УДК 517.983

А. П. СОЛДАТОВ

# СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ПЛОСКОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ В ОБЛАСТЯХ С КУСОЧНО-ГЛАДКОЙ ГРАНИЦЕЙ

**1. Введение.** Решение основных задач плоской теории упругости в областях с гладкой границей хорошо известно и изложено в монографии [1]. С помощью интегралов Радона—Стилтьеса интегральное уравнение Мусхелишвили для первой и второй краевой задачи в случае областей с углами изучено Л. Г. Магнарадзе [2].

Аналогичные задачи методом Карлемана исследовались М. И. Цандековым [3]. Значительное число работ посвящено задачам плоской теории упругости в угловых областях специального вида [4—9]. Отметим также работы [10, 11] (более полную библиографию см. в [12, 13]).

В данной статье предлагается прямой подход к решению этих задач в рамках так называемых $\Delta$-аналитических функций, которые по отношению к системе уравнений Ламе играют ту же роль, что и аналитические функции по отношению к уравнению Лапласа. Для простоты все рассмотрения ведутся для смешанной задачи в криволинейной «луночке».

Именно пусть $D$ — конечная односвязная область на комплексной плоскости $z=x+iy$, ограниченная двумя гладкими дугами $\Gamma_1$, $\Gamma_2$ с концами в точках $\tau_1$, $\tau_2$. Предполагается, что параметризации $\gamma_j:[0,\ 1]\to\Gamma_j$ этих дуг имеют производную, $H_{\mu_1}$-непрерывную по Гёльдеру на $[0,\ 1]$, и что внутренний угол $\theta_j$ области $D_j$ в точке $\tau_j$ удовлетворяет условию $0<\theta_j<2\pi$, $j=1,\ 2$, $0<\mu_1<1$.

Рассмотрим в области $D$ систему уравнений Ламе [14] для вектора смещений $u=(u_1,\ u_2)$

$$\begin{pmatrix} \bar\lambda+2\bar\mu & 0 \\ 0 & \bar\mu \end{pmatrix}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\begin{pmatrix} 0 & \bar\lambda+\bar\mu \\ \bar\lambda+\bar\mu & 0 \end{pmatrix}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+$$

$$+\begin{pmatrix} \bar\mu & 0 \\ 0 & \bar\lambda+2\bar\mu \end{pmatrix}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0, \qquad (1)$$

где $\bar\lambda$, $\bar\mu$ — положительные постоянные Ламе, характеризующие упругую среду. Черта поставлена во избежание путаницы, так как $\lambda$ и $\mu$ ниже используются для других целей. Введем тензор напряжения $\sigma$ —$(2\times 2)$-матрицу-функцию, элементы $\sigma_{xx}$, $\sigma_{yy}$, $\sigma_{xy}=\sigma_{yx}$ которой связаны с вектором смещения $u$ соотношениями Гука:

$$\sigma_{xx}=\bar\lambda\left(\frac{\partial u_1}{\partial x}+\frac{\partial u_2}{\partial y}\right)+2\bar\mu\frac{\partial u_1}{\partial x},$$

$$\sigma_{yy}=\bar\lambda\left(\frac{\partial u_1}{\partial x}+\frac{\partial u_2}{\partial y}\right)+2\bar\mu\frac{\partial u_2}{\partial y}, \qquad (2)$$

$$\sigma_{xy}=\sigma_{yx}=\bar\mu\left(\frac{\partial u_1}{\partial y}+\frac{\partial u_2}{\partial x}\right).$$

Смешанная задача заключается в отыскании регулярного в $D$ и непрерывного в $\bar D$ решения $u$ системы (1) по краевому условию

$$u|_{\Gamma_1}=\psi_1, \qquad \sigma n|_{\Gamma_2}=\frac{d\psi_2}{ds}, \qquad (3)$$

где $n=(n_1,\ n_2)$ — единичная внешняя нормаль, $\psi_1$, $\psi_2$ — заданные функции, причем $\psi_2$ дифференцируема внутри $\Gamma_2$ и $d\psi_2/ds$ означает производную по касательному направлению. Предполагается, что частные производные

$\partial u/\partial x$, $\partial u/\partial y$ непрерывно продолжимы во внутренние точки граничной дуги $\Gamma_2$.

Следуя [15], запишем (1) в виде эллиптической системы I порядка для вектора градиента $\left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right)$. Приводя последнюю к нормальной форме, приходим к представлению общего решения системы (1):

$$u = \operatorname{Re}\alpha\Phi, \qquad \alpha = \begin{pmatrix} i & 1 \\ -\bar{\varkappa}-1 & i \end{pmatrix}, \tag{4}$$

где $i$ — мнимая единица, $\bar{\varkappa} = (\bar{\lambda}+3\bar{\mu})/(\bar{\lambda}+\bar{\mu})$ и 2-вектор-функция $\Phi$ есть решение эллиптической системы I порядка

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\bar{z}} = \Delta\frac{\partial\Phi}{\partial z}, \quad \Delta = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ i & 0 \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Решения системы (5) ниже называем $\Delta$-аналитическими функциями. Основные факты теории аналитических функций (разложения в степенные ряды, формула Коши и т. д.) допускают аналоги для $\Delta$-аналитических функций [16—18]. В частности, роль интегралов типа Коши для них играет

$$(I\varphi)(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}(t-z)_{\Delta}^{-1}dt_{\Delta}\varphi(t), \ z \notin \Gamma, \tag{6}$$

где здесь и ниже принято обозначение $z_{\Delta} = z + \bar{z}_{\Delta}$ ($z$ рассматривается как скалярная ($2\times2$)-матрица), $dt_{\Delta} = dt + \Delta\overline{dt}$. Матричное ядро $(t-z)_{\Delta}^{-1}dt_{\Delta}$ действует на 2-вектор $\varphi$ обычным образом. Существует взаимно однозначное соответствие между $\Delta$-аналитическими и аналитическими 2-вектор-функциями $\Phi$ и $\Psi$ соответственно, осуществляемое формулой

$$\Phi = \Psi + \bar{z}\Delta\frac{\partial\Psi}{\partial z}, \tag{7}$$

где учтено, что $\Delta^2=0$. При подстановке (7) в (4) получим известное представление Колосова—Мусхелишвили [14].

Нормальная компонента $\sigma n$ совпадает с производной по касательному направлению $\partial v/\partial s$ от некоторой вспомогательной 2-вектор-функции $v$, градиент которой с учетом (2) связан с градиентом $u$ линейным преобразованием. В соединении с (4) для этой функции получаем представление

$$v = \operatorname{Re}\beta\Phi + \xi, \quad \beta = \bar{\mu}\begin{pmatrix} \bar{\varkappa}+1 & -2i \\ i(\bar{\varkappa}+3) & 2 \end{pmatrix}, \tag{8}$$

где $\xi = (\xi_1, \xi_2) \in R^2$ — произвольный постоянный действительный 2-вектор. На основании (4), (7) и равенства $\sigma n = \frac{\partial v}{\partial s}$ задача (1), (3) редуцируется к задаче Римана — Гильберта для $\Delta$-аналитической функции $\Phi$:

$$\operatorname{Re}\alpha\Phi|_{\Gamma_1} = \psi_1, \qquad \operatorname{Re}\beta\Phi|_{\Gamma_2} = \psi_2. \tag{9}$$

**2. Задача Римана—Гильберта.** Обозначим через $H_{\mu,\lambda}(D)$, $0<\mu<1$, $\lambda\in R$, пространство всех $\Delta$-аналитических в $D$ функций $\Phi$ вида

$$\Phi(z) = |z-\tau_1|^{1-\mu}|z-\tau_2|^{1-\mu}\Phi_*(z),$$

где $\Phi_*$ $H_\mu$-непрерывна в $\bar{D}$ и $\Phi_*(\tau_1) = \Phi_*(\tau_2) = 0$. Относительно нормы $|\Phi| = |\Phi_*|_{H_\mu}$ это пространство банахово. Аналогичным образом введем пространство $H_{\mu,\lambda}(\Gamma)$ 2-вектор-функций $\varphi$ на границе $\Gamma = \Gamma_1\cup\Gamma_2$. Его подпространство действительных функций обозначаем $(H_{\mu,\lambda})_R$. Задача Римана—Гильберта заключается в отыскании $\Phi\in H_{\mu,\lambda}(D)$ по краевому условию

$$\operatorname{Re} a\Phi|_\Gamma = \Psi, \qquad (10)$$

где $a$ — кусочно-непрерывная $(2\times 2)$-матрица-функция. Более точно, $a\circ\gamma_i \in H_{\mu_1}[0,\ 1]$, $j=1,\ 2$, для некоторого $\mu<\mu_1<1$. Кроме того, $\det a(t)\neq 0$ всюду на $\Gamma_j$, $j=1,\ 2$.

Известные оценки интегралов типа Коши [1, 19] переносятся на интеграл (6). Именно при $-1<\lambda<0$ оператор $I$ ограничен, $H_{\mu,\lambda}(\Gamma)\to H_{\mu,\lambda}(D)$ и имеют место формулы Сохоцкого — Племеля

$$2(I\varphi)^\pm = \pm\varphi + K\varphi, \qquad (11)$$

где $K$ — отвечающий (6) сингулярный оператор Коши. С помощью параметризации $\gamma$ от $K$ можем перейти к $(2\times 2)$-операторной матрице $K_\gamma$, действующей в пространстве $H_{\mu,\lambda}$ вектор-функций на $(0,1)$ по формуле

$$(K\varphi)\circ\gamma_i = \sum_{j=1}^{2}(K_\gamma)_{ij}(\varphi\circ\gamma_j), \qquad i=1,\ 2.$$

Условимся считать, что ориентация дуги $\Gamma_j$, определяемая $\gamma_j$, положительна по отношению к $D$ (т. е. оставляет ее слева). Положим $(Q\gamma)_{2j-1}(t) = \gamma_j(t)$, $(Q\gamma)_{2j}(t) = \gamma_j(1-t)$, $0<t\leqslant 1/2$, $P_j = \{k, (Q\gamma)_k(0) = \tau_j\}$, $j=1,\ 2$. Пары $P_j$ упорядочим (обозначение: $P_j = \overline{k,\ r}$), считая, что поворот от дуги $(Q\gamma)_k[0,\ 1/2]$ к дуге $(Q\gamma)_r[0,\ 1/2]$ вокруг их общего конца $\tau_j$ осуществляется внутри $D$ по часовой стрелке. Положим еще $q_k = (Q\gamma)_k'(0)$.

Аналогично [20] убеждаемся, что $K_\gamma$ принадлежит алгебре $\mathscr{B}$ в семействе $H_{\mu,\lambda}$, $-1<\lambda<0$, введенной в [21] для $L_p$-случая. Функциональными коэффициентами $K_\gamma$ служат $\pm 1$, а концевой символ $K_\gamma$ ($(4\times 4)$-матрица, элементы которой являются $(2\times 2)$-матрицами-функциями, аналитическими в полосе $(-1<\operatorname{Re}\zeta<0)$) определяется указанными в п. 5 работы [20] формулами, в которых следует положить $a\equiv 0$, $b\equiv 1$ и скалярную функцию $q_k^\zeta$ заменить на $(2\times 2)$-матрицу-функцию

$$q_{k\Delta}^\zeta = q_k^\zeta\left(1+\zeta\,\frac{\overline{q_k}}{q_k}\,\Delta\right). \qquad (12)$$

Аналогичное заключение справедливо и для оператора $\overline{K_\gamma}\varphi = \overline{K_\gamma\overline{\varphi}}$, где черта справа означает комплексное сопряжение, при этом функциональные коэффициенты $\overline{K_\gamma}$ равны $\mp 1$, а $(\overline{K_\gamma})^\wedge(\zeta) = \overline{(\hat{K}_\gamma)(\overline{\zeta})}$.

Задачу (10) будем рассматривать в пространстве $H_{\mu,\lambda}$, $-1/2\leqslant\lambda<0$, понимая под ее нётеровостью и индексом соответственно нётеровость и индекс $R$-линейного оператора $H_{\mu,\lambda}(D)\to(H_{\mu,\lambda})_R(\Gamma)$, определяемого краевым условием. При подстановке $\Phi = I\varphi$, где $\varphi\in(H_{\mu,\lambda})_R$, в (10) получим, согласно (11), сингулярное интегральное уравнение $\operatorname{Re} a(1+K)\varphi = 2\psi$ или

$$N\varphi = 2\psi, \quad 2N = a(1+K_\gamma) + \overline{a}(1+\overline{K_\gamma}), \qquad (13)$$

где 2-вектор $(\varphi\circ\gamma_1,\ \varphi\circ\gamma_2)$ обозначен снова $\varphi$, аналогичный смысл имеет $\psi$ и под $a$ понимается диагональная $(2\times 2)$-матрица с элементами $a_j = a\circ\gamma_j$ вдоль диагонали. Уравнение (13) рассматривается в пространстве $(H_{\mu,\lambda})_R$. Его нётеровость (над полем $R$) равносильна нётеровости $N$ в пространстве $H_{\mu,\lambda}$ (над полем $C$), причем соответствующие индексы совпадают.

Согласно сказанному выше, оператор $N\in\mathscr{B}$ имеет функциональными коэффициентами пару $a,\ \overline{a}$. В силу условия на $a$ он принадлежит к нормальному типу. Поэтому вопрос нётеровости и индекса $N$ решается результатами [20, 21]:

Теорема 1. *Оператор $N$ нётеров в $H_{\mu,\lambda}$, $-1<\lambda<0$, тогда и только тогда, когда*

$$\det\hat{N}(\zeta)\neq 0,\ \operatorname{Re}\zeta = \lambda. \qquad (14)$$

*При выполнении этого условия*

$$\operatorname{ind} N = -\frac{1}{2\pi i}\ln\det(a\bar{a}^{-1})|_\Gamma - \frac{1}{2\pi i}\det\hat{N}(\zeta)|_{\zeta=\lambda-i\infty}^{\lambda+i\infty}. \tag{15}$$

*Если условие (14) выполнено для всех* $\lambda_0<\lambda<\lambda_1$ *и* $N\varphi=0$ *для некоторого* $\varphi\in H_{\mu,\tilde{\lambda}}$, $\lambda_0<\tilde{\lambda}<\lambda_1$, *то* $\varphi\in\bigcap_{\lambda<\lambda_1}H_{\mu,\lambda}$.

Упростим определитель концевого символа $\hat{N}$. Согласно (13), $2\hat{N}=\hat{a}(1+K_\gamma)\hat{}+\hat{\bar{a}}(1+\bar{K}_\gamma)\hat{}$ и, как отмечено выше, $\bar{K}_\gamma\hat{}=(\hat{K}_\gamma)^-$, где черта справа определяется равенством $\bar{x}(\zeta)=\overline{x(\bar{\zeta})}$. Матрица $\hat{a}$ диагональна: $\hat{a}=(\hat{a}_k\delta_{kr})$, где

$$\hat{a}_{2i-1}=a[\gamma_i(0)],\quad \hat{a}_{2i}=a[\gamma_i(1)]. \tag{16}$$

Поэтому $(4\times4)$-матрица $\hat{N}$ блочно-диагональна относительно разбиения на пары $P_1$ и $P_2$, т. е. $\hat{N}_{kr}=\hat{N}_{rk}=0$ при $k\in P_1$, $r\in P_2$. Удобно $(2\times2)$-матрицу $\{\hat{N}_{kr},\ k,\ r\in P_j\}$ обозначить $\hat{N}_{P_j}$.

Введем аналитические на $\zeta$-плоскости числовые $(2\times2)$-матрицы-функции

$$\begin{gathered} x_j(\zeta)=e^{2i\theta_j\zeta}-p_j^{-1}(\zeta)\ (\hat{\bar{a}}_k^{-1}\hat{a}_k)^{-1}\bar{p}_j(\zeta)\ (\hat{\bar{a}}_r^{-1}\hat{a}_r),\\ p_j(\zeta)=1+\zeta(\bar{q}_k/q_k-\bar{q}_r/q_r)\Delta,\ P_j=\overline{k,\ r}. \end{gathered} \tag{17}$$

Лемма. *Имеет место равенство*

$$\det\hat{N}_{P_j}(\zeta)=y_j(\zeta)[\det x_j(\zeta)](e^{2i\theta_j\zeta}-1)^{-2}, \tag{18}$$

*где* $y_j(\zeta)$ *аналитична в полосе* $-1/2\leqslant\operatorname{Re}\zeta<0$, *имеет предел при* $\operatorname{Im}\zeta\to\infty$, *всюду отлична от нуля и* $\ln y_j|_{-\infty}^{\infty}=0$.

Доказательство. Положим для краткости $u_j(\zeta)=q_{k\Delta}^{\zeta}\bar{q}_{r\Delta}^{-\zeta}$, $P_j=\overline{k,\ r}$. В силу (12), (17) и определения порядка элементов пары $P_j$

$$u_j(\zeta)=e^{i\theta_j\zeta}|q_k|^{\zeta}|q_r|^{-\zeta}p_j(\zeta). \tag{19}$$

Учитывая описание концевого символа $\hat{K}_\gamma$, имеем

$$(z-1)\left(\frac{1+K_\gamma}{2}\right)^{\wedge}_{P_j}=\begin{pmatrix} z & -u_j\\ zu_j^{-1} & -1\end{pmatrix}, \tag{20}$$

где положено $z(\zeta)=e^{2\pi i\zeta}$ и запись $(2\times2)$-матриц в виде таблицы определяется порядком элементов пары $P_j$.

Применяя к (20) операцию сопряжения $\bar{x}(\zeta)=\overline{x(\bar{\zeta})}$, получим

$$(z-1)\left(\frac{1+\bar{K}_\gamma}{2}\right)^{\wedge}_{P_j}=\begin{pmatrix} -1 & z\bar{u}_j\\ -\bar{u}_j^{-1} & z\end{pmatrix}. \tag{21}$$

Легко проверить, что

$$\begin{gathered}\begin{pmatrix} z & -u_j\\ zu_j^{-1} & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & u_j\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & z\bar{u}_j\\ zu_j^{-1} & -1\end{pmatrix},\\ \begin{pmatrix} -1 & z\bar{u}_j\\ -\bar{u}_j^{-1} & z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0\\ \bar{u}_j^{-1} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & z\bar{u}_j\\ zu_j^{-1} & -1\end{pmatrix}.\end{gathered} \tag{22}$$

Подставляя (20), (21) в выражение для $\hat{N}$ и учитывая (22), получим

$$2(z-1)\hat{N}_{P_j}=\begin{pmatrix} \hat{\bar{a}}_k & \hat{a}_k u_j\\ \hat{\bar{a}}_r\bar{u}_j^{-1} & \hat{a}_r\end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & z\bar{u}_j\\ zu_j^{-1} & -1\end{pmatrix}. \tag{23}$$

Если числовые $(2\times 2)$-матрицы $a$, $b$, $c$, $d$ обратимы, то

$$\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix} = \det a \det(d - ca^{-1}b).$$

Применяя это к (23), с учетом (17), (19) и вида $\Delta$ в (5) приходим к равенству (18), в котором

$$y_j(\zeta) = \mathrm{const}\left[\frac{(e^{2i(2\pi-\theta_j)\zeta}-1)}{(e^{2\pi i\zeta}-1)^2}(e^{2i\theta_j\zeta}-1)\right]^2.$$

Функция $y_j$ всюду отлична от нуля в полосе $-1/2\leqslant \operatorname{Re}\zeta<0$ и непрерывно зависит от $\theta_j$. Поскольку при $\theta_j=\pi$ она равна const, ее индекс Коши равен нулю, и это завершает доказательство леммы.

Для применения теоремы 1 к задаче (10) установим предварительно аналог представления Н. И. Мусхелишвили [1] для $\Delta$-аналитических функций.

Теорема 2. *Пусть* $-1/2\leqslant\lambda<0$. *Тогда каждая $\Delta$-аналитическая в $D$ функция $\Phi\in H_{\mu,\lambda}$ однозначно представима в виде*

$$\Phi = I\varphi + i\xi, \text{ где } \varphi\in (H_{\mu,\lambda})_R^{\prime}(\Gamma),\ \xi\in R^2. \tag{24}$$

Доказательство. Обозначим через $N_1$ оператор (13) для $a=1$, соответствующий задаче Дирихле. Согласно теореме 1 и лемме, оператор $N_1$ нётеров в $H_{\mu,\lambda}$, $-1/2\leqslant\lambda<0$, и его индекс равен 0. В частности, его ядро содержится в пересечении $\bigcap_{\lambda<0}H_{\mu,\lambda}$.

Пусть $N_2$ получается из $N_1$ заменой $K_\gamma$ на $-K_\gamma$. Оператор $N_2$ соответствует задаче Дирихле для внешности области $D$ (обозначим ее $D'$) и аналогично лемме показывается, что он обладает теми же свойствами, что и $N_1$.

Пусть $X_1$ — пространство решений $\Phi\in H_{\mu,\lambda}(D)$ задачи Дирихле с постоянной правой частью, т. е. $\operatorname{Re}\Phi|_\Gamma\in R^2$. Докажем, что $X_1$ состоит из постоянных функций.

Прежде всего заметим, что $X_1$ конечномерно и содержится в $\bigcap_{\lambda<0}H_{\mu,\lambda}$. В самом деле, если $\Phi\in X_1$, то $\Phi|_\Gamma=\xi+i\varphi$, $\xi\in R^2$, $\varphi\in(H_{\mu,\lambda})_R$ и по теореме Коши (для $\Delta$-аналитических функций) $(I\varphi)(z)=0$, $z\in D'$. Следовательно, $N_2\varphi=0$ и остается воспользоваться теоремой 1, примененной к $N_2$. В скалярном случае аналитических функций утверждение о $X_1$ отсюда получается непосредственно, так как вместе с $\Phi=\xi+i\varphi$ классу $X_1$ принадлежит и последовательность $\Phi_k(z)=[\Phi(z)-\xi]^{2k+1}$, $k=1, 2, \ldots$ Рассматриваемый векторный случай сводится к скалярному, в чем легко убедиться, расписывая систему (5) покомпонентно.

Совершенно аналогично доказывается, что класс $X_2$ функций $\Psi\in H_{\mu,\lambda}(D')$, ограниченных на $\infty$ и являющихся решением задачи Дирихле с постоянной правой частью, состоит из констант.

Покажем теперь, что оператор $N_1$ обратим. Поскольку он нётеров и $\operatorname{ind}N_1=0$, достаточно установить, что $N_1\varphi=0$ влечет $\varphi=0$. С этой целью положим

$$(I\varphi)(z) = \begin{cases}\Phi(z), & z\in D,\\ \Psi(z), & z\in D'.\end{cases}$$

Согласно (11), $2\Phi=\varphi+K\varphi$, $2\Psi=-\varphi+K\varphi$ на $\Gamma$. В частности, $\operatorname{Re}\Phi=0$ на $\Gamma$ и, значит, $\Phi=i\xi$, $\xi\in R^2$. Так как $\Phi-\Psi=\varphi$, то $\operatorname{Re}(i\Psi)=-\xi$ на $\Gamma$ и, значит, $i\Psi=\xi'$. Поскольку $\Psi(\infty)=0$, отсюда последовательно $\Psi=0$, $\Phi=0$ и $\varphi=0$.

Пусть $\Phi\in H_{\mu,\lambda}(D)$ и $\varphi\in(H_{\mu,\lambda})_R$ — решение уравнения $N\varphi=\tilde\varphi$ с правой частью $\tilde\varphi=(\operatorname{Re}\Phi)|_\Gamma$. Тогда $\Phi-I\varphi\in X_1$ и, следовательно, $\Phi=I\varphi+i\xi$. Если $I\varphi=i\xi$, то $N_1\varphi=0$, т. е. $\varphi=0$. Теорема доказана.

Обратимся к задаче Римана — Гильберта (10).

Теорема 3. *Задача (10) нётерова в классе* $H_{\mu,\lambda}$, $-1/2\leqslant\lambda<0$, *тогда и только тогда, когда*

$$\det x_j(\zeta)\neq 0,\ \operatorname{Re}\zeta=\lambda,\ j=1,\ 2. \tag{25}$$

*При выполнении этого условия ее индекс* $\varkappa$ *вычисляется по формуле*

$$\varkappa=-\frac{1}{2\pi i}\ln\det(a\bar a^{-1})|_\Gamma-\sum_{j=1}^{2}\frac{1}{2\pi i}\ln\left[\frac{\det x_j(\zeta)}{(e^{2i\theta_j\zeta}-1)^2}\right]_{\operatorname{Re}\zeta=\lambda}+2. \tag{26}$$

Доказательство. Согласно теореме 2, оператор $I$ нётеров $(H_{\mu,\lambda})_R\to H_{\mu,\lambda}(D)$ и индекс $\operatorname{ind} I=-2$. В силу (11), (13) композиция $I$ с оператором краевой задачи (10) дает оператор $N$, поэтому остается воспользоваться теоремой 1, леммой и известными свойствами нётеровых операторов.

Матрицы-функции (17) естественно называть концевыми символами задачи (10).

**3. Смешанная задача.** Результаты п. 2 применим к задаче (9), краевое условие которой получается из (10) для кусочно-постоянной матрицы функции $a$, равной $\alpha$ на $\Gamma_1$ и $\beta$ на $\Gamma_2$. В этом случае, как показывают прямые вычисления,

$$\det x_j(\zeta)=-4e^{2i\theta_j\zeta}\left[\sin^2\theta_j\zeta+\frac{\zeta^2}{\varkappa}\sin^2\theta_j-(\bar\varkappa+1)^2/4\bar\varkappa\right],\ j=1,\ 2. \tag{27}$$

Множитель в квадратных скобках этого выражения на прямой $\operatorname{Re}\zeta=0$ нигде в нуль не обращается и является четной функцией. С учетом теоремы Руше убеждаемся, что для $\lambda=-\varepsilon$, где $\varepsilon>0$ мало, каждое из двух слагаемых под знаком $\Sigma$ в (26) равно $+1$. Следовательно, в рассматриваемом случае индекс $\varkappa$ задачи (10) в классе $H_{\mu,-\varepsilon}$ равен нулю.

Обозначим через $H^{(1)}(D)$ класс функций, частные производные первого порядка которых принадлежат $H_{\tilde\mu,\tilde\lambda}$ при некоторых $0<\tilde\mu<1$ и $-1<\tilde\lambda<0$. Если $\Phi\in H_{\mu,-\varepsilon}$ — решение однородной задачи (9), то на основании теоремы об асимптотике [20], примененной к уравнению (13), заключаем, что $\Phi\in H^{(1)}$. Применяя теперь к решению $u=\operatorname{Re}\alpha\Phi\in H^{(1)}$ задачи (1), (3) известное доказательство единственности [1, 14], основанное на интегральном тождестве, заключаем, что $u=0$. Поскольку из равенств $\operatorname{Re}\alpha\eta=0$, $\operatorname{Re}\beta\eta=0$, где $\eta\in C^2$, следует $\eta=0$, то отсюда $\Phi=0$.

Таким образом, однородная задача (9) в классе $H_{\mu,-\varepsilon}$, где $\varepsilon>0$ достаточно мало, имеет только тривиальное решение. Поскольку, как отмечено выше, ее индекс в этом классе равен нулю, эта задача однозначно разрешима.

Заметим, что во втором условии (9) правая часть $\psi_2$ определена с точностью до аддитивного слагаемого $\xi\in R^2$.

Из определений $\alpha$, $\beta$ в (5), (8) видно, что для заданного $\xi$ существует единственный вектор $\eta\in C^2$, для которого $\operatorname{Re}\alpha\eta=0$, $\operatorname{Re}\beta\eta=\xi$. Поскольку добавление к $\Phi$ слагаемого $\eta$ не меняет решения $u$ в (4), постоянная $\xi$ не влияет на разрешимость задачи (9).

В общем случае, когда граница $\Gamma$ составлена из четного числа $m$ дуг, на которых поочередно заданы смешанные условия (9), индекс этой задачи равен $2-m$ и наличие констант $\xi$ используется для ее разрешимости так же, как и в случае гладкой границы [1].

Если функции $\psi_j$ в (9) принадлежат классу $H^{(1)}$ на $\Gamma_j$, то в силу упомянутой выше теоремы об асимптотике и решение $\Phi$ этой задачи принадлежит классу $H^{(1)}$.

Таким образом, установлена следующая

Теорема 4. *Пусть функции* $\psi_j\in H^{(1)}(\Gamma_j)$, $j=1,\ 2$. *Тогда задача* (1), (3) *однозначно разрешима в классе* $H^{(1)}(D)$.

Совершенно аналогично исследуется первая и вторая краевые задачи, определяемые соответственно первым и вторым краевым условием в (3), занятым на всей границе Г. В случае первой краевой задачи для определителей $\det x_j$ имеем выражения

$$\det x_j(\zeta) = -4e^{2i\theta_j\zeta}\left[\sin^2\theta_j\zeta - \frac{\zeta^2}{\varkappa^2}\sin^2\theta_j\right], \tag{28}$$

а в случае второй краевой задачи — выражения

$$\det x_j(\zeta) = -4e^{2i\theta_j\zeta}[\sin^2\theta_j\zeta - \zeta^2\sin^2\theta_j]. \tag{29}$$

*Для первой из этих задач теорема 4 сохраняется в той же формулировке, если на* $\psi$ *наложить условия согласования* $\psi_1(\tau_j) = \psi_2(\tau_j)$, $j = 1, 2$.

Относительно второй краевой задачи следует сделать поправку, аналогичную задаче Неймана для уравнения Лапласа. Именно *однородная задача имеет 3 линейно-независимых решения,* $v = (v_1, v_2)$, *описываемые равенствами*

$$v_1(x, y) = c_3y + c_1,\ v_2(x, y) = -c_3x + c_2,\ c_i \in R, \tag{30}$$

*а неоднородная задача разрешима тогда и только тогда, когда*

$$\int_\Gamma \frac{d\psi}{ds}\, v ds = 0$$

*для всех функций* $v$ *из* (30).

Рассмотрим общую смешанную задачу. Пусть $D$ — конечная область (вообще многосвязная), граница Г которой составлена из конечного числа гладких разомкнутых дуг $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_m$, которые попарно будут пересекаться лишь по своим концам. При этом дуги, являющиеся для $D$ разрезами, в этой нумерации встречаются дважды. Условия на гладкость дуг те же, что и выше. Относительно внутренних углов $\theta_j$ области $D$ в концах дуг предполагаем, что $0<\theta_j\leqslant 2\pi$. Все дуги разбиваются на два класса (один из них может быть пустым), и общая смешанная задача определяется краевыми условиями (3), заданными для дуг соответствующих классов.

*Теорема 4 справедлива и для общей смешанной задачи с соответствующими поправками, указанными выше для первой и второй краевых задач.*

Аналогичное утверждение имеет место и для бесконечной области, если решение $u(x, y)$ системы (1) подчинить условию $\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial u}{\partial y}\right| \leqslant \leqslant \mathrm{const}\,(|x| + |y|)^{-2}$ в окрестности $\infty$.

В заключение отметим, что выражения в квадратных скобках равенств (27)—(29) в точности совпадают с левыми частями трансцендентных уравнений, определяющих асимптотику напряжения соответствующих канонических задач в угле [12]. Это совпадение не является случайным, поскольку на основании теоремы из [20], примененной к уравнению (13), нули фукции $\det x_j(\zeta)$, $0<\mathrm{Re}\,\zeta<1$, определяют асимптотику решения $u$ задачи (1), (3) в окрестности угловых точек. (Относительно результатов в этом направлении см. литературу, указанную в [13, 23] и в обзоре [22].)

## Литература


1. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. М., 1968.
2. Магнарадзе Л. Г. // Тр. Тбил. мат. ин-та. 1938. Т. 4. С. 43—76.
3. Цандеков М. И. // Тр. Тбил. гос. ун-та. 1955. Т. 56. С. 207—224.
4. Уфлянд Я. С. Биполярные координаты в теории упругости. М.; Л., 1950.
5. Уфлянд Я. С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Л., 1967.
6. Белоносов С. М. Основные плоские статические задачи теории упругости для односвязных и двусвязных областей. Новосибирск, 1962.
7. Каландия А. И. Проблемы механики сплошной среды. К 70-летию акад. Н. И. Мусхелишвили. М., 1961.

8. Шерман Д. И. // Тр. междунар. симпозиума в Тбилиси. М., 1965.
9. Черепанов Г. П. Механика крупного разрушения. М., 1974.
10. Гончарова Г. В. // Изв. АН АзССР. Сер. физ.-тех. и мат. наук. 1972. № 1. С. 133—141.
11. Заргарян С. С. // Докл. АН АрмССР. 1976. Т. 13, № 5. С. 297—302.
12. Партон В. З., Перлин П. И. Интегральные уравнения теории упругости. М., 1977.
13. Морозов Н. Ф. Математические вопросы теории трещин. М., 1984.
14. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., 1966.
15. Бицадзе А. В. Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка. М., 1966.
16. Douglis A. // Comm. Pure and Appl. Math. 1953. Vol. 6. P. 259—289.
17. Боярский Б. В. // Ann. Polon. Math. 1966. Vol. 17, N 3. P. 281—320.
18. Gilbert R. P., Hile G. // Trans. Amer. Math. Soc. 1974. Vol. 195, N 468. P. 1—29.
19. Дудучава Р. В. // Мат. исслед. Кишинев, 1970. Т. 5, вып. 1. С. 56—76.
20. Солдатов А. П. // Дифференц. уравнения. 1986. Т. 22, № 1. С. 143—153.
21. Солдатов А. П. // Докл. АН СССР. 1985. Т. 282, № 6. С. 1312—1316.
22. Кондратьев В. А., Олейник О. А. // Успехи мат. наук. 1983. Т. 38, вып. 2. С. 3—76.
23. Мазья В. Г., Назаров С. А., Пламеневский Б. А. Асимптотика решений эллиптических краевых задач при сингулярных возмущениях области. Тбилиси, 1981.

*Владимирский государственный педагогический институт им. П. И. Лебедева-Полянского*

*Поступила в редакцию 3 июля 1986 г.*