2(x)) - f(x)| \leqslant \varepsilon$ для всех x. По-другому, $|Ag_0 - f| \leqslant \varepsilon$. Так как $AC(T)$ замкнуто, $g_0 \in C(T)$ и ε произвольно, то $f \in AC(T)$. Теорема доказана.

Теорема 8. *Если выполняется условие* c), *то* $AC(T)$ *состоит из тех и только тех непрерывных функций* f, *которые для каждой замкнутой молнии* $(x_1, \ldots, x_n)$ *удовлетворяют равенству* (3).

Эта теорема непосредственно следует из теорем 3 и 7.

Лемма 3. *Пусть* $D(0, 1)$, $D(c, 1)$, $D(0, 1+\varepsilon)$ — *замкнутые круги на комплексной плоскости, где* $\varepsilon > 0$, *а в скобках указаны центры и радиусы кругов. Положим* $d = c$, *если* $|c| \leqslant \sqrt{2\varepsilon + \varepsilon^2}$, *и* $d = c|c|^{-1}\sqrt{2\varepsilon + \varepsilon^2}$, *если* $|c| > \sqrt{2\varepsilon + \varepsilon^2}$. *Тогда* $(D(c, 1) \cap D(0, 1+\varepsilon)) - d \subset D(0, 1)$.

Доказательство элементарно, и мы его опустим, отметив только, что $\sqrt{2\varepsilon + \varepsilon^2}$ — длина половины хорды круга $D(0, 1+\varepsilon)$, касающейся $D(0, 1)$.

Функцию из $AC(T)$ можно рассматривать и как элемент пространства $AB(T)$. В связи с этим представление $f = Ag$ назовем B-оптимальным, если $g \in B(T)$ и g имеет наименьшую норму среди ограниченных функций, представляющих f. Представление $f = Ag$ назовем C-оптимальным, если $g \in C(T)$

и g имеет наименьшую норму среди непрерывных функций, представляющих f.

Теорема 9. *Пусть выполняется условие* c). *Тогда для каждой функции из* $AC(T)$ *существует C-оптимальное представление, которое является также B-оптимальным.*

Доказательство. Пусть $f \in AC(T)$ и $f = A\hat{g}$ есть B-оптимальное представление, которое существует по теореме 2. Построим в $C(T)$ по индукции фундаментальную последовательность $\{g^n\}$ функций, представляющих f, норма которых стремится к $|\hat{g}|$. Не ограничивая общности, можно предполагать, что $|\hat{g}| = 1$. По лемме 2 найдется непрерывная на T функция g^1 такая, что $f = Ag^1$ и $|g^1| \leqslant 1 + 1/4$. Допустим, что уже построена непрерывная функция g^n такая, что $f = Ag^n$ и $|g^n| \leqslant 1 + 4^{-n}$. Если E — класс по R, то при $x \in E$ имеем

$$g_1^n(\varphi_1(x)) = \hat{g}_1(\varphi_1(x)) + c, \quad g_2^n(\varphi_2(x)) = \hat{g}_2(\varphi_2(x)) - c,$$

где c — постоянная, зависящая от n и E: $c = c(n, E)$. Следовательно, $g_1^n(\varphi_1(E)) \subset D(c, 1) \cap D(0, 1 + 4^{-n})$. Возьмем d, определенное в лемме 3, полагая $\varepsilon = 4^{-n}$. Тогда $g_1^n(\varphi_1(E)) - d \subset D(0, 1)$. Ясно, что $g_2^n(\varphi_2(E)) + d \subset D(0, 1)$. Так как $\varepsilon < 1$, то $\sqrt{2\varepsilon + \varepsilon^2} \leqslant \sqrt{3\varepsilon}$. Поэтому $|d| \leqslant \sqrt{3} \cdot 2^{-n}$. Число d зависит от n и E: $d = d(n, E)$. В Q найдется насыщенная по R окрестность класса E, в которой при фиксированном d выполняется $|g_i^n(\varphi_i(x)) + (-1)^i d| \leqslant 1 + 4^{-n-1}$, $i = 1, 2$. Пусть $U(E)$ — образ этой окрестности в Q/R. Начиная с этого места, повторим часть доказательства леммы 2, заменяя ε на 4^{-n-1}, c_k на $d_k = d(n, E_k)$ и учитывая $|\hat{g}| = 1$. Определим непрерывную функцию g^{n+1} равенствами $g_i^{n+1} = g_i^n + (-1)^i \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^i d_k$, $i = 1, 2$. Тогда $Ag^{n+1} = f$ и $|g^{n+1}| \leqslant 1 + 4^{-n-1}$. Кроме того, $|g^{n+1} - g^n| \leqslant \max_k |d_k| \leqslant \sqrt{3} \cdot 2^{-n}$. Поэтому последовательность $\{g^n\}$ равномерно сходится, а ее предел g удовлетворяет условиям $Ag = f$, $|g| \leqslant |\hat{g}|$. На самом деле, $|g| = |\hat{g}|$ в силу B-оптимальности g. Теорема доказана.

Следствие 5. *Если* Q, T — *компакты*, φ_1, φ_2 *непрерывны, то верны утверждения, получающиеся из формулировки теоремы* 1 *и из неравенства в теореме* 3 *при замене* $B(Q)$ *на* $C(Q)$ *и* $B(T)$ *на* $C(T)$.

Обобщим теорему об эквивалентности равенств $B(Q) = AB(T)$ и $C(Q) = AC(T)$ на случай нормальных топологических пространств. Отображение φ топологического пространства X в топологическое пространство Y назовем квазизамкнутым, если образ $\varphi(F)$ каждого замкнутого множества $F \subset X$ принадлежит алгебре, порожденной замкнутыми множествами в Y.

Теорема 10. *Предположим, что* Q, Q_1, Q_2 — *нормальные топологические пространства и отображения* φ_1, φ_2 *непрерывны и квазизамкнуты. Тогда если* $B(Q) = AB(T)$, *то* $C(Q) = AC(T)$.

Доказательство. Воспользуемся следующей теоремой об изоморфизме [4]: если S — нормальное топологическое пространство, то между $C^*(S)$ и $\mathrm{rba}(S)$ существует изометрический изоморфизм, при котором соответственные элементы $x^* \in C^*(S)$ и $\mu \in \mathrm{rba}(S)$ удовлетворяют равенству

$$x^* f = \int_S f(s)\mu(ds), \quad f \in C(S).$$

Через $\mathrm{rba}(S)$ обозначено пространство регулярных ограниченных аддитивных функций множества, определенных на алгебре, порожденной замкнутыми множествами пространства S. Нормой $|\mu|$ является полная вариация функции μ. Обозначим через Σ, Σ_1, Σ_2 алгебры множеств, порожденные соответственно в Q, Q_1, Q_2 замкнутыми множествами. Если $E \in \Sigma_i$, то $\varphi_i^{-1}(E) \in \Sigma$

в силу непрерывности φ_i, $i=1, 2$. Для произвольной функции $\mu \in \mathrm{rba}(Q)$ определим на Σ_i функцию λ_i по формуле $\lambda_i(E)=\mu(\varphi_i^{-1}(E))$. Тогда $\lambda_i \in \mathrm{rba}(Q_i)$, причем если $g \in C(T)$ и $f=g_1 \circ \varphi_1 + g_2 \circ \varphi_2$, то

$$\int_Q f(x)\mu(dx)=\int_{Q_1} g_1(y)\lambda_1(dy)+\int_{Q_2} g_2(z)\lambda_2(dz). \tag{6}$$

Доопределим λ_1 на Σ_2, полагая значения λ_1 равными нулю на множествах из Σ_2. Аналогично доопределим λ_2 на Σ_1. Если $E_1 \in \Sigma_1$, $E_2 \in \Sigma_2$, то положим $\lambda_i(E_1 \cup E_2)=\lambda_i(E_1)+\lambda_i(E_2)$, $i=1, 2$, и $\lambda=\lambda_1+\lambda_2$. Тогда $\lambda \in \mathrm{rba}(T)$ и $|\lambda|=|\lambda_1|+|\lambda_2|$. Равенство (6) перепишем в виде $\int_Q f(x)\mu(dx)=\int_T g(t)\lambda(dt)$. Если отождествить линейные непрерывные функционалы на $C(Q)$ и $C(T)$ с функциями множеств, которые им соответствуют по теореме об изоморфизме, то последнее равенство означает, что $\lambda=A^*\mu$. Оператор A отображает $C(T)$ на все $C(Q)$ тогда и только тогда, когда существует такое $K>0$, не зависящее от μ, что $|A^*\mu| \geqslant K|\mu|$ для всех $\mu \in \mathrm{rba}(Q)$ или, по-другому, $\inf\limits_{|\mu|=1}|\lambda|>0$.

Достаточно рассмотреть вещественные μ. Зададим $\varepsilon>0$. Предположим, что $\inf\limits_{|\mu|=1}|\lambda|=0$. Тогда для некоторой μ с нормой $|\mu|=1$ верно $|\lambda_i(E)|<\varepsilon$ при любом $E \in \Sigma_i$, $i=1, 2$. В дальнейшем без особых оговорок все множества в Q, Q_1, Q_2 берутся соответственно из Σ, Σ_1, Σ_2 или принадлежат этим алгебрам по свойствам φ_1, φ_2. Из определения полной вариации и из $|\mu|=1$ следует, что в Q найдутся взаимно дополнительные множества P, S такие, что $\mu(P) \geqslant 0$, $\mu(S) \leqslant 0$ и $\mu(P)+|\mu(S)|>1-\varepsilon$. Кроме того,

$$P_0 \subset P \Rightarrow \mu(P_0)>-\varepsilon/2, \quad S_0 \subset S \Rightarrow \mu(S_0)<\varepsilon/2. \tag{7}$$

Действительно, если $\mu(P_0) \leqslant -\varepsilon/2$, то $\mu(P \setminus P_0)+|\mu(P_0)|+|\mu(S)|>1$, что противоречит $|\mu|=1$. Вторая часть (7) доказывается аналогично. Пусть $F \subset P$ — замкнутое множество. Имеем

$$\lambda_1(\varphi_1(F))=\mu(R_1(F))=\mu(F)+\mu(R_1(F) \cap (P \setminus F))+\mu(R_1(F) \cap S).$$

Если в (7) за P_0 принять $R_1(F) \cap (P \setminus F)$ и учесть $|\lambda_1(\varphi_1(F))|<\varepsilon$, то из последнего равенства следует

$$-\mu(R_1(F) \cap S)>\mu(F)-3\varepsilon/2. \tag{8}$$

Аналогично, если $F \subset S$ — замкнутое множество, то

$$\mu(R_2(F) \cap P)>-\mu(F)-3\varepsilon/2. \tag{9}$$

Будем считать, что $\mu(P) \geqslant |\mu(S)|$, в противном случае заменим μ на $-\mu$, P на S и S на P. Из $\mu(P)+|\mu(S)|>1-\varepsilon$ следует $\mu(P)>1/2-\varepsilon/2$. Определим по индукции последовательность замкнутых множеств $\{F_n\}$ в Q. В силу регулярности μ найдется замкнутое $F_1 \subset P$ такое, что $\mu(F_1)>1/2-\varepsilon/2$. Пусть найдены замкнутые множества $F_1, \ldots, F_n$ такие, что $F_k \subset P$ при нечетных k и $F_k \subset S$ при четных k, $k=1, \ldots, n$. Используя (8), (9) и регулярность μ, найдем замкнутое множество $F_{n+1} \subset R_1(F_n) \cap S$ для нечетного n и $F_{n+1} \subset R_2(F_n) \cap P$ для четного n, удовлетворяющее неравенству $|\mu(F_{n+1})|>|\mu(F_n)|-3\varepsilon/2$. Если ε достаточно мало, то $|\mu(F_n)|>0$ и, следовательно, $F_n \neq \varnothing$ для сколь угодно больших n. Пусть F_n — одно из этих непустых множеств. Предположим для определенности, что n четно. Возьмем произвольно $x_1 \in F_n$. По определению F_n существует $x_2 \in F_{n-1}$, для которого верно $x_1 R_1 x_2$. В свою очередь, $x_2 R_2 x_3$ для некоторой точки $x_3 \in F_{n-2}$ и т. д., пока не будет получена точка $x_n \in F_1$. В образовавшейся молнии $(x_1, \ldots, x_n)$ точки с соседними номерами различны, т. к. $P \cap S=\varnothing$. По предположению теоремы $B(Q)=AB(T)$. Поэтому в Q нет замкнутых молний. Тогда молния $(x_1, \ldots, x_n)$ неприводимая. Поскольку n сколь угодно велико, это противоречит необходимому условию b) равенства $B(Q)=AB(T)$. Теорема доказана.

Обратное утверждение $C(Q)=AC(T)\Rightarrow B(Q)=AB(T)$ содержится в следствии 1 при более слабых предположениях.

Автор выражает глубокую благодарность С. Я. Хавинсону за постановку задачи и внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бурбаки Н. Общая топология. Основные структуры.— М.: Наука, 1968.—272 с.
2. Sternfeld Y. Uniformly separating families of functions // Israel J. Math.—1978.— V. 29.— P. 61—91.
3. Хавинсон С. Я. Представление функций двух переменных суммами $\varphi(x)+\psi(y)$ // Изв. вузов. Математика.—1985.— № 2.— С. 66—73.
4. Данфорд Н. и Шварц Дж. Т. Линейные операторы. Общая теория. Ч.1.— М.: Ин. лит., 1962.—895 с.
5. Хавинсон С Я. О представлении и приближении функций двух переменных линейными суперпозициями // Вопр. мат., мех. сплош. сред и применения мат. методов в стр-ве.— М., 1987.— С. 89—92.

г. Москва

Поступила
26.06.1989