И. В. Атласов, Работа двух параллельных устройств с учетом времени их замены,
Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика, 2016, выпуск 2, 49–79

УДК 519.21

РАБОТА ДВУХ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ УСТРОЙСТВ С УЧЕТОМ ВРЕМЕНИ ИХ ЗАМЕНЫ

Атласов И.В.
Воронежский институт МВД Российской Федерации, г. Воронеж

Поступила в редакцию 07.04.2016, после переработки 02.06.2016.

Тема статьи появилась в результате обобщения задачи из книги «Курс теории вероятностей» Гнеденко Б.В. Он рассматривал работу системы, состоящей из двух взаимозаменяемых устройств. Эти устройства работают в следующем порядке: сначала работает первое устройство, потом оно выходит из строя и ремонтируется, его заменяет второе устройство, потом и второе выходит из строя и также ремонтируется. Если время работы первого устройства меньше времени ремонта второго устройства, то в работу системы включается первое устройство. Если нет, то считаем, что система окончила работу и время работы системы равно времени работы первого и второго устройств. Если время работы второго устройства меньше времени ремонта первого устройства, то в работу системы включается первое устройство. В результате построена характеристическая функция времени работы системы. Используя эту характеристическую функцию было найдено математическое ожидание времени работы системы и предложены способы его увеличения. В моей работе рассматривается система, состоящая из двух элементов, работающих одновременно. Работа системы прерывается, когда в ремонте находятся оба элемента. Строится характеристическая функция для времени непрерывной работы системы. Рассматриваются рекомендации по увеличению математического ожидания.

Ключевые слова: время работы, характеристическая функция.

Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2016. № 2. С. 49–79.

Введение

Задача, рассматриваемая в работе, является обобщением задачи из книги «Курс теории вероятностей» Гнеденко Б.В. [1]. В ней устройства образовывали систему из двух устройств, работающих в следующем порядке: сначала первое, затем второе, снова первое и снова второе и так далее, причем следующее устройство следовало за предыдущим, если предыдущее успевали отремонтировать за время меньшее, чем время работы следующего устройства. Если это не удавалось, то работа системы прерывалась. В задаче считалось, что временем замены устройств можно пренебречь. В работе построена характеристическая функция времени работы системы, с использованием которой было найдено математическое ожидание времени работы системы и предложены способы его увеличения.

Далее эта задача была обобщена на произвольное число устройств в работе [5]. Показано, как при определенном выборе алгоритма подключения в систему устройств, можно построить характеристическую функцию времени работы системы и с ее помощью получить аналитический вид математического ожидания времени работы системы, зависящего нелинейно от количества участвующих в работе системы устройств.

Эти работы послужили толчком для рассмотрения функционирования системы, состоящей из двух элементов, работающих вместе. Это могут быть две камеры, следящие за чем-то, или снимающие футбольный матч. Имеется ввиду ситуация, когда должно функционировать хотя бы одно устройство и нельзя пренебречь временем замены устройств. Работа системы остановлена, если в ремонте находятся два устройства. Если более подробно, то работа системы происходит следующим образом: одновременно начинают работать два устройства, затем одно из них ломается, но во время ремонта одного не должно прекращать работать другое устройство. Ломаться первое может несколько раз, если в это время работает другое устройство. Когда ломается другое устройство, во время его ремонта должно работать первое устройство. Работа системы будем считать оконченной, если в этот момент времени сломалось одно из устройств и второе также находится в ремонте. Для однородных процессов удалось построить характеристическую функцию времени работы системы. Достаточно подробно рассмотрена характеристическая функция времени работы системы для частного случая, когда времена работы и ремонта системы распределены по экспоненциальному закону. Построить функцию распределения времени работы системы в общем виде технически сложно, зато удалось найти все слагаемые, входящие в эту функцию. Также, удалось найти математическое ожидание в явном виде. В результате получены рекомендации по увеличению среднего времени работы системы, которые являются не совсем очевидными.

1. Основные обозначения и связи между ними

Введем ряд обозначений. Пусть $j = 1, 2$ и $i = 1, 2, \ldots$. Будем считать, что перед первой работой j-го элемента система простаивала некоторое время τ_j^1 (это время будем называть временем первого ремонта j-го элемента). Вопрос о выборе этого времени рассмотрим немного позже. Обозначим символом θ_j^i время работы j-го элемента после i-го ремонта, символом τ_j^i время i-го ремонта j-го элемента. То есть времена работы и ремонта j-го элемента определяются последовательностью $\tau_j^1, \theta_j^1, \tau_j^2, \theta_j^2, \tau_j^3, \theta_j^3, \tau_j^4, \theta_j^4, \ldots$. Предположим, что все рассматриваемые случайные величины независимы. Это естественно предположить для различных $j = 1, 2$. Остальную независимость (время работы после ремонта и время ремонтов) можно считать естественной на некотором промежутке времени. Работа системы прерывается, когда в ремонте находятся оба элемента, и временем работы системы назовем время от начала работы системы до первого момента, когда оба прибора находятся в ремонте. Для $i \geqslant 1$ и $j = 1, 2$ обозначим $\sigma_j^i = \tau_j^i + \theta_j^i$.

Рассмотрим элементы теории восстановления. Для $j = 1, 2$ обозначим

$$\eta_j(t) \overset{def}{=} \max_{\sum\limits_{i=1}^{k} \sigma_j^i < t} k, \qquad \nu_j(t) \overset{def}{=} \min_{\sum\limits_{i=1}^{k} \sigma_j^i > t} k = \eta_j(t) + 1,$$

$$\gamma_j\left(t\right) \overset{def}{=} t - \sum_{i=1}^{\eta_j(t)} \sigma_j^i > 0, \qquad \chi_j\left(t\right) \overset{def}{=} \sum_{i=1}^{\nu_j(t)} \sigma_j^i - t > 0.$$

Обозначим через ζ_0 общее время работы системы. В дальнейшем нам понадобится ряд новых величин. Для $k = 1, 2, \ldots$ и $l, m = 1, 2$ обозначим

$$\Delta\zeta_k^{lm} \overset{def}{=} \zeta_0 - \zeta_k^{lm}.$$

Для $\sigma_1^1 < \sigma_2^1$ обозначим

$$\begin{array}{ll}
\zeta_1^{12} \overset{def}{=} \zeta_0 - \sigma_2^1, & \\
\zeta_2^{12} \overset{def}{=} \zeta_1^{12} - \chi_1\left(\Delta\zeta_1^{12}\right), & \zeta_3^{12} \overset{def}{=} \zeta_2^{12} - \chi_2\left(\Delta\zeta_2^{12}\right), \\
\zeta_4^{12} \overset{def}{=} \zeta_3^{12} - \chi_1\left(\Delta\zeta_3^{12}\right), & \zeta_5^{12} \overset{def}{=} \zeta_4^{12} - \chi_2\left(\Delta\zeta_4^{12}\right), \\
\ldots & \ldots \\
\zeta_{2n}^{12} \overset{def}{=} \zeta_{2n-1}^{12} - \chi_1\left(\Delta\zeta_{2n-1}^{12}\right), & \zeta_{2n+1}^{12} \overset{def}{=} \zeta_{2n}^{12} - \chi_2\left(\Delta\zeta_{2n}^{12}\right), \\
\ldots & \ldots .
\end{array}$$

Для $\sigma_1^1 > \sigma_2^1$ обозначим

$$\begin{array}{ll}
\zeta_1^{21} \overset{def}{=} \zeta_0 - \sigma_1^1, & \\
\zeta_2^{21} \overset{def}{=} \zeta_1^{21} - \chi_2\left(\Delta\zeta_1^{21}\right), & \zeta_3^{21} \overset{def}{=} \zeta_2^{21} - \chi_1\left(\Delta\zeta_2^{21}\right), \\
\zeta_4^{21} \overset{def}{=} \zeta_3^{21} - \chi_2\left(\Delta\zeta_3^{21}\right), & \zeta_5^{21} \overset{def}{=} \zeta_4^{12} - \chi_1\left(\Delta\zeta_4^{21}\right), \\
\ldots & \ldots \\
\zeta_{2n}^{21} \overset{def}{=} \zeta_{2n-1}^{21} - \chi_2\left(\Delta\zeta_{2n-1}^{21}\right), & \zeta_{2n+1}^{21} \overset{def}{=} \zeta_{2n}^{21} - \chi_1\left(\Delta\zeta_{2n}^{21}\right), \\
\ldots & \ldots .
\end{array}$$

Эти элементы для случая $\sigma_1^1 < \sigma_2^1$ рассмотрены на Рис. 1 и 2, причем Рис. 2 является продолжением Рис. 1.

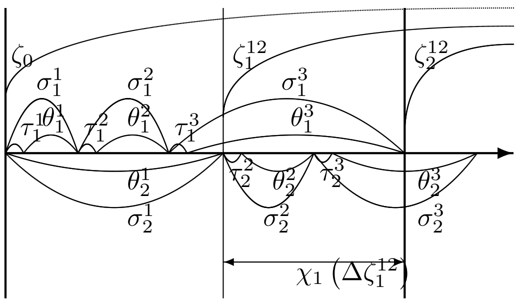

Рис. 1: Определение ζ_1^{12} при $\sigma_1^1 < \sigma_2^1$

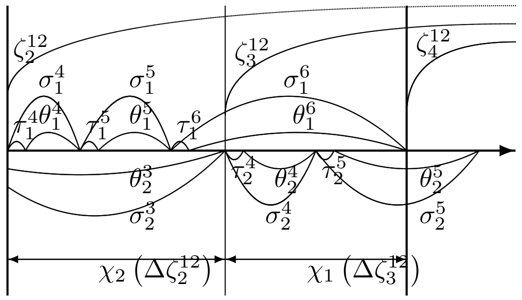

Рис. 2: Определение ζ_2^{12} при $\sigma_1^1 < \sigma_2^1$

2. Однородные процессы

Для произвольной случайной величины α символом F_α будем обозначать функцию распределения случайной величины α, то есть $F_\alpha(t) = P(\alpha < t)$. Далее, для произвольной функции $\varphi(x)$ символом $\overline{\varphi}(x)$ будем обозначать функцию $\overline{\varphi}(x) = 1 - \varphi(x)$.

Пусть $j = 1, 2$. Предположим, что процесс $\left\{\sigma_j^k\right\}_{k=1}^{\infty}$ нерешетчатый и однородный. Тот факт, что процесс $\left\{\sigma_j^k\right\}_{k=1}^{\infty}$ нерешетчатый (см. [2]) означает, что не существует такого положительного d, что для всех целых k справедливо равенство $P\left(\bigcup\limits_k \left\{\sigma_j^2 = kd\right\}\right) = 1$. Однородность процесса $\left\{\sigma_j^k\right\}_{k=1}^{\infty}$ (см. [2]) означает, что распределения всех случайных величин $\left\{\sigma_j^k\right\}_{k=2}^{\infty}$ совпадают, а функция распределения случайной величины σ_j^1 имеет вид

$$\overline{F}_{\sigma_j^1}(x) = \frac{1}{M\left(\sigma_j^2\right)} \int\limits_x^{\infty} \overline{F}_{\sigma_j^2}(t)\, dt. \tag{1}$$

Отсюда следует, что

$$dF_{\sigma_j^1}(x) = \frac{1}{M\left(\sigma_j^2\right)} d\overline{F}_{\sigma_j^2}(t)\, dt. \tag{2}$$

Для того чтобы добиться однородности процессов, предположим, что при $j = 1, 2$ функции распределения всех случайных величин $\left\{\theta_j^k\right\}_{k=2}^{\infty}$ совпадают и совпадают функции распределения всех случайных величин $\left\{\tau_j^k\right\}_{k=2}^{\infty}$ и, следовательно, совпадают функции распределения всех случайных величин

$$\left\{\sigma_j^k = \theta_j^k + \tau_j^k\right\}_{k=2}^{\infty}.$$

Лемма 1. *Справедливо равенство*

$$\overline{F}_{\sigma_j^2}(t) = \int\limits_t^{\infty} F_{\theta_j^2}(t-u)\, dF_{\tau_j^2}(u). \tag{3}$$

Доказательство. Рассмотрим известное равенство [2] для функции распределения суммы двух независимых случайных величин

$$
\begin{aligned}
F_{\sigma_j^2}(t) =& F_{\theta_j^2+\tau_j^2}(t) = \int_0^t F_{\theta_j^2}(t-u)\,dF_{\tau_j^2}(u),\\
\overline{F}_{\sigma_j^2}(t) =& 1 - \int_0^t F_{\theta_j^2}(t-u)\,dF_{\tau_j^2}(u) = F_{\sigma_j^2}(\infty) - \int_0^t F_{\theta_j^2}(t-u)\,dF_{\tau_j^2}(u) =\\
&= \int_0^\infty F_{\theta_j^2}(t-u)\,dF_{\tau_j^2}(u) - \int_0^t F_{\theta_j^2}(t-u)\,dF_{\tau_j^2}(u) =\\
&= \int_t^\infty F_{\theta_j^2}(t-u)\,dF_{\tau_j^2}(u).
\end{aligned}
$$

Откуда получаем утверждение леммы. □

Из этой леммы следует, что функция распределения случайной величины σ_j^1 должна быть равна

$$
\begin{aligned}
\overline{F}_{\sigma_j^1}(x) =& \frac{1}{M\left(\sigma_j^2\right)} \int_x^\infty \overline{F}_{\sigma_j^2}(t)\,dt = \\
&= \frac{1}{M\left(\theta_j^2\right) + M\left(\tau_j^2\right)} \int_x^\infty \left[\int_t^\infty F_{\theta_j^2}(t-u)\,dF_{\tau_j^2}(u)\right] dt.
\end{aligned} \tag{4}
$$

Известно (глава 9, параграф 3 в [2]), что для однородного процесса функции $\chi_j(t)$ и $\gamma_j(t)$ $(j = 1, 2)$ перестают зависеть от t (далее мы их будем обозначать через χ_j и γ_j, соответственно, если это не вызовет неопределенности) и для них выполнено условие

$$
P\left(\chi_j > v, \gamma_j > u\right) = \frac{1}{M\left(\sigma_j^2\right)} \int_{v+u}^\infty P\left(\sigma_j^2 > x\right) dx.
$$

Взяв $u = 0$, получим

$$
\overline{F}_{\chi_j}(v) = P\left(\chi_j > v\right) = \frac{1}{M\left(\sigma_j^2\right)} \int_v^\infty \overline{F}_{\sigma_j^2}(x)\,dx.
$$

Взяв дифференциал обеих частей равенства, получим

$$
dF_{\chi_j}(v) = \frac{1}{M\left(\sigma_j^2\right)} \overline{F}_{\sigma_j^2}(v)\,dv. \tag{5}
$$

2.1 Определение времени ремонта τ_j^1 для j-го устройства

В этом разделе зафиксируем $j = 1, 2$. Согласно (глава 9, параграф 4 в [2]), если функция распределения случайной величины σ_j^1 имеет вид

$$\overline{F}_{\sigma_j^1}(x) = \frac{1}{M\left(\sigma_j^2\right)} \int\limits_x^\infty \overline{F}_{\sigma_j^2}(t)\, dt,$$

то ее характеристическая функция имеет вид

$$\varphi_{\sigma_j^1}(s) = \frac{1 - \varphi_{\sigma_j^2}(s)}{sM\left(\sigma_j^2\right)} = \frac{1 - \varphi_{\tau_j^2}(s)\,\varphi_{\theta_j^2}(s)}{s\left(M\left(\tau_j^2\right) + M\left(\theta_j^2\right)\right)}.$$

Основная идея этого раздела состоит в том, чтобы подобрать время ремонта τ_j^1 устройства таким образом, чтобы функция распределения случайной величины θ_j^1 совпадала с функцией распределения случайной величины θ_j^2 и случайная величина $\sigma_j^1 = \tau_j^1 + \theta_j^2$ имела своей функцией распределения функцию $\frac{1}{M\left(\sigma_j^2\right)} \int\limits_x^\infty \overline{F}_{\sigma_j^2}(t)\, dt$.

Если это сделать не удается, будем брать $\tau_j^1 = 0$ и j-м устройством будем называть устройство с временем работы $\sigma_j^1 = \theta_j^1$, имеющим своей функцией распределения функцию $\frac{1}{M\left(\sigma_j^2\right)} \int\limits_x^\infty \overline{F}_{\sigma_j^2}(t)\, dt$, которое будем использовать только один раз. После поломки этого устройства на некоторое случайное время τ_j^2 с функцией распределения $F_{\tau_j^2}(t)$, моделируемое нами, работа j-го устройства прекращается. Затем и до конца работы всей системы будем использовать другое устройство с временем работы, имеющим своей функцией распределения функцию $F_{\theta_j^2}(t)$ и временем ремонта с функцией распределения $F_{\tau_j^2}(t)$.

Если существует ненулевое время ремонта τ_j^1 устройства такое, что случайная величина $\sigma_j^1 = \tau_j^1 + \theta_j^2$ задается своей функцией распределения $\frac{1}{M\left(\sigma_j^2\right)} \int\limits_x^\infty \overline{F}_{\sigma_j^2}(t)\, dt$, то должно выполняться равенство характеристических функций

$$\varphi_{\tau_j^1}(s)\,\varphi_{\theta_j^2}(s) = \varphi_{\sigma_j^1}(s) = \frac{1 - \varphi_{\sigma_j^2}(s)}{sM\left(\sigma_j^2\right)} = \frac{1 - \varphi_{\tau_j^2}(s)\,\varphi_{\theta_j^2}(s)}{s\left(M\left(\tau_j^2\right) + M\left(\theta_j^2\right)\right)}.$$

Откуда следует равенство

$$\varphi_{\tau_j^1}(s) = \frac{1 - \varphi_{\sigma_j^2}(s)}{sM\left(\sigma_j^2\right)\varphi_{\theta_j^2}(s)} = \frac{1 - \varphi_{\tau_j^2}(s)\,\varphi_{\theta_j^2}(s)}{s\left(M\left(\tau_j^2\right) + M\left(\theta_j^2\right)\right)\varphi_{\theta_j^2}(s)}. \tag{6}$$

То есть функция в правой части равенства должна быть характеристической. Чем этот вариант удобнее? Во-первых, в качестве j-го используется только одно устройство. Во-вторых, мы его подключаем через некоторое случайное время τ_j^2 с функцией распределения $F_{\tau_j^2}(t)$, моделируемое нами. Если для всех j удалось добиться, чтобы функция (6) была характеристической, то можно сначала запустить первое устройство (при условии, что моделируемые величины $\tau_1^2 > \tau_2^2$), затем, через время $\tau_1^2 - \tau_2^2$ – второе устройство, или сначала запустить второе устройство (при условии, что моделируемые величины $\tau_1^2 < \tau_2^2$), а затем, через время $\tau_2^2 - \tau_1^2$ – первое устройство.

Теорема 1. *Пусть законы распределения времени работы и ремонта устройства являются показательными законами распределения с плотностями вероятностей*

$$f_{\theta_j^2}(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \qquad f_{\tau_j^2}(x) = \mu e^{-\mu x},$$

соответственно. В этом случае функция $\varphi_{\tau_j^1}(s)$ является характеристической функцией и функция распределения случайной величины τ_j^1 имеет вид

$$F_{\tau_j^1}(t) = \frac{\mu}{\lambda+\mu} F_0(t) + \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\left(1 - e^{-\mu t}\right),$$

где

$$F_0(t) = \begin{cases} 1, & \text{при} \quad t \geqslant 0, \\ 0, & \text{при} \quad t < 0. \end{cases}$$

Доказательство. Имеем

$$\varphi_{\tau_j^1}(s) = \frac{1 - \varphi_{\tau_j^2}(s)\varphi_{\theta_j^2}(s)}{s\left(M\left(\tau_j^2\right) + M\left(\theta_j^2\right)\right)\varphi_{\theta_j^2}(s)} = \frac{1 - \frac{\lambda\mu}{(s+\lambda)(s+\mu)}}{s\left(\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu}\right)\frac{\lambda}{s+\lambda}} =$$

$$= \frac{\mu}{\lambda+\mu} * 1 + \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\frac{\mu}{s+\mu}.$$

Отсюда сразу следует утверждение теоремы. □

С другой стороны, если время работы θ_j^2 является суммой двух независимых случайных величин, распределенных по показательному закону распределения $1 - e^{-\lambda x}$, или $f_{\theta_j^2}(x) = \lambda^2 x e^{-\lambda x}$, то $\varphi_{\theta_j^2}(x) = \frac{\lambda^2}{(s+\lambda)^2}$ и

$$\varphi_{\tau_j^1}(s) = \frac{1 - \varphi_{\tau_j^2}(s)\varphi_{\theta_j^2}(s)}{s\left(M\left(\tau_j^2\right) + M\left(\theta_j^2\right)\right)\varphi_{\theta_j^2}(s)} = \frac{1 - \frac{\lambda^2\mu}{(s+\lambda)^2(s+\mu)}}{s\left(\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu}\right)\frac{\lambda^2}{(s+\lambda)^2}} =$$

$$= \frac{\mu}{\lambda(\lambda+\mu)}\frac{(s+\lambda)^2(s+\mu) - \lambda^2\mu}{s(s+\mu)} \underset{s\to\infty}{\to} \infty$$

и функция $\varphi_{\tau_j^1}(s)$ не будет характеристической. То есть, берем $\tau_j^1 = 0$ и выбираем устройство с временем работы, задаваемым функцией распределения $\frac{1}{M\left(\sigma_j^2\right)}\int\limits_x^\infty \overline{F}_{\sigma_j^2}(t)\,dt$.

2.2 Собственные случайные величины

Предположим, что все случайные величины τ_j^i и θ_j^i имеют конечные положительные математические ожидания и дисперсии. Заметим, что при выполнении условия $\sigma_1^1 < \sigma_2^1$, случайная величина $\sigma_2^1 - \sigma_1^1$ положительна и ее математическое ожидание также положительно. Аналогично, при выполнении условия $\sigma_1^1 > \sigma_2^1$, случайная величина $\sigma_1^1 - \sigma_2^1$ положительна и ее математическое ожидание также положительно. Очевидно, математические ожидания случайных величин σ_i^j для всевозможных i, j также положительны. Мы находимся в условиях теоремы [5], согласно которой

$$P\left(\sum_{k=1}^{n}\sigma_1^k < \sigma_2^1 - \sigma_1^1\right) \underset{n\to\infty}{\to} 0,\ \text{при } \sigma_2^1 - \sigma_1^1 > 0,$$
$$P\left(\sum_{k=1}^{n}\sigma_2^k < \sigma_1^1 - \sigma_2^1\right) \underset{n\to\infty}{\to} 0,\ \text{при } \sigma_1^1 - \sigma_2^1 > 0,$$

то есть первое устройство не может бесконечно ломаться на интервале $\left[0, \sigma_2^1 - \sigma_1^1\right]$ при условии $\sigma_2^1 - \sigma_1^1 > 0$, и второе устройство не может бесконечно ломаться на интервале $\left[0, \sigma_1^1 - \sigma_2^1\right]$ при условии $\sigma_1^1 - \sigma_2^1 > 0$. Далее нам понадобится более общее утверждение.

Рассмотрим теорему, которая доказывает, что сумма случайных величин, лежащая между двумя другими случайными величинами, не может с положительной вероятностью состоять из бесконечного числа одинаково распределенных случайных величин.

Теорема 2. *Пусть выполнены следующие условия:*

1. *случайные величины $\theta_i > 0$ независимы, одинаково распределены и имеют конечные положительные математические ожидания и дисперсии,*
2. *марковская случайная величина κ принимает натуральные значения,*
3. *для случайных величин $P(\eta_1 < \eta) = 1$,*
4. *все случайные величины θ_i, η и η_1 независимы в совокупности,*
5. *все случайные величины θ_i и κ независимы в совокупности.*

В этом случае справедливо утверждение

$$P\left(\eta_1 < \sum_{k=\kappa+1}^{\kappa+n}\theta_k < \eta\right) \underset{n\to\infty}{\to} 0.$$

Доказательство. Докажем более общее утверждение:

$$P\left(\sum_{k=\kappa+1}^{\kappa+n}\theta_k < \eta\right) \underset{n\to\infty}{\to} 0.$$

Заметим, что из независимости случайных величин θ_m и κ для всех $m \in N$ и совпадения функций распределения случайных величин θ_m для всех $m \in N$ вытекает

$$P\left(\theta_\kappa < t \middle| \kappa = m\right) = P\left(\theta_m < t \middle| \kappa = m\right) = P\left(\theta_m < t\right) = P\left(\theta_1 < t\right).$$

Обозначим символом $F_{\frac{1}{n}\sum\limits_{k=m+1}^{m+n}\theta_k}(x)$ функцию распределения случайной величины $\frac{1}{n}\sum\limits_{k=m+1}^{n+m}\theta_k$ и символом $F_{\frac{\eta}{n}}(x)$ функцию распределения случайной величины $\frac{\eta}{n}$. Обозначим

$$\begin{aligned} B &= \{(x_1, x_2) : 0 \le x_1 \le x_2\}, \\ B_> &= \{(x_1, x_2) : |x_1 - M(\theta_1)| > \varepsilon\}, \\ B_< &= \{(x_1, x_2) : |x_1 - M(\theta_1)| < \varepsilon\}. \end{aligned}$$

Из независимости случайных величин $\frac{1}{n}\sum\limits_{k=m+1}^{m+n}\theta_k$ и $\frac{\eta}{n}$ имеем

$$\begin{aligned} &P\left(\sum_{k=m+1}^{m+n}\theta_k < \eta\right) = P\left(\frac{1}{n}\sum_{k=m+1}^{m+n}\theta_k < \frac{\eta}{n}\right) = \\ &= \int \left(I_{B_<}(x_1) + I_{B_>}(x_1)\right) I_B(x_1, x_2)\, dF_{\frac{1}{n}\sum\limits_{k=m+1}^{m+n}\theta_k}(x_1)\, dF_{\frac{\eta}{n}}(x_2) = \\ &= \int I_{B_>}(x_1) I_B(x_1, x_2)\, dF_{\frac{1}{n}\sum\limits_{k=m+1}^{m+n}\theta_k}(x_1)\, dF_{\frac{\eta}{n}}(x_2) + \qquad (7) \\ &+ \int I_{B_<}(x_1) I_B(x_1, x_2)\, dF_{\frac{1}{n}\sum\limits_{k=m+1}^{m+n}\theta_k}(x_1)\, dF_{\frac{\eta}{n}}(x_2). \qquad (8) \end{aligned}$$

Рассмотрим слагаемое (7). Из неравенства Чебышева имеем

$$\begin{aligned} &\int I_{B_>}(x_1) I_B(x_1, x_2)\, dF_{\frac{1}{n}\sum\limits_{k=m+1}^{m+n}\theta_k}(x_1)\, dF_{\frac{\eta}{n}}(x_2) < \\ &< \int I_{B_>}(x_1)\, dF_{\frac{1}{n}\sum\limits_{k=m+1}^{m+n}\theta_k}(x_1) < \\ &< P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=m+1}^{m+n}\theta_k - M(\theta_1)\right| > \varepsilon\right) < \frac{D(\theta_1)}{n\varepsilon^2}. \end{aligned}$$

Ясно, что для произвольного $\xi > 0$ можно подобрать натуральное n_1, не зависящее от m, такое что для всех $n > n_1$ выполнено неравенство

$$P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=m+1}^{m+n}\theta_k - M(\theta_1)\right| > \varepsilon\right) < \frac{D(\theta_1)}{n\varepsilon^2} < \frac{\xi}{2}. \qquad (9)$$

Рассмотрим слагаемое (8). Согласно Рис. 3, имеем

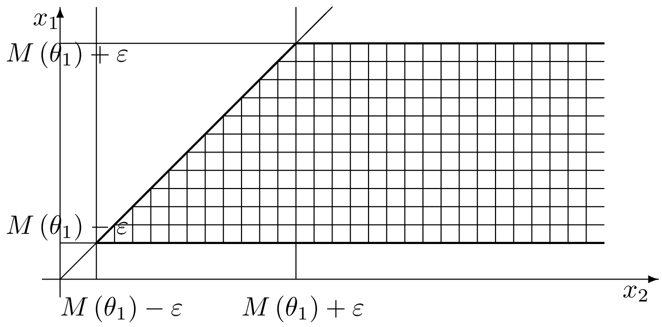

Рис. 3: Множество $B \cap B_<$

$$\int I_{B_<}(x_1)\, I_B(x_1,x_2)\, dF_{\frac{1}{n}\sum\limits_{k=m+1}^{m+n}\theta_k}(x_1)\, dF_{\frac{\eta}{n}}(x_2) =$$

$$= \int\limits_{M(\theta_1)-\varepsilon}^{M(\theta_1)+\varepsilon} dF_{\frac{\eta}{n}}(x_2) \int\limits_{M(\theta_1)-\varepsilon}^{x_2} dF_{\frac{1}{n}\sum\limits_{k=m+1}^{m+n}\theta_k}(x_1) +$$

$$+ \int\limits_{M(\theta_1)+\varepsilon}^{\infty} dF_{\frac{\eta}{n}}(x_2) \int\limits_{M(\theta_1)-\varepsilon}^{M(\theta_1)+\varepsilon} dF_{\frac{1}{n}\sum\limits_{k=m+1}^{m+n}\theta_k}(x_1) <$$

$$< \int\limits_{M(\theta_1)-\varepsilon}^{M(\theta_1)+\varepsilon} dF_{\frac{\eta}{n}}(x_2) + \int\limits_{M(\theta_1)+\varepsilon}^{\infty} dF_{\frac{\eta}{n}}(x_2) = \int\limits_{M(\theta_1)-\varepsilon}^{\infty} dF_{\frac{\eta}{n}}(x_2) =$$

$$= P\left(n\left(M(\theta_1)-\varepsilon\right) < \eta\right).$$

Слагаемое $P\left(n\left(M(\theta_1)-\varepsilon\right) < \eta\right) \underset{n\to\infty}{\to} 0$. То есть, для любого $\xi > 0$ существует $n_2 \in N$, такое что для всех $n > n_2$ справедливо неравенство

$$P\left(n\left(M(\theta_1)-\varepsilon\right) < \eta\right) < \frac{\xi}{2}. \tag{10}$$

Объединяя неравенства (9) и (11), выражения (7) и (8), получим, что для любого $\xi > 0$ существует $n_0 = \max(n_1, n_2) \in N$, такое что для всех $n > n_0$ справедливо неравенство

$$P\left(\sum_{k=m+1}^{m+n}\theta_k < \eta\right) < \xi. \tag{11}$$

Поэтому для любого $\xi > 0$ существует $n_0 \in N$, такое что для всех $n > n_0$ справедливо неравенство

$$P\left(\sum_{k=\kappa+1}^{\kappa+n}\theta_k<\eta\right)=\sum_{k=1}^{\infty}P\left(\sum_{k=m+1}^{m+n}\theta_k<\eta\middle|\kappa=m\right)P\left(\kappa=m\right)=$$
$$=\sum_{k=1}^{\infty}P\left(\sum_{k=m+1}^{m+n}\theta_k<\eta\right)P\left(\kappa=m\right)<\xi\sum_{k=1}^{\infty}P\left(\kappa=m\right)=\xi.$$

□

Из этой теоремы вытекает, что сумма случайных величин, лежащая между двумя другими случайными величинами не может с положительной вероятностью состоять из бесконечного числа одинаково распределенных случайных величин.

2.3 Введение характеристических функций

В этом разделе рассмотрим функции, которые будут необходимы в дальнейшем. В основном здесь содержится справочный материал, для удобства собранный в одном месте.

1. Обозначим для $i=1,2$ и $k\geq 1$ характеристические функции

$$\begin{gathered}\varphi_{\zeta_0}\left(s\right)=\int\limits_0^{\infty}e^{-xs}dF_{\zeta_0}\left(x\right),\\ \varphi_{\zeta_k^{12}}\left(s\right)=\int\limits_0^{\infty}e^{-xs}dF_{\zeta_k^{12}}\left(x\right),\\ \varphi_{\zeta_k^{21}}\left(s\right)=\int\limits_0^{\infty}e^{-xs}dF_{\zeta_k^{21}}\left(x\right).\end{gathered}\tag{12}$$

2. Для $i=1,2$ используем равенство (5), рассмотрим характеристическую функцию φ_{χ_i}

$$\varphi_{\chi_i}\left(s\right)=\int\limits_0^{\infty}e^{-xs}dF_{\chi_i}\left(x\right)=\frac{1}{M\left(\sigma_i^2\right)}\int\limits_0^{\infty}e^{-xs}\overline{F}_{\sigma_i^2}\left(x\right)dx.\tag{13}$$

3. Для $i=1,2$ используем равенство (2), рассмотрим функции

$$\begin{aligned}
&\varphi_{\sigma_2^1}^{\sigma_1^1}(s)=\int\limits_0^\infty e^{-xs}F_{\sigma_1^1}(x)\,dF_{\sigma_2^1}(x)=\\
&\qquad=\frac{1}{M^2(\sigma_2^2)}\int\limits_0^\infty e^{-xs}\left[\int\limits_x^\infty \overline{F}_{\sigma_1^2}(t)\,dt\right]\overline{F}_{\sigma_2^2}(x)\,dx,\\
&\varphi_{\sigma_1^1}^{\sigma_2^1}(s)=\int\limits_0^\infty e^{-xs}F_{\sigma_2^1}(x)\,dF_{\sigma_1^1}(x)=\\
&\qquad=\frac{1}{M^2(\sigma_1^2)}\int\limits_0^\infty e^{-xs}\left[\int\limits_x^\infty \overline{F}_{\sigma_2^2}(t)\,dt\right]\overline{F}_{\sigma_1^2}(x)\,dx.
\end{aligned}\tag{14}$$

4. Для $i=1,2$ используем равенство (5), рассмотрим функции

$$\begin{aligned}
&\varphi_{\chi_i}^{\theta_i^2}(s)=\int\limits_0^\infty e^{-xs}F_{\theta_i^2}(x)\,dF_{\chi_i}(x)=\\
&\qquad=\frac{1}{M(\sigma_i^2)}\int\limits_0^\infty e^{-xs}F_{\theta_i^2}(x)\,\overline{F}_{\sigma_i^2}(x)\,dx
\end{aligned}\tag{15}$$

и

$$\begin{aligned}
&\varphi_{\chi_i}^{\overline{\theta}_i^2}(s)=\int\limits_0^\infty e^{-xs}\overline{F}_{\theta_i^2}(x)\,dF_{\chi_i}(x)=\\
&\qquad=\frac{1}{M(\sigma_i^2)}\int\limits_0^\infty e^{-xs}\overline{F}_{\theta_i^2}(x)\,\overline{F}_{\sigma_i^2}(x)\,dx.
\end{aligned}\tag{16}$$

3. Исследование множества $\{\zeta_0>t\}$

Заметим, что справедливо равенство

$$\begin{aligned}
\{\zeta_0>t\}\left\{\sigma_1^1<\sigma_2^1\right\}=\{\zeta_0>t\}\left\{\sigma_1^1<\sigma_2^1\right\}\left\{\sigma_2^1<t\right\}+\\
+\{\zeta_0>t\}\left\{\sigma_1^1<\sigma_2^1\right\}\left\{\sigma_2^1>t\right\}.
\end{aligned}$$

Несложно видеть, что

$$\left\{\sigma_2^1>t\right\}\{\zeta_0>t\}=\left\{\sigma_2^1>t\right\},$$

поэтому

$$\begin{aligned}
\{\zeta_0>t\}\left\{\sigma_1^1<\sigma_2^1\right\}=\left\{\zeta_1^{12}>t-\sigma_2^1\right\}\left\{\sigma_1^1<\sigma_2^1\right\}\left\{\sigma_2^1<t\right\}+\\
+\left\{\sigma_1^1<\sigma_2^1\right\}\left\{\sigma_2^1>t\right\}.
\end{aligned}$$

Заметим, что все случайные величины в каждом слагаемом независимы. Несложно доказать, что

$$P\left(\left\{\zeta_1^{12} > t - \sigma_2^1\right\}\left\{\sigma_1^1 < \sigma_2^1\right\}\left\{\sigma_2^1 < t\right\}\right) = \\ = \int\limits_0^t \overline{F}_{\zeta_1^{12}}(t-x)\, F_{\sigma_1^1}(x)\, dF_{\sigma_2^1}(x)\,.$$

Также очевидно, что

$$P\left(\left\{\sigma_1^1 < \sigma_2^1\right\}\left\{\sigma_2^1 > t\right\}\right) = \int\limits_t^\infty F_{\sigma_1^1}(x)\, dF_{\sigma_2^1}(x)\,.$$

Поэтому

$$P\left(\left\{\zeta_0 > t\right\}\left\{\sigma_1^1 < \sigma_2^1\right\}\right) = \\ = \int\limits_t^\infty F_{\sigma_1^1}(x)\, dF_{\sigma_2^1}(x) + \int\limits_0^t \overline{F}_{\zeta_1^{12}}(t-x)\, F_{\sigma_1^1}(x)\, dF_{\sigma_2^1}(x)\,.$$

Аналогично

$$P\left(\left\{\zeta_0 > t\right\}\left\{\sigma_2^1 < \sigma_1^1\right\}\right) = \\ = \int\limits_t^\infty F_{\sigma_2^1}(x)\, dF_{\sigma_1^1}(x) + \int\limits_0^t \overline{F}_{\zeta_1^{21}}(t-x)\, F_{\sigma_2^1}(x)\, dF_{\sigma_1^1}(x)\,.$$

Складывая два последних равенства, получим

$$\overline{F}_{\zeta_0} = \int\limits_t^\infty F_{\sigma_1^1}(x)\, dF_{\sigma_2^1}(x) + \int\limits_0^t \overline{F}_{\zeta_1^{12}}(t-x)\, F_{\sigma_1^1}(x)\, dF_{\sigma_2^1}(x) + \\ + \int\limits_t^\infty F_{\sigma_2^1}(x)\, dF_{\sigma_1^1}(x) + \int\limits_0^t \overline{F}_{\zeta_1^{21}}(t-x)\, F_{\sigma_2^1}(x)\, dF_{\sigma_1^1}(x)\,.$$

Далее имеем

$$F_{\zeta_0} = 1 - \int\limits_0^\infty F_{\sigma_1^1}(x)\, dF_{\sigma_2^1}(x) + \int\limits_0^t F_{\zeta_1^{12}}(t-x)\, F_{\sigma_1^1}(x)\, dF_{\sigma_2^1}(x) - \\ - \int\limits_0^\infty F_{\sigma_2^1}(x)\, dF_{\sigma_1^1}(x) + \int\limits_0^t F_{\zeta_1^{21}}(t-x)\, F_{\sigma_2^1}(x)\, dF_{\sigma_1^1}(x)\,.$$

Так как

$$\int\limits_0^\infty F_{\sigma_2^1}(x)\, dF_{\sigma_1^1}(x) = P\left(\sigma_2^1 < \sigma_1^1\right), \qquad \int\limits_0^\infty F_{\sigma_1^1}(x)\, dF_{\sigma_2^1}(x) = P\left(\sigma_1^1 < \sigma_2^1\right),$$

то

$$\int\limits_0^\infty F_{\sigma_2^1}(x)\,dF_{\sigma_1^1}(x) + \int\limits_0^\infty F_{\sigma_1^1}(x)\,dF_{\sigma_2^1}(x) = P\left(\sigma_2^1 < \sigma_1^1\right) + P\left(\sigma_1^1 < \sigma_2^1\right) = 1.$$

Применяя к обеим частям равенства характеристические функции (14) и (12), получим следующее утверждение.

Лемма 2. *Для времени работы системы ζ_0 справедливы утверждения*

$$\{\zeta_0 > t\}\left\{\sigma_1^1 < \sigma_2^1\right\} = \left\{\zeta_1^{12} > t - \sigma_2^1\right\}\left\{\sigma_1^1 < \sigma_2^1\right\}\left\{\sigma_2^1 < t\right\} + \\ + \left\{\sigma_1^1 < \sigma_2^1\right\}\left\{\sigma_2^1 > t\right\}$$

и, соответственно,

$$\varphi_{\zeta_0}(s) = \varphi_{\zeta_1^{12}}(s)\,\varphi_{\sigma_2^1}^{\sigma_1^1}(s) + \varphi_{\zeta_1^{21}}(s)\,\varphi_{\sigma_1^1}^{\sigma_2^1}(s). \tag{17}$$

Заметим, что при условии совпадения устройств

$$\varphi_{\sigma_1^1}^{\sigma_1^1}(0) = P\left(\sigma_1^1 < \sigma_2^1\right) = P\left(\sigma_2^1 < \sigma_1^1\right) = \frac{1}{2}. \tag{18}$$

4. Исследование множества $\left\{\zeta_1^{12} > t\right\}$

Заметим, что справедливо равенство

$$\left\{\zeta_1^{12} > t\right\} = \left\{\zeta_1^{12} > t\right\}\left\{\chi_1\left(\Delta\zeta_1^{12}\right) > t\right\} + \\ + \left\{\zeta_1^{12} > t\right\}\left\{\chi_1\left(\Delta\zeta_1^{12}\right) < t\right\}\left\{\chi_1\left(\Delta\zeta_1^{12}\right) < \theta_1^{\nu_1\left(\Delta\zeta_1^{12}\right)}\right\} + \\ + \left\{\zeta_1^{12} > t\right\}\left\{\chi_1\left(\Delta\zeta_1^{12}\right) < t\right\}\left\{\chi_1\left(\Delta\zeta_1^{12}\right) > \theta_1^{\nu_1\left(\Delta\zeta_1^{12}\right)}\right\}.$$

Несложно видеть, что

$$\left\{\zeta_1^{12} > t\right\}\left\{\chi_1\left(\Delta\zeta_1^{12}\right) > t\right\} = \left\{\chi_1\left(\Delta\zeta_1^{12}\right) > t\right\}.$$

Выполнение условия

$$\left\{\chi_1\left(\Delta\zeta_1^{12}\right) > \theta_1^{\nu_1\left(\Delta\zeta_1^{12}\right)}\right\}$$

означает, что $\zeta_1^{12} = 0$, а это противоречит условию $\zeta_1^{12} > t$. Также выполнение условия

$$\left\{\chi_1\left(\Delta\zeta_1^{12}\right) < \theta_1^{\nu_1\left(\Delta\zeta_1^{12}\right)}\right\}$$

означает существование $\zeta_2^{12} > t - \chi_1\left(\Delta\zeta_1^{12}\right)$. Это наглядно видно на Рис. 1, где $\nu_1\left(\Delta\zeta_1^{12}\right) = 3$. Поэтому,

$$\left\{\zeta_1^{12} > t\right\} = \left\{\chi_1\left(\Delta\zeta_1^{12}\right) > t\right\} + \\ + \left\{\zeta_2^{12} > t - \chi_1\left(\Delta\zeta_1^{12}\right)\right\}\left\{\chi_1\left(\Delta\zeta_1^{12}\right) < t\right\}\left\{\chi_1\left(\Delta\zeta_1^{12}\right) < \theta_1^{\nu_1\left(\Delta\zeta_1^{12}\right)}\right\}.$$

Заметим, что все случайные величины в каждом слагаемом независимы. Во-первых, независимы все величины относящиеся к разным устройствам. Во-вторых, случайные величины $\chi_1\left(\Delta\zeta_1^{12}\right)$ и $\Delta\zeta_1^{12}$ независимы в силу однородности процесса [2]. Далее, чтобы подчеркнуть этот факт, вместо обозначения $\chi_1\left(\Delta\zeta_1^{12}\right)$ будем использовать обозначение χ_1, соответственно. Также независимы случайная величина $\theta_1^{\nu_1\left(\Delta\zeta_1^{12}\right)}$ и $\Delta\zeta_1^{12}$, потому что $\nu_1\left(\Delta\zeta_1^{12}\right) > 1$ и все распределения случайных величин θ_1^i совпадают для всех $i > 1$. Поэтому предыдущее уравнение можно записать в виде

$$\left\{\zeta_1^{12} > t\right\} = \left\{\chi_1 > t\right\} + \left\{\zeta_2^{12} > t - \chi_1\right\}\left\{\chi_1 < t\right\}\left\{\chi_1 < \theta_1^2\right\}. \tag{19}$$

Несложно доказать, что

$$P\left(\left\{\zeta_2^{12} > t - \chi_1\right\}\left\{\chi_1 < t\right\}\left\{\chi_1 < \theta_1^2\right\}\right) = \int_0^t \overline{F}_{\zeta_2^{12}}(t-x)\,\overline{F}_{\theta_1^2}(x)\,dF_{\chi_1}(x).$$

Окончательно, имеем

$$\overline{F}_{\zeta_1^{12}}(t) = \overline{F}_{\chi_1}(t) + \int_0^t \overline{F}_{\zeta_2^{12}}(t-x)\,\overline{F}_{\theta_1^2}(x)\,dF_{\chi_1}(x)$$

или

$$F_{\zeta_1^{12}}(t) = F_{\chi_1}(t) - \int_0^t \overline{F}_{\theta_1^2}(x)\,dF_{\chi_1}(x) + \int_0^t F_{\zeta_2^{12}}(t-x)\,\overline{F}_{\theta_1^2}(x)\,dF_{\chi_1}(x) =$$
$$= \int_0^t F_{\theta_1^2}(x)\,dF_{\chi_1}(x) + \int_0^t F_{\zeta_2^{12}}(t-x)\,\overline{F}_{\theta_1^2}(x)\,dF_{\chi_1}(x).$$

Применяя к обеим частям равенства характеристические функции (12), (15) и (16), получаем следующее утверждение.

Лемма 3. *Для времени работы системы ζ_1^{12} справедливы утверждения*

$$\left\{\zeta_1^{12} > t\right\} = \left\{\chi_1 > t\right\} + \left\{\zeta_2^{12} > t - \chi_1\right\}\left\{\chi_1 < t\right\}\left\{\chi_1 < \theta_1^2\right\} \tag{20}$$

и, соответственно,

$$\varphi_{\zeta_1^{12}}(s) = \varphi_{\chi_1}^{\theta_1^2}(s) + \varphi_{\chi_1}^{\overline{\theta}_1^2}(s)\,\varphi_{\zeta_2^{12}}(s). \tag{21}$$

5. Исследование множества $\left\{\zeta_2^{12} > t\right\}$

Заметим, что справедливо равенство

$$\left\{\zeta_2^{12} > t\right\} = \left\{\zeta_2^{12} > t\right\}\left\{\chi_2\left(\Delta\zeta_2^{12}\right) > t\right\} +$$
$$+ \left\{\zeta_2^{12} > t\right\}\left\{\chi_2\left(\Delta\zeta_2^{12}\right) < t\right\}\left\{\chi_2\left(\Delta\zeta_2^{12}\right) < \theta_2^{\nu_2\left(\Delta\zeta_2^{12}\right)}\right\} +$$
$$+ \left\{\zeta_2^{12} > t\right\}\left\{\chi_2\left(\Delta\zeta_2^{12}\right) < t\right\}\left\{\chi_2\left(\Delta\zeta_2^{12}\right) > \theta_2^{\nu_2\left(\Delta\zeta_2^{12}\right)}\right\}.$$

Несложно видеть, что

$$\left\{\zeta_2^{12} > t\right\}\left\{\chi_2\left(\Delta\zeta_2^{12}\right) > t\right\} = \left\{\chi_2\left(\Delta\zeta_2^{12}\right) > t\right\}.$$

Также, выполнение условия $\left\{\chi_2\left(\Delta\zeta_2^{12}\right) > \theta_2^{\nu_2\left(\Delta\zeta_2^{12}\right)}\right\}$ означает, что $\zeta_2^{12} = 0$, что противоречит условию $\zeta_2^{12} > t$. Аналогично, выполнение условия $\left\{\chi_2\left(\Delta\zeta_2^{12}\right) > \theta_2^{\nu_2\left(\Delta\zeta_2^{12}\right)}\right\}$ означает существование $\zeta_3^{12} > t - \chi_2\left(\Delta\zeta_1^{12}\right)$. Поэтому

$$\begin{aligned}\left\{\zeta_2^{12} > t\right\} = &\left\{\chi_2\left(\Delta\zeta_2^{12}\right) > t\right\} + \\ &+ \left\{\zeta_3^{12} > t - \chi_2\left(\Delta\zeta_2^{12}\right)\right\}\left\{\chi_2\left(\Delta\zeta_2^{12}\right) < t\right\}\left\{\chi_2\left(\Delta\zeta_2^{12}\right) < \theta_2^{\nu_2\left(\Delta\zeta_2^{12}\right)}\right\}.\end{aligned}$$

Заметим, что все случайные величины в каждом слагаемом независимы. Во-первых, независимы все величины относящиеся к разным устройствам. Во-вторых, случайные величины $\chi_2\left(\Delta\zeta_2^{12}\right)$ и $\Delta\zeta_2^{12}$ независимы в силу однородности процесса [2]. Далее, чтобы подчеркнуть этот факт, вместо обозначения $\chi_2\left(\Delta\zeta_2^{12}\right)$ будем использовать обозначение χ_2, соответственно. Также независимы случайная величина $\theta_2^{\nu_2\left(\Delta\zeta_2^{12}\right)}$ и $\Delta\zeta_2^{12}$, потому что $\nu\left(\Delta\zeta_2^{12}\right) > 1$ и все распределения случайных величин θ_2^i совпадают для всех $i > 1$. Поэтому предыдущее уравнение можно записать в виде

$$\left\{\zeta_2^{12} > t\right\} = \left\{\chi_2 > t\right\} + \left\{\zeta_3^{12} > t - \chi_2\right\}\left\{\chi_2 < t\right\}\left\{\chi_2 < \theta_2^2\right\}. \tag{22}$$

Несложно доказать следующие формулы

$$P\left(\left\{\zeta_3^{12} > t - \chi_2\right\}\left\{\chi_2 < t\right\}\left\{\chi_2 < \theta_2^2\right\}\right) = \int\limits_0^t \overline{F}_{\zeta_3^{12}}(t-x)\,\overline{F}_{\theta_2^2}(x)\,dF_{\chi_2}(x).$$

Окончательно имеем

$$\overline{F}_{\zeta_2^{12}}(t) = \overline{F}_{\chi_2}(t) + \int\limits_0^t \overline{F}_{\zeta_3^{12}}(t-x)\,\overline{F}_{\theta_2^2}(x)\,dF_{\chi_2}(x)$$

или

$$\begin{aligned}F_{\zeta_2^{12}}(t) = F_{\chi_2}(t) - &\int\limits_0^t \overline{F}_{\theta_2^2}(x)\,dF_{\chi_2}(x) + \int\limits_0^t F_{\zeta_3^{12}}(t-x)\,\overline{F}_{\theta_2^2}(x)\,dF_{\chi_2}(x) = \\ = &\int\limits_0^t F_{\theta_2^2}(x)\,dF_{\chi_2}(x) + \int\limits_0^t F_{\zeta_3^{12}}(t-x)\,\overline{F}_{\theta_2^2}(x)\,dF_{\chi_2}(x).\end{aligned}$$

Применив к обеим частям равенства характеристические функции (12), (15) и (16), получим следующее утверждение.

Лемма 4. *Для времени работы системы ζ_2^{12} справедливы утверждения*

$$\left\{\zeta_2^{12} > t\right\} = \{\chi_2 > t\} + \left\{\zeta_3^{12} > t - \chi_2\right\}\{\chi_2 < t\}\left\{\chi_2 < \theta_2^2\right\} \tag{23}$$

и, соответственно,

$$\varphi_{\zeta_2^{12}}(s) = \varphi_{\chi_2}^{\theta_2^2}(s) + \varphi_{\chi_2}^{\overline{\theta}_2^2}(s)\,\varphi_{\zeta_3^{12}}(s). \tag{24}$$

5.1 Построение характеристической функции $\varphi_0(s)$

Заметим, что если для $n > 1$ функции $\varphi_{\zeta_{2n+1}^{12}}(s)$ являются решением уравнения (21), а функции $\varphi_{\zeta_{2n}^{12}}(s)$ являются решением уравнения (24), точнее

$$\begin{aligned}
\varphi_{\zeta_{2n+1}^{12}}(s) =& \varphi_{\chi_1}^{\theta_1^2}(s) + \varphi_{\chi_1}^{\overline{\theta}_1^2}(s)\,\varphi_{\zeta_{2n+2}^{12}}(s), \\
\varphi_{\zeta_{2n}^{12}}(s) =& \varphi_{\chi_2}^{\theta_{2n}^2}(s) + \varphi_{\chi_2}^{\overline{\theta}_2^2}(s)\,\varphi_{\zeta_{2n+1}^{12}}(s),
\end{aligned}$$

то отсюда следует, что $\varphi_{\zeta_3^{12}}(s) = \varphi_{\zeta_1^{12}}(s)$. Используя уравнения (21) и (24), получим систему

$$\begin{cases}
-\varphi_{\zeta_1^{12}}(s)\,\varphi_{\chi_2}^{\overline{\theta}_2^2}(s) + \varphi_{\zeta_2^{12}}(s) = \varphi_{\chi_2}^{\theta_2^2}(s), \\
\varphi_{\zeta_1^{12}}(s) - \varphi_{\chi_1}^{\overline{\theta}_2^1}(s)\,\varphi_{\zeta_2^{12}}(s) = \varphi_{\chi_1}^{\theta_2^1}(s),
\end{cases}$$

откуда следует, что

$$\varphi_{\zeta_1^{12}}(s) = \frac{\begin{vmatrix} \varphi_{\chi_2}^{\theta_2^2}(s) & 1 \\ \varphi_{\chi_1}^{\theta_2^1}(s) & -\varphi_{\chi_1}^{\overline{\theta}_2^1}(s) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -\varphi_{\chi_2}^{\overline{\theta}_2^2}(s) & 1 \\ 1 & -\varphi_{\chi_1}^{\overline{\theta}_2^1}(s) \end{vmatrix}} = \frac{-\varphi_{\chi_1}^{\overline{\theta}_1^2}(s)\,\varphi_{\chi_2}^{\theta_2^2}(s) - \varphi_{\chi_1}^{\theta_1^2}(s)}{\varphi_{\chi_1}^{\overline{\theta}_1^2}(s)\,\varphi_{\chi_2}^{\overline{\theta}_2^2}(s) - 1}.$$

Аналогично

$$\varphi_{\zeta_1^{21}}(s) = \frac{\varphi_{\chi_2}^{\theta_2^2}(s) + \varphi_{\chi_2}^{\overline{\theta}_2^2}(s)\,\varphi_{\chi_1}^{\theta_1^2}(s)}{1 - \varphi_{\chi_1}^{\overline{\theta}_1^2}(s)\,\varphi_{\chi_2}^{\overline{\theta}_2^2}(s)}.$$

Подставляя последние две формулы в (17), получим следующее утверждение.

Теорема 3. *Для описанных выше процессов справедлива формула*

$$\varphi_{\zeta_0}(s) = \frac{\varphi_{\chi_1}^{\theta_1^2}(s) + \varphi_{\chi_1}^{\overline{\theta}_1^2}(s)\,\varphi_{\chi_2}^{\theta_2^2}(s)}{1 - \varphi_{\chi_1}^{\overline{\theta}_1^2}(s)\,\varphi_{\chi_2}^{\overline{\theta}_2^2}(s)}\varphi_{\sigma_2^1}^{\sigma_1^1}(s) + \frac{\varphi_{\chi_2}^{\theta_2^2}(s) + \varphi_{\chi_2}^{\overline{\theta}_2^2}(s)\,\varphi_{\chi_1}^{\theta_1^2}(s)}{1 - \varphi_{\chi_1}^{\overline{\theta}_1^2}(s)\,\varphi_{\chi_2}^{\overline{\theta}_2^2}(s)}\varphi_{\sigma_1^1}^{\sigma_2^1}(s). \tag{25}$$

Если устройства совпадают, то справедливо равенство

$$\varphi_{\zeta_0}(s) = 2\frac{\left(1 + \varphi_{\chi_1}^{\overline{\theta}_1^2}(s)\right)\varphi_{\chi_1}^{\theta_1^2}(s)}{\left(1 + \varphi_{\chi_1}^{\overline{\theta}_1^2}(s)\right)\left(1 - \varphi_{\chi_1}^{\overline{\theta}_1^2}(s)\right)}\varphi_{\sigma_1^1}^{\sigma_1^1}(s) = 2\frac{\varphi_{\chi_1}^{\theta_1^2}(s)\,\varphi_{\sigma_1^1}^{\sigma_1^1}(s)}{1 - \varphi_{\chi_1}^{\overline{\theta}_1^2}(s)}. \tag{26}$$

6. Математическое ожидание для совпадающих устройств

Исследуем математическое ожидание для совпадающих устройств. Согласно [1] справедливо равенство $M(\zeta_0) = \varphi^*_{\zeta_0}(0)$. Найдем производную характеристической функции (26) для случая, когда характеристики устройств совпадают. Имеем

$$\begin{aligned}
\varphi^*_{\zeta_0}(s) =& 2\frac{\varphi_{\chi_1}^{\theta_1^2}(s)\,\varphi_{\sigma_1^1}^{\sigma_1^1}(s)}{1-\varphi_{\chi_1}^{\overline{\theta}_1^2}(s)}\left(\frac{\left(\varphi_{\chi_1}^{\overline{\theta}_1^2}\right)^*(s)}{1-\varphi_{\chi_1}^{\overline{\theta}_1^2}(s)} + \frac{\left(\varphi_{\chi_1}^{\theta_1^2}\right)^*(s)}{\varphi_{\chi_1}^{\theta_1^2}(s)} + \frac{\left(\varphi_{\sigma_1^1}^{\sigma_1^1}\right)^*(s)}{\varphi_{\sigma_1^1}^{\sigma_1^1}(s)}\right) = \\
=& 2\frac{\varphi_{\chi_1}^{\theta_1^2}(s)\,\varphi_{\sigma_1^1}^{\sigma_1^1}(s)\left(\varphi_{\chi_1}^{\overline{\theta}_1^2}\right)^*(s)}{\left(1-\varphi_{\chi_1}^{\overline{\theta}_1^2}(s)\right)^2} + 2\frac{\varphi_{\sigma_1^1}^{\sigma_1^1}(s)\left(\varphi_{\chi_1}^{\theta_1^2}\right)^*(s)}{\left(1-\varphi_{\chi_1}^{\overline{\theta}_1^2}(s)\right)} + \\
&+ 2\frac{\varphi_{\chi_1}^{\theta_1^2}(s)\left(\varphi_{\sigma_1^1}^{\sigma_1^1}\right)^*(s)}{\left(1-\varphi_{\chi_1}^{\overline{\theta}_1^2}(s)\right)}.
\end{aligned}$$

Заметим, что в нуле

$$\begin{aligned}
1-\varphi_{\chi_1}^{\overline{\theta}_1^2}(0) =& 1-\int_0^\infty \overline{F}_{\theta_1^2}(x)\,dF_{\chi_1}(x) = \\
=& 1-\int_0^\infty dF_{\chi_1}(x) + \int_0^\infty F_{\theta_1^2}(x)\,dF_{\chi_1}(x) = \\
=& \int_0^\infty F_{\theta_1^2}(x)\,dF_{\chi_1}(x) = P\left(\theta_1^2 < \chi_1\right) = \varphi_{\chi_1}^{\theta_1^2}(0).
\end{aligned}$$

Далее, имеем

$$\begin{aligned}
&\left(\varphi_{\chi_1}^{\overline{\theta}_1^2}\right)^*(0) + \left(\varphi_{\chi_1}^{\theta_1^2}\right)^*(0) = \\
=& \int_0^\infty xP\left(\theta_1^2 > x\right)dF_{\chi_1}(x) + \int_0^\infty xP\left(\theta_1^2 < x\right)dF_{\chi_1}(x) = \\
=& \int_0^\infty x dF_{\chi_1}(x) = M(\chi_1).
\end{aligned}$$

Окончательно, имеем

$$\begin{aligned}
M(\zeta_0) = \varphi^*_{\zeta_0}(0) =& \frac{\left(\varphi_{\chi_1}^{\overline{\theta}_1^2}\right)^*(0)}{P\left(\theta_1^2 < \chi_1\right)} + \frac{\left(\varphi_{\chi_1}^{\theta_1^2}\right)^*(0)}{P\left(\theta_1^2 < \chi_1\right)} + 2\left(\varphi_{\sigma_1^1}^{\sigma_1^1}\right)^*(0) = \\
=& \frac{M(\chi_1)}{P\left(\theta_1^2 < \chi_1\right)} + 2\left(\varphi_{\sigma_1^1}^{\sigma_1^1}\right)^*(0).
\end{aligned}$$

Обозначим символом $F_{\sigma_1^1/\left\{\sigma_2^1<\sigma_1^1\right\}}(t)$ условную функцию распределения случайной величины σ_1^1 при условии $\sigma_2^1 < \sigma_1^1$. Учитывая равенство (18), условную функцию распределения этой случайной величины можно определить равенством

$$F_{\sigma_1^1/\left\{\sigma_2^1<\sigma_1^1\right\}}(t) = \frac{P\left(\left\{\sigma_2^1 < \sigma_1^1\right\}\left\{\sigma_1^1 < t\right\}\right)}{P\left(\sigma_2^1 < \sigma_1^1\right)} =$$

$$= 2P\left(\left\{\sigma_2^1 < \sigma_1^1\right\}\left\{\sigma_1^1 < t\right\}\right) = 2\int\limits_0^t F_{\sigma_1^1}(x)\, dF_{\sigma_2^1}(x).$$

Отсюда следует, что

$$\left(\varphi_{\sigma_1^1}^{\sigma_1^1}\right)^*(0) = 2\int\limits_0^t xF_{\sigma_1^1}(x)\, dF_{\sigma_2^1}(x) =$$

$$= 2\int\limits_0^\infty x dF_{\sigma_1^1/\left\{\sigma_2^1<\sigma_1^1\right\}}(x) = 2M_{\left\{\sigma_2^1<\sigma_1^1\right\}}\left(\sigma_1^1\right).$$

Итак, доказано следующее утверждение.

Лемма 5. *Справедливо равенство*

$$M(\zeta_0) = \frac{M(\chi_1)}{P\left(\theta_1^2 < \chi_1\right)} + 4M_{\left\{\sigma_2^1<\sigma_1^1\right\}}\left(\sigma_1^1\right). \qquad (27)$$

Отсюда следует, что для увеличения математического ожидания необходимо увеличить математическое ожидание случайной величины χ_1 или уменьшить величину $P\left(\theta_1^2 < \chi_1\right)$. Также можно увеличить условное математическое ожидание случайной величины σ_1^1.

7. Математическое ожидание для показательного закона распределения

В этом разделе исследованы более конкретные случаи для совпадающих по характеристикам устройств. Рассмотрим систему, для которой законы распределения времени работы и ремонта являются показательными законами распределения с плотностями вероятностей

$$f_{\theta_1^2}(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad f_{\tau_1^2}(x) = \mu e^{-\mu x}.$$

Рассмотрим два случая.

1. Рассмотрим случай $\lambda \neq \mu$.

Найдем плотность распределения вероятностей случайной величины σ_1^2:

$$f_{\sigma_1^2}(x) = \int\limits_0^x f_{\theta_1^2}(x-u)\, f_{\tau^2}(u)\, du =$$
$$=\lambda\mu \int\limits_0^x e^{-\lambda(x-u)} e^{-\mu u} du = \lambda_1 \mu e^{-\lambda x} \int\limits_0^x e^{(\lambda-\mu)u} du =$$
$$=\frac{\lambda\mu}{\lambda-\mu} e^{-\lambda x}\left(e^{(\lambda-\mu)x}-1\right) = \frac{\lambda\mu}{\lambda-\mu}\left(e^{-\mu x}-e^{-\lambda x}\right).$$

Функция распределения имеет вид

$$F_{\sigma_1^2}(x) = \frac{\lambda\mu}{\lambda-\mu}\int\limits_0^x \left(e^{-\mu t}-e^{-\lambda t}\right) dt = 1 + \frac{\mu}{\lambda-\mu} e^{-\lambda x} - \frac{\lambda}{\lambda-\mu} e^{-\mu x},$$

поэтому

$$\overline{F}_{\sigma_1^2}(x) = \frac{\lambda}{\lambda-\mu} e^{-\mu x} - \frac{\mu}{\lambda-\mu} e^{-\lambda x} \tag{28}$$

и, соответственно,

$$\int\limits_0^\infty x \overline{F}_{\sigma_1^2}(x)\, dx = \frac{\lambda^3-\mu^3}{(\lambda-\mu)\,\mu^2\lambda^2} = \frac{\lambda^2+\lambda\mu+\mu^2}{\mu^2\lambda^2}.$$

Так как случайные величины θ_1^2 и τ_1^2 независимы, то математическое ожидание случайной величины $\sigma_1^2 = \theta_1^2 + \tau_1^2$ равно $M\left(\sigma_1^2\right) = \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu}$. Поэтому,

$$M(\chi_1) = \int\limits_0^\infty x dF_{\chi_1}(x) = \frac{1}{M\left(\sigma_1^2\right)} \int\limits_0^\infty x \overline{F}_{\sigma_1^2}(x)\, dx =$$
$$=\frac{\lambda^2+\lambda\mu+\mu^2}{(\lambda+\mu)^2} * \frac{\lambda+\mu}{\mu\lambda}.$$

Далее, имеем

$$P\left(\theta_1^2 > \chi_1\right) = \int\limits_0^\infty \overline{F}_{\theta_1^2}(x)\, dF_{\chi_1}(x) = \frac{1}{M\left(\sigma_1^2\right)} \int\limits_0^\infty \overline{F}_{\theta_1^2}(x)\, \overline{F}_{\sigma_1^2}(x)\, dx =$$
$$=\frac{\lambda\mu}{\lambda^2-\mu^2}\int\limits_0^\infty e^{-\lambda x}\left(\lambda e^{-\mu x} - \mu e^{-\lambda x}\right) dx = \mu \frac{\left(\lambda^2-\mu^2\right)+\left(\lambda^2-\lambda\mu\right)}{2\,(\lambda-\mu)\,(\lambda+\mu)^2} =$$
$$=\frac{\mu\,(2\lambda+\mu)}{2\,(\lambda+\mu)^2} = \frac{1}{2}\left(1-\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^2\right) < \frac{1}{2}.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{1}{2} < P\left(\theta_1^2 < \chi_1\right) = 1 - P\left(\theta_1^2 > \chi_1\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^2\right) < 1$$

$$P\left(\theta_1^2 < \chi_1\right) = 1 - \frac{\mu\left(2\lambda+\mu\right)}{2\left(\lambda+\mu\right)^2} = \frac{2\lambda^2 + 2\lambda\mu + \mu^2}{2\left(\lambda+\mu\right)^2}.$$

Далее, заметим что

$$\frac{M\left(\chi_1\right)}{P\left(\theta_1^2 < \chi_1\right)} = \frac{\lambda^2 + \lambda\mu + \mu^2}{2\lambda^2 + 2\lambda\mu + \mu^2} * \frac{\lambda+\mu}{\mu\lambda} = \frac{\lambda^2 + \lambda\mu + \mu^2}{2\lambda^2 + 2\lambda\mu + \mu^2} M\left(\sigma_1^2\right). \tag{29}$$

Обозначим $x = \frac{\lambda}{\mu}$. В этом случае

$$y = \frac{\lambda^2 + \lambda\mu + \mu^2}{2\lambda^2 + 2\lambda\mu + \mu^2} = \frac{1}{2}\frac{2x^2 + 2x + 2}{2x^2 + 2x + 1} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2\left(\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\right)}\right).$$

То есть функция y убывает, принимая максимальное значение, равное единице, в нуле и $\frac{1}{2}$ на бесконечности

$$\frac{1}{2} < \alpha \overset{def}{=} \frac{\lambda^2 + \lambda\mu + \mu^2}{2\lambda^2 + 2\lambda\mu + \mu^2} < 1,$$

или, используя формулу (29), имеем

$$\frac{1}{2} M\left(\sigma_1^2\right) < \frac{M\left(\chi_1\right)}{P\left(\theta_1^2 > \chi_1\right)} = \alpha M\left(\sigma_1^2\right) < M\left(\sigma_1^2\right). \tag{30}$$

Рассмотрим еще одну величину:

$$\begin{aligned}
&2M_{\left\{\sigma_2^1 < \sigma_1^1\right\}}\left(\sigma_1^1\right) = \left(\varphi_{\sigma_1^1}^{\sigma_1^1}\right)^*(0) = \\
&= \int_0^\infty x F_{\sigma_1^1}(x)\, dF_{\sigma_1^1}(x) = \frac{1}{M^2\left(\sigma_1^2\right)} \int_0^\infty x \left[\int_x^\infty \overline{F}_{\sigma_1^2}(t)\, dt\right] \overline{F}_{\sigma_1^2}(x)\, dx = \\
&= \frac{\lambda^2\mu^2}{\left(\lambda^2 - \mu^2\right)^2} \int_0^\infty x \left(\frac{\lambda}{\mu} e^{-\mu x} - \frac{\mu}{\lambda} e^{-\lambda x}\right)\left(\lambda e^{-\mu x} - \mu e^{-\lambda x}\right) dx = \\
&= \frac{\left(\lambda^5 + \mu^5\right)\left(\mu + \lambda\right) - 4\mu^3\lambda^3}{4\mu\lambda\left(\lambda+\mu\right)^3} * \frac{1}{\left(\lambda - \mu\right)^2}.
\end{aligned}$$

Так как

$$\begin{aligned}
&\left(\lambda^5 + \mu^5\right)\left(\mu + \lambda\right) - 4\mu^3\lambda^3 = \left(\lambda^3 - \mu^3\right)^2 + \mu\lambda\left(\lambda^2 - \mu^2\right)^2 = \\
&= \left(\lambda - \mu\right)^2\left(\left(\lambda^2 + \lambda\mu + \mu^2\right)^2 + \mu\lambda\left(\lambda + \mu\right)^2\right),
\end{aligned}$$

то

$$\left(\varphi_{\sigma_1^1}^{\sigma_1^1}\right)^*(0) = \frac{\left(\lambda^2+\lambda\mu+\mu^2\right)^2+\mu\lambda\left(\lambda+\mu\right)^2}{4\left(\lambda+\mu\right)^4}\frac{\lambda+\mu}{\mu\lambda}.$$

Обозначим $x = \frac{\lambda}{\mu}$. В этом случае

$$\frac{\left(\lambda^2+\lambda\mu+\mu^2\right)^2+\mu\lambda\left(\lambda+\mu\right)^2}{\left(\lambda+\mu\right)^4} = \left(\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{3}{4}.$$

Обозначим $w = \frac{1}{x+1}$. Заметим, что $0 < w < 1$. Так как функция $z = \left(w-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}$ убывает на отрезке $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ и возрастает на отрезке $\left[\frac{1}{2},1\right]$, то $\frac{1}{4} = z\left(\frac{1}{2}\right) < z < z(0) = z(1) = \frac{1}{2}$. Так как функция $y = z^2+\frac{3}{4}$ возрастает на отрезке $\left[\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right]$, то $\frac{13}{16} = y\left(\frac{1}{4}\right) < y < y\left(\frac{1}{2}\right) = 1$. Поэтому, $\frac{13}{64} < \frac{1}{4}y < \frac{16}{64}$ и

$$\frac{13}{64} < \beta \overset{def}{=} \frac{\left(\lambda^2+\lambda\mu+\mu^2\right)^2+\mu\lambda\left(\lambda+\mu\right)^2}{4\left(\lambda+\mu\right)^4} < \frac{16}{64}.$$

Итак, доказано, что

$$\frac{13}{64}M\left(\sigma_1^2\right) < \left(\varphi_{\sigma_1^1}^{\sigma_1^1}\right)^*(0) = \beta M\left(\sigma_1^2\right) < \frac{16}{64}M\left(\sigma_1^2\right). \tag{31}$$

Согласно (27) и объединяя результаты (30) и (31), получим следующее утверждение.

Теорема 4. *Для описанного выше процесса справедливо равенство*

$$\begin{aligned} M\left(\zeta_0\right) =& \frac{M\left(\chi_1\right)}{P\left(\theta_1^2<\chi_1\right)}+4M_{\left\{\sigma_2^1<\sigma_1^1\right\}}\left(\sigma_1^1\right) = \\ =& \left(\frac{\lambda^2+\lambda\mu+\mu^2}{2\lambda^2+2\lambda\mu+\mu^2}+\frac{\left(\lambda^2+\lambda\mu+\mu^2\right)^2+\mu\lambda\left(\lambda+\mu\right)^2}{2\left(\lambda+\mu\right)^4}\right)\frac{\lambda+\mu}{\mu\lambda} = \\ =& \left(\alpha+2\beta\right)\left(\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\mu}\right) = \left(\alpha+2\beta\right)M\left(\sigma_1^2\right), \end{aligned} \tag{32}$$

где $\frac{1}{2} < \alpha < 1$ *и* $\frac{13}{64} < \beta < \frac{16}{64}$, *или* $0.90625 = \frac{29}{32} < \alpha+2\beta < \frac{3}{2} = 1.5$.

Из этой формулы видно, что для того чтобы увеличить математическое ожидание ζ_0, необходимо либо устремить к нулю λ, либо устремить к нулю μ.

2. Рассмотрим случай $\lambda = \mu$. Рассмотрим систему, для которой законы распределения времени работы и ремонта являются показательными законами распределения с плотностями вероятностей

$$f_{\theta_1^2}(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \qquad f_{\tau_1^2}(x) = \lambda e^{-\lambda x}.$$

Имеем

$$f_{\sigma_1^2}(x) = \int\limits_0^x f_{\theta_1^2}(x-u)\,f_{\tau_1^2}(u)\,du = \lambda^2\int\limits_0^x e^{-\lambda(x-u)}e^{-\lambda u}du = \lambda^2 x e^{-\lambda x}.$$

Так как случайные величины θ_1^2 и τ_1^2 независимы, то математическое ожидание случайной величины $\sigma_1^2 = \theta_1^2 + \tau_1^2$ равно $M\left(\sigma_1^2\right) = \frac{2}{\lambda}$. Функция распределения имеет вид

$$F_{\sigma_1^2}(x) = \lambda^2 \int_0^x te^{-\lambda t}dt = \int_0^{\lambda x} ye^{-y}dy = 1 - e^{-\lambda x} - \lambda x e^{-\lambda x}.$$

Поэтому

$$M(\chi_1) = \int_0^\infty x dF_{\chi_1}(x) = \frac{1}{M(\sigma_1^2)} \int_0^\infty x \overline{F}_{\sigma_1^2}(x)\, dx =$$

$$= \frac{\lambda}{2} \int_0^\infty x\left(e^{-\lambda x} + \lambda x e^{-\lambda x}\right) dx = \frac{3}{2\lambda}.$$

Имеем

$$P\left(\theta_1^2 > \chi_1\right) = \int_0^\infty \overline{F}_{\theta_1^2}(x)\, dF_{\chi_1}(x) = \frac{1}{M(\sigma_1^2)} \int_0^\infty \overline{F}_{\theta_1^2}(x)\, \overline{F}_{\sigma_1^2}(x)\, dx =$$

$$= \frac{1}{4} \int_0^\infty \left(e^{-2\lambda x} + \frac{1}{2} 2\lambda x e^{-2\lambda x}\right) d(2\lambda x) = \frac{3}{8},$$

$$P\left(\theta_1^2 < \chi_1\right) = 1 - P\left(\theta_1^2 > \chi_1\right) = 1 - \frac{3}{8} = \frac{5}{8}.$$

Окончательно

$$\frac{M(\chi_1)}{P(\theta_1^2 < \chi_1)} = \frac{12}{5\lambda}.$$

Рассмотрим еще одну величину

$$\left(\varphi_{\sigma_1^1}^{\sigma_1^1}\right)^*(0) = \int_0^\infty x F_{\sigma_1^1}(x)\, dF_{\sigma_1^1}(x) = \frac{1}{M^2(\sigma_1^2)} \int_0^\infty x \left[\int_x^\infty \overline{F}_{\sigma_1^2}(t)\, dt\right] \overline{F}_{\sigma_1^2}(x)\, dx =$$

$$= \frac{\lambda^2}{4} \int_0^\infty x \left[\int_x^\infty \left(e^{-\lambda t} + \lambda t e^{-\lambda t}\right) dt\right] \left(e^{-\lambda x} + \lambda x e^{-\lambda x}\right) dx = \frac{13}{32\lambda}.$$

Объединяя все результаты, получим следующее утверждение.

Теорема 5. *Для описанного выше процесса справедливо равенство*

$$M(\zeta_0) = \frac{M(\chi_1)}{P(\theta_1^2 < \chi_1)} + 4M_{\left\{\sigma_2^1 < \sigma_1^1\right\}}\left(\sigma_1^1\right) = \frac{12}{5\lambda} + \frac{13}{16\lambda} = \frac{257}{80\lambda}.$$

Для того чтобы увеличить математическое ожидание ζ_0, необходимо устремить к нулю λ.

8. Исследование функции распределения случайной величины ζ_0

1. Исследуем функцию распределения ζ_0 для совпадающих устройств с временами работы и ремонта, распределенными по показательному закону при $\lambda \neq \mu$. Имеем
$$f_{\theta_j^2}(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad f_{\tau_j^2}(x) = \mu e^{-\mu x}.$$
Как доказано выше, характеристическая функция случайной величины ζ_0 равна
$$\varphi_{\zeta_0}(s) = 2\frac{\varphi_{\chi_1}^{\theta_1^2}(s)\,\varphi_{\sigma_1^1}^{\sigma_1^1}(s)}{1-\varphi_{\chi_1}^{\overline{\theta}_1^2}(s)}.$$
Используя формулы (16) и (28), найдем входящую в последнюю формулу величину
$$\varphi_{\chi_1}^{\overline{\theta}_1^2}(s) = \int\limits_0^\infty e^{-xs}\overline{F}_{\theta_1^2}(x)\,dF_{\chi_1}(x) = \frac{1}{M(\sigma_1^2)}\int\limits_0^\infty e^{-xs}\overline{F}_{\theta_1^2}(x)\,\overline{F}_{\sigma_1^2}(x)\,dx =$$
$$=\frac{\lambda\mu}{\lambda^2-\mu^2}\int\limits_0^\infty e^{-xs}e^{-\lambda x}\left(\lambda e^{-\mu x}-\mu e^{-\lambda x}\right)dx =$$
$$=\frac{\lambda\mu}{\lambda^2-\mu^2}\frac{\left(\lambda^2-\mu^2\right)+\left(\lambda^2-\lambda\mu\right)+(\lambda-\mu)s}{(\lambda+\mu+s)(2\lambda+s)} =$$
$$=\frac{\lambda\mu(2\lambda+\mu+s)}{(\lambda+\mu)(\lambda+\mu+s)(2\lambda+s)}.$$
Рассмотрим дробное выражение
$$\frac{1}{1-\varphi_{\chi_1}^{\overline{\theta}_1^2}(s)} = \frac{(\lambda+\mu)(\lambda+\mu+s)(2\lambda+s)}{(\lambda+\mu)(\lambda+\mu+s)(2\lambda+s)-\lambda\mu(2\lambda+\mu+s)}.$$
Преобразуем его знаменатель. Имеем
$$(\lambda+\mu)(\lambda+\mu+s)(2\lambda+s)-\lambda\mu(2\lambda+\mu+s) =$$
$$=\mu^3\left(\frac{\lambda}{\mu}+1\right)\left(\frac{\lambda}{\mu}+1+\frac{s}{\mu}\right)\left(2\frac{\lambda}{\mu}+\frac{s}{\mu}\right)-\frac{\lambda}{\mu}\left(2\frac{\lambda}{\mu}+1+\frac{s}{\mu}\right).$$
Обозначим $a=\frac{\lambda}{\mu}$ и $x=\frac{s}{\mu}$. Имеем
$$\mu^3\left(\frac{\lambda}{\mu}+1\right)\left(\frac{\lambda}{\mu}+1+\frac{s}{\mu}\right)\left(2\frac{\lambda}{\mu}+\frac{s}{\mu}\right)-\frac{\lambda}{\mu}\left(2\frac{\lambda}{\mu}+1+\frac{s}{\mu}\right) =$$
$$=\mu^3\left[(a+1)x^2+x\left(3a^2+3a+1\right)+a\left(2a^2+2a+1\right)\right].$$
Найдем корни уравнения
$$y=(a+1)x^2+x\left(3a^2+3a+1\right)+a\left(2a^2+2a+1\right).$$

Обозначив $z = a^2 + a + 1$, имеем

$$\begin{aligned}
D &= \left(3a^2 + 3a + 1\right)^2 - 4a\left(a + 1\right)\left(2a^2 + 2a + 1\right) = \\
&= \left(3\left(a^2 + a + 1\right) - 2\right)^2 - 4\left(\left(a^2 + a + 1\right) - 1\right)\left(2\left(a^2 + a + 1\right) - 1\right) = \\
&= \left(3z - 2\right)^2 - 4\left(z - 1\right)\left(2z - 1\right) = 9z^2 - 12z + 4 - 8z^2 + 12z - 4 = z^2 > 0,
\end{aligned}$$

поэтому корни уравнения z_1 и z_2 действительны и равны

$$\begin{aligned}
z_1 &= \frac{-3a^2 - 3a - 1 + a^2 + a + 1}{2\left(a + 1\right)} = -a = -\frac{\lambda}{\mu} < 0, \\
z_2 &= \frac{-3a^2 - 3a - 1 - a^2 - a - 1}{2\left(a + 1\right)} = -\frac{2a^2 + 2a + 1}{a + 1} = -\frac{2\lambda^2 + 2\lambda\mu + \mu^2}{\mu\left(\lambda + \mu\right)} < 0.
\end{aligned}$$

Окончательно, получаем

$$\begin{aligned}
&\left(\lambda + \mu\right)\left(\lambda + \mu + s\right)\left(2\lambda + s\right) - \lambda\mu\left(2\lambda + \mu + s\right) = \\
&= \mu^3\left(\frac{\lambda}{\mu} + 1\right)\left(\frac{s}{\mu} + \frac{\lambda}{\mu}\right)\left(\frac{s}{\mu} + \frac{2\lambda^2 + 2\lambda\mu + \mu^2}{\mu\left(\lambda + \mu\right)}\right) = \\
&= \left(\lambda + \mu\right)\left(s + \lambda\right)\left(s + \frac{2\lambda^2 + 2\lambda\mu + \mu^2}{\lambda + \mu}\right).
\end{aligned}$$

Итак, доказано

$$\frac{1}{1 - \varphi_{\chi_1}^{\overline{\theta}_1^2}\left(s\right)} = \frac{\left(\lambda + \mu + s\right)\left(2\lambda + s\right)}{\left(s + \lambda\right)\left(s + \frac{2\lambda^2 + 2\lambda\mu + \mu^2}{\lambda + \mu}\right)}. \tag{33}$$

Далее из формул (13) и (28) имеем

$$\begin{aligned}
\varphi_{\chi_1}\left(s\right) &= \int_0^\infty e^{-xs} dF_{\chi_1}\left(x\right) = \frac{1}{M\left(\sigma_1^2\right)} \int_0^\infty e^{-xs} \overline{F}_{\sigma_1^2}\left(x\right) dx = \\
&= \frac{\lambda\mu}{\lambda^2 - \mu^2} \int_0^\infty e^{-xs}\left(\lambda e^{-\mu x} - \mu e^{-\lambda x}\right) dx = \\
&= \frac{\lambda\mu}{\lambda^2 - \mu^2} \frac{\left(\lambda^2 - \mu^2\right) + \left(\lambda - \mu\right) s}{\left(\lambda + \mu + s\right)\left(2\lambda + s\right)} = \frac{\lambda\mu\left(\lambda + \mu + s\right)}{\left(\lambda + \mu\right)\left(\mu + s\right)\left(\lambda + s\right)}.
\end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned}
\varphi_{\chi_i}^{\theta_i^2}\left(s\right) &= \int_0^\infty e^{-xs} F_{\theta_i^2}\left(x\right) dF_{\chi_i}\left(x\right) = \frac{1}{M\left(\sigma_i^2\right)} \int_0^\infty e^{-xs} F_{\theta_i^2}\left(x\right) \overline{F}_{\sigma_i^2}\left(x\right) dx = \\
&= \frac{1}{M\left(\sigma_i^2\right)} \int_0^\infty e^{-xs} \overline{F}_{\sigma_i^2}\left(x\right) dx - \frac{1}{M\left(\sigma_i^2\right)} \int_0^\infty e^{-xs} \overline{F}_{\theta_i^2}\left(x\right) \overline{F}_{\sigma_i^2}\left(x\right) dx = \\
&= \frac{\lambda\mu}{\lambda + \mu}\left(\frac{\lambda + \mu + s}{\left(\mu + s\right)\left(\lambda + s\right)} - \frac{2\lambda + \mu + s}{\left(\lambda + \mu + s\right)\left(2\lambda + s\right)}\right).
\end{aligned} \tag{34}$$

Согласно формуле (28) имеем

$$\int\limits_x^\infty \overline{F}_{\sigma_1^2}(t)\,dt = \int\limits_x^\infty \left(\frac{\lambda}{\lambda-\mu}e^{-\mu t} - \frac{\mu}{\lambda-\mu}e^{-\lambda t}\right)dt = \\ = \frac{\lambda}{\mu(\lambda-\mu)}e^{-\mu x} - \frac{\mu}{\lambda(\lambda-\mu)}e^{-\lambda x}.$$

Поэтому из формулы (14) получаем

$$\begin{aligned} &\varphi_{\sigma_1^1}^{\sigma_1^1}(s) = \int\limits_0^\infty e^{-xs}F_{\sigma_1^1}(x)\,dF_{\sigma_1^1}(x) = \\ &= \frac{1}{M^2(\sigma_1^2)}\int\limits_0^\infty e^{-xs}\left[\int\limits_x^\infty \overline{F}_{\sigma_1^2}(t)\,dt\right]\overline{F}_{\sigma_1^2}(x)\,dx = \\ &= \frac{\lambda\mu}{\lambda^2-\mu^2}\int\limits_0^\infty e^{-xs}\left[\frac{\lambda}{\mu}e^{-\mu x} - \frac{\mu}{\lambda}e^{-\lambda x}\right]\left[\lambda e^{-\mu x} - \mu e^{-\lambda x}\right]dx = \\ &= \frac{\lambda\mu}{\lambda^2-\mu^2}\left[\frac{\lambda^3}{2\mu+s} + \frac{\mu^3}{2\lambda+s} - \frac{\lambda\mu(\mu+\lambda)}{\mu+\lambda+s}\right]. \end{aligned} \tag{35}$$

Объединяя (33), (34), (35) получим

$$\begin{aligned} &\varphi_{\zeta_0}(s) = \frac{2\varphi_{\chi_1}^{\theta_1^2}(s)\,\varphi_{\sigma_1^1}^{\sigma_1^1}(s)}{1-\varphi_{\chi_1}^{\overline{\theta}_1^2}(s)} = \frac{2\lambda^2\mu^2}{(\lambda+\mu)^2(\lambda-\mu)}\times \\ &\times\left(\frac{\lambda+\mu+s}{(\mu+s)(\lambda+s)} - \frac{2\lambda+\mu+s}{(\lambda+\mu+s)(2\lambda+s)}\right)\times \\ &\times\left[\frac{\lambda^3}{2\mu+s} + \frac{\mu^3}{2\lambda+s} - \frac{\lambda\mu(\mu+\lambda)}{\mu+\lambda+s}\right]\frac{(\lambda+\mu+s)(2\lambda+s)}{(s+\lambda)\left(s+\frac{2\lambda^2+2\lambda\mu+\mu^2}{\lambda+\mu}\right)}. \end{aligned} \tag{36}$$

Итак, доказано следующее утверждение.

Теорема 6. *Для описанного выше процесса плотность вероятности случайной величины ζ_0 является линейной комбинацией функций*

$$\begin{array}{ll} e^{-2\lambda x}, & xe^{-2\lambda x}, \\ e^{-\lambda x}, & xe^{-\lambda x}, \\ e^{-(\lambda+\mu)x}, & xe^{-(\lambda+\mu)x}. \\ e^{-\mu x}, & \\ e^{-2\mu x}, & \\ e^{-\frac{2\lambda^2+2\lambda\mu+\mu^2}{\lambda+\mu}x}, & \end{array}$$

2. Построим функцию распределения ζ_0 для совпадающих устройств с временами работы и ремонта, распределенными по показательному закону распределения при $\lambda = \mu$:

$$f_{\theta_j^2}(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \qquad f_{\tau_j^2}(x) = \lambda e^{-\lambda x}.$$

Как доказано выше, характеристическая функция случайной величины ζ_0 равна

$$\varphi_{\zeta_0}(s) = 2\frac{\varphi_{\chi_1}^{\theta_1^2}(s)\,\varphi_{\sigma_1^1}^{\sigma_1^1}(s)}{1-\varphi_{\chi_1}^{\overline{\theta}_1^2}(s)}.$$

Используя формулы (16), (28), найдем входящие в последнюю формулу величины:

$$\varphi_{\chi_1}^{\overline{\theta}_1^2}(s) = \int\limits_0^\infty e^{-xs}\overline{F}_{\theta_1^2}(x)\,dF_{\chi_1}(x) = \frac{1}{M(\sigma_1^2)}\int\limits_0^\infty e^{-xs}\overline{F}_{\theta_1^2}(x)\,\overline{F}_{\sigma_1^2}(x)\,dx =$$
$$= \frac{\lambda}{2}\int\limits_0^\infty e^{-xs}e^{-\lambda x}\left(e^{-\lambda x}+\lambda x e^{-\lambda x}\right)dx = \frac{\lambda(3\lambda+s)}{2(2\lambda+s)^2}.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{1}{1-\varphi_{\chi_1}^{\overline{\theta}_1^2}(s)} = \frac{1}{1-\frac{\lambda(3\lambda+s)}{2(2\lambda+s)^2}} = \frac{(2\lambda+s)^2}{(s+\lambda)\left(s+\frac{5}{2}\lambda\right)}. \tag{37}$$

Далее из формул (13) и (28) имеем

$$\varphi_{\chi_1}(s) = \int\limits_0^\infty e^{-xs}dF_{\chi_1}(x) = \frac{1}{M(\sigma_1^2)}\int\limits_0^\infty e^{-xs}\overline{F}_{\sigma_1^2}(x)\,dx =$$
$$= \frac{\lambda}{2}\int\limits_0^\infty e^{-xs}\left(e^{-\lambda x}+\lambda x e^{-\lambda x}\right)dx = \frac{\lambda}{2}\frac{(2\lambda+s)}{(\lambda+s)^2}.$$

Поэтому

$$\varphi_{\chi_i}^{\theta_i^2}(s) = \int\limits_0^\infty e^{-xs}F_{\theta_i^2}(x)\,dF_{\chi_i}(x) = \frac{1}{M(\sigma_i^2)}\int\limits_0^\infty e^{-xs}F_{\theta_i^2}(x)\,\overline{F}_{\sigma_i^2}(x)\,dx =$$
$$= \frac{1}{M(\sigma_i^2)}\int\limits_0^\infty e^{-xs}\overline{F}_{\sigma_i^2}(x)\,dx - \frac{1}{M(\sigma_i^2)}\int\limits_0^\infty e^{-xs}\overline{F}_{\theta_i^2}(x)\,\overline{F}_{\sigma_i^2}(x)\,dx = \tag{38}$$
$$= \frac{\lambda}{2}\left(\frac{\lambda}{(\lambda+s)^2}+\frac{1}{\lambda+s}-\frac{\lambda}{(2\lambda+s)^2}-\frac{1}{2\lambda+s}\right).$$

Согласно формуле (28)

$$\int\limits_x^\infty \overline{F}_{\sigma_1^2}(t)\,dt = \int\limits_x^\infty \left(e^{-\lambda t} + \lambda t e^{-\lambda t}\right) dt = \frac{2}{\lambda} e^{-\lambda x} + x e^{-xt}.$$

Из формулы (14) имеем

$$\begin{aligned}
\varphi_{\sigma_1^1}^{\sigma_1^1}(s) &= \int\limits_0^\infty e^{-xs} F_{\sigma_1^1}(x)\,dF_{\sigma_1^1}(x) = \\
&= \frac{1}{M^2(\sigma_1^2)} \int\limits_0^\infty e^{-xs} \left[\int\limits_x^\infty \overline{F}_{\sigma_1^2}(t)\,dt\right] \overline{F}_{\sigma_1^2}(x)\,dx = \\
&= \int\limits_0^\infty e^{-xs} \left[\frac{2}{\lambda} e^{-\lambda x} + x e^{-\lambda x}\right] \left[e^{-\lambda x} + \lambda x e^{-\lambda x}\right] dx = \\
&= \frac{2}{\lambda(2\lambda+s)} + \frac{3}{(2\lambda+s)^2} + \frac{2\lambda}{(2\lambda+s)^3}.
\end{aligned} \tag{39}$$

Объединяя (37), (38), (39) получаем

$$\begin{aligned}
\varphi_{\zeta_0}(s) = &\frac{2\varphi_{\chi_1}^{\theta_1^2}(s)\,\varphi_{\sigma_1^1}^{\sigma_1^1}(s)}{1 - \varphi_{\chi_1}^{\overline{\theta}_1^2}(s)} = \frac{\lambda(2\lambda+s)^2}{(s+\lambda)\left(s+\frac{5}{2}\lambda\right)} \times \\
&\times \left(\frac{\lambda}{(\lambda+s)^2} + \frac{1}{\lambda+s} - \frac{\lambda}{(2\lambda+s)^2} - \frac{1}{2\lambda+s}\right) \times \\
&\times \left(\frac{2}{\lambda(2\lambda+s)} + \frac{3}{(2\lambda+s)^2} + \frac{2\lambda}{(2\lambda+s)^3}\right).
\end{aligned} \tag{40}$$

Итак, доказано следующее утверждение.

Теорема 7. *Для описанного выше процесса плотность вероятности случайной величины ζ_0 является линейной комбинацией функций*

$$\begin{array}{lllll}
e^{-2\lambda x}, & xe^{-2\lambda x}, & x^2e^{-2\lambda x}, & x^3e^{-2\lambda x}, & x^4e^{-2\lambda x}, \\
e^{-\lambda x}, & xe^{-\lambda x}, & x^2e^{-\lambda x}, & & \\
e^{-\frac{5}{2}\lambda x}. & & & &
\end{array}$$

Заключение

Рассмотрены два устройства, работающие одновременно. Показано, как должна начинаться работа системы в случае, когда функция (6) является характеристической и когда функция (6) не является характеристической. Далее, на основе изучения работы системы строится характеристическая функция времени работы системы (25). Используя эту функцию, найдено аналитическое выражение для математического ожидания времени работы системы и предложены способы его увеличения.

Подробно изучено функционирование системы в том случае, когда время работы и ремонта системы распределено по показательному закону. Показано, что в этом случае устройства должны начинать работать не одновременно. Для случая совпадения устройств рассмотрено математическое ожидание и способы его увеличения, которые не совсем очевидны. Доказано, что математическое ожидание пропорционально сумме времен работы и ремонта одного из устройств.

Далее, в случае распределения времени работы и ремонта по показательному закону удалось рассмотреть слагаемые, входящие в функцию распределения. Показано, как в каждом конкретном случае можно построить функцию распределения.

Список литературы

[1] Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. М.: УРСС, 2001.

[2] Боровков А.А. Теория вероятностей. М.: Наука, 1986.

[3] Хинчин А.Я. Понятие энтропии в теории вероятностей // Успехи математических наук. 1953. Т. 8, № 6. С. 1126–1135.

[4] Ширяев А.Н. Вероятность. М.: Наука, 1980.

[5] Атласов И.В. Об эффективности работы нескольких взаимозаменяемых устройств // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2015. № 4. С. 85–101.

Библиографическая ссылка

Атласов И.В. Работа двух параллельных устройств с учетом времени их замены // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2016. № 2. С. 49–79.

Сведения об авторах

1. **Атласов Игорь Викторович**
профессор кафедры высшей математики Воронежского института Министерства внутренних дел Российской Федерации.

Россия, 394065, г. Воронеж, пр-т Патриотов, д. 53. E-mail: mail@vimvd.ru.

OPERATION OF TWO PARALLEL DEVICES WITH REGARD TO THE TIME OF THEIR REPLACEMENT

Atlasov Igor Victorovich
Professor at Higher Mathematics department,
Voronezh Institute of the Russian Interior Ministry.
Russia, 394065, Voronezh, 53 Patriotov av. E-mail: mail@vimvd.ru.

Received 07.04.2016, revised 02.06.2016.

This problem was the result of a generalization of the problem from the book «The course of the theory of probability» by B.V. Gnedenko. He examined work of the system consisting of two interchangeable devices. These devices work in the next order: the first device works first, then it falls out and while being repaired it is replaced by the second device. After that the second device falls out and is being repaired also. If the time of operation of the first device is less than time for repair for the second device, the operation continues with the first device. If not, then we consider that the system finished its work and overall time of work equals to the time of work of the first and second devices. If the time of operation of the second device is greater than time for repair of the first device then operation continues with the first device et cetera. The characteristic function of time of work of the system is built as a result. Using this characteristic function the expected value of time of work of the system is found and methods to increase it are offered. In the present work we consider a system consisting of two elements operating simultaneously. The work of the system is interrupted when we carry out repair of both elements. We construct a characteristic function for continuous time of work of the system. Recommendations for increasing its expected value are considered.

Keywords: period of work, characteristic function.

Bibliographic citation

Atlasov I.V. Operation of two parallel devices with regard to the time of their replacement. *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika* [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics], 2016, no. 2, pp. 49–79. (in Russian)

References

[1] Gnedenko B.V. *Kurs Teorii Veroyatnostei* [Probability Theory Course]. URSS Publ., Moscow, 2001. (in Russian)

[2] Borovkov A.A. *Teoriya Veroyatnostei* [Probability Theory]. Nauka Publ., Moscow, 1986. (in Russian)

[3] Khinchin A.Ya. The concept of entropy in the theory of probability. *Uspekhi Matematicheskikh Nauk* [Successes of Mathematical Sciences], 1953, vol. 8(6), pp. 1126–1135. (in Russian)

[4] Shiryaev A.N. *Veroyatnost* [Probability]. Nauka Publ., Moscow, 1980. (in Russian)

[5] Atlasov I.V. About efficiency of work of several interchangeable devices. *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya matematika* [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics], 2015, no. 4, pp. 85–101. (in Russian)