С. С. Платонов, О некоторых задачах теории приближения функций на бесконечномерном торе: аналоги теорем Джексона, *Алгебра и анализ*, 2014, том 26, выпуск 6, 99–120

Алгебра и анализ
Том 26 (2014), №6

О НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ ПРИБЛИЖЕНИЯ ФУНКЦИЙ НА БЕСКОНЕЧНОМЕРНОМ ТОРЕ: АНАЛОГИ ТЕОРЕМ ДЖЕКСОНА

© С. С. ПЛАТОНОВ

В работе рассматриваются некоторые вопросы теории приближения функций на бесконечномерном торе тригонометрическими полиномами. Основными результатами работы являются аналоги теорем Джексона об оценке наилучших приближений функции через модули непрерывности.

§1. Введение и формулировка основных результатов

Пусть G — компактная абелева группа (операцию в G будем задавать аддитивно), dx — мера Хаара на группе G. При $1 \leqslant p < \infty$ пусть $L_p(G)$ — лебегово пространство, состоящее из всех функций $f(x)$ (всюду, если не оговорено противное, функции комплекснозначные) на группе G, для которых конечна норма

$$\|f\|_p := \left(\int\limits_G |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p} \tag{1.1}$$

(функции рассматриваются с точностью до значений на множестве меры нуль). При $p = \infty$ будем считать, что нормированное пространство $L_\infty(G) = C(G)$ состоит из всех непрерывных функций на группе G и снабжается равномерной нормой

$$\|f\|_C = \|f\|_\infty := \sup_{x \in G} |f(x)|. \tag{1.2}$$

Характером группы G называется любая непрерывная комплекснозначная функция $\chi(x)$ на группе G, удовлетворяющая условиям: 1) $\chi(x+y) = \chi(x)\,\chi(y) \quad \forall x, y \in G$; 2) $|\chi(x)| = 1 \quad \forall x \in G$. Обозначим через $\widehat{G}$ множество всех характеров группы G. Хорошо известно, что множество $\widehat{G}$ является полной ортогональной системой в гильбертовом пространстве

Ключевые слова: приближение функций, теоремы Джексона, бесконечномерный тор, гармонический анализ на компактных абелевых группах.

$L_2(G)$. Характеры служат основой для построения гармонического анализа на компактных абелевых группах (и на локально компактных абелевых группах), см., например, [1, 2].

Линейные комбинации характеров могут использоваться в качестве средства приближения функций на группе G. Отметим некоторые частные случаи групп G, для которых рассматривались задачи теории приближения функций. Классическая теория приближения периодических функций n-переменных (см., например, [3]) соответствует случаю, когда группа G совпадает с n-мерным тором $\mathbb{T}^n$. Другим примером является двоичная группа Кантора, для которой система характеров может отождествляться с системой функций Уолша. Различные вопросы теории приближения функций линейными комбинациями функций Уолша рассмотрены в книге [4]. Для случая, когда G — произвольная нульмерная компактная абелева группа, некоторые задачи теории приближения рассматривались в книге [5].

В настоящей работе рассматривается случай, когда в качестве группы G берется бесконечномерный тор $\mathbb{T}^\infty$. Бесконечномерный тор представляет интерес как простейший пример бесконечномерной компактной абелевой группы. С другой стороны, гармонический анализ на бесконечномерном торе применяется в различных вопросах теории вероятностей и математической физики (см., например, [6–9]).

Будем считать, что одномерный тор (или окружность) это фактор-группа $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. Элементы из $\mathbb{T}$ имеют вид $x + 2\pi\mathbb{Z}$, где $x \in \mathbb{R}$. Будем обозначать элемент $x + 2\pi\mathbb{Z}$ через $\bar{x}$, при этом число x будем называть представителем элемента $\bar{x}$. В частности, $\bar{0}$ — нулевой элемент группы $\mathbb{T}$.

Пусть $\mathbb{T}^\infty$ — прямое произведение счетного числа групп $\mathbb{T}$. Элементами группы $\mathbb{T}^\infty$ являются последовательности $\mathbf{x} = \{\bar{x}_k\} = \{\bar{x}_k\}_{k=1}^\infty$, где $\bar{x}_k \in \mathbb{T}$. Снабженное тихоновской топологией множество $\mathbb{T}^\infty$ является компактной абелевой группой.

Пусть $d\mathbf{x}$ — элемент меры Хаара на группе $\mathbb{T}^\infty$, нормированной условием $\int_{\mathbb{T}^\infty} 1\,d\mathbf{x} = 1$. Банаховы пространства $L_p(\mathbb{T}^\infty)$ при $1 \leqslant p < \infty$ и $L_\infty(\mathbb{T}^\infty) = C(\mathbb{T}^\infty)$ являются частными случаями пространств $L_p(G)$ и $L_\infty(G)$, определенных выше.

Опишем характеры группы $\mathbb{T}^\infty$. Пусть $\mathbb{Z}^\infty$ — множество всех целочисленных последовательностей. Элементы из $\mathbb{Z}^\infty$ имеют вид $\mathbf{n} = \{n_k\}_{k=1}^\infty$, $n_k \in \mathbb{Z}$. Через $\mathbb{Z}^{(\infty)}$ обозначим подмножество в $\mathbb{Z}^\infty$, состоящее из всех последовательностей $\mathbf{n} = \{n_k\}$ у которых только конечное число элементов n_k отлично от 0. Если $\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^{(\infty)}$, то пусть $\nu(\mathbf{n})$ — такое наименьшее неотрицательное целое число, что $n_k = 0$ при $k > \nu(\mathbf{n})$.

Характеры группы $\mathbb{T}^\infty$ задаются формулами

$$\chi_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}) = \exp\left(i\left(\sum_{k=1}^{\infty} n_k x_k\right)\right), \tag{1.3}$$

где $i = \sqrt{-1}$, $\mathbf{n} = \{n_k\} \in \mathbb{Z}^{(\infty)}$, $\mathbf{x} = \{\bar{x}_k\} \in \mathbb{T}^\infty$.

Для $\mathbf{n} = \{n_k\} \in \mathbb{Z}^{(\infty)}$ пусть

$$|\mathbf{n}|_\infty = \max\{|n_k|, \ \ k \in \mathbb{N}\}. \tag{1.4}$$

Для любого $N \in \mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \dots\}$ обозначим через $\Pi_N^{(\infty)}$ подмножество в $\mathbb{Z}^{(\infty)}$, состоящее из всех $\mathbf{n}$, удовлетворяющих условиям $\nu(\mathbf{n}) \leqslant N$ и $|\mathbf{n}|_\infty \leqslant N$. Через $\mathcal{P}_N$ обозначим линейную оболочку функций $\chi_{\mathbf{n}}$ при $\mathbf{n} \in \Pi_N^{(\infty)}$. Тогда $\mathcal{P}_N$ является конечномерным линейным подпространством пространства $C(\mathbb{T}^\infty)$ размерности $(2N+1)^N$. Функции из $\mathcal{P}_N$ будем называть тригонометрическими полиномами степени N на группе $\mathbb{T}^\infty$.

Пусть $\mathcal{P} := \bigcup_{N=0}^{\infty} \mathcal{P}_N$. Функции из пространства $\mathcal{P}$ будут служить средством приближения для функций из нормированных пространств $L_p(\mathbb{T}^\infty)$. Из теоремы Стоуна – Вейерштрасса легко получить, что $\mathcal{P}$ является всюду плотным подмножеством в банаховом пространстве $L_p(\mathbb{T}^\infty)$ при любом $1 \leqslant p \leqslant \infty$ (подробнее см. в §2). Для любой функции $f \in L_p(\mathbb{T}^\infty)$ и для любого $N \in \mathbb{Z}_+$ наилучшее приближение $E_N(f)_p$ определяется формулой

$$E_N(f)_p := \inf\{\|f - \Phi\|_p : \ \Phi \in \mathcal{P}_N\}. \tag{1.5}$$

Для $\bar{s} \in \mathbb{T}$ пусть

$$|\bar{s}|_{\mathbb{T}} := \min_{m \in \mathbb{Z}} |s - 2\pi m|. \tag{1.6}$$

Если $\mathbf{x} = \{\bar{x}_k\} \in \mathbb{T}^\infty$, то полагаем

$$|\mathbf{x}| := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} |\bar{x}_k|_{\mathbb{T}}. \tag{1.7}$$

Функция $\mathbf{x} \mapsto |\mathbf{x}|$ задает квазинорму на группе $\mathbb{T}^\infty$, т. е. для нее выполняются условия: 1) $|\mathbf{x}| \geqslant 0$ и $|\mathbf{x}| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$; 2) $|-\mathbf{x}| = |\mathbf{x}|$; 3) $|\mathbf{x}+\mathbf{y}| \leqslant |\mathbf{x}| + |\mathbf{y}|$ для любых $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{T}^\infty$. С помощью квазинормы можно определить метрику на группе $\mathbb{T}^\infty$ формулой $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = |\mathbf{y} - \mathbf{x}|$. Тогда топология на группе $\mathbb{T}^\infty$ совпадает с топологией, порожденной метрикой ρ.

Для любой функции $f(\mathbf{x})$ на группе $\mathbb{T}^\infty$ и для любого $\mathbf{h} \in \mathbb{T}^\infty$ пусть

$$(\tau_{\mathbf{h}} f)(\mathbf{x}) := f(\mathbf{x} - \mathbf{h}).$$

Оператор $\tau_{\mathbf{h}}$ называется оператором сдвига. Операторы $\tau_{\mathbf{h}}$ являются изометрическими операторами в банаховых пространствах $L_p(\mathbb{T}^\infty)$.

Конечные разности $\Delta_{\mathbf{h}}^m f$ порядка $m \in \mathbb{N}$ с шагом $\mathbf{h} \in \mathbb{T}^\infty$ от функции f определяются формулами

$$\Delta_{\mathbf{h}}^1 f = \Delta_{\mathbf{h}} f := f - \tau_{\mathbf{h}} f \text{ при } m = 1; \tag{1.8}$$

$$\Delta_{\mathbf{h}}^m f := \Delta_{\mathbf{h}}(\Delta_{\mathbf{h}}^{m-1} f) = \sum_{j=0}^{m} (-1)^m \binom{m}{j} \tau_{j\mathbf{h}} f \text{ при } m \geqslant 2, \tag{1.9}$$

где $\binom{m}{j}$ — биномиальный коэффициент.

Для любой функции $f \in L_p(\mathbb{T}^\infty)$ и для любого числа $m \in \mathbb{N}$ определим модуль непрерывности порядка m формулой

$$\omega_m(f;\delta)_p := \sup\{\|\Delta_{\mathbf{h}}^m f\|_p : \mathbf{h} \in \mathbb{T}^\infty, |\mathbf{h}| \leqslant \delta\}, \tag{1.10}$$

где $\delta > 0$ — произвольное число.

Следующая теорема является аналогом теоремы Джексона классической теории приближения функций (см., например, [3]).

Теорема 1.1. *Пусть функция f принадлежит пространству $L_p(\mathbb{T}^\infty)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, m — произвольное натуральное число. Тогда для любого $N = 1, 2, 3, \ldots$ справедливо неравенство*

$$E_N(f)_p \leqslant c_1\, \omega_m\Bigl(f; \frac{1}{N}\Bigr)_p, \tag{1.11}$$

где $c_1 = c_1(m)$ — некоторая постоянная.

Для любого $d \in \mathbb{N}$ пусть $\mathbb{T}^d$ — прямое произведение d экземпляров группы $\mathbb{T}$ (d-мерный тор). Элементами $\mathbb{T}^d$ служат строки $(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_d)$, $\bar{x}_j \in \mathbb{T}$, $1 \leqslant j \leqslant d$. Естественным образом $\mathbb{T}^d$ является компактным топологическим пространством и гладким многообразием. Пусть $C(\mathbb{T}^d)$ — множество всех непрерывных функций на $\mathbb{T}^d$, $C^\infty(\mathbb{T}^d)$ — множество всех бесконечно дифференцируемых функций на $\mathbb{T}^d$.

Для любой функции $g \in C(\mathbb{T}^d)$ определим функцию $\pi_d(g) \in C(\mathbb{T}^\infty)$ формулой

$$\pi_d(g)(\mathbf{x}) := g(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_d), \quad \mathbf{x} = \{\bar{x}_k\} \in \mathbb{T}^\infty. \tag{1.12}$$

Получим линейное отображение

$$\pi_d : C(\mathbb{T}^d) \mapsto C(\mathbb{T}^\infty).$$

Определим следующие подпространства пространства $C(\mathbb{T}^\infty)$:

$$\mathcal{E}_d(\mathbb{T}^\infty) := \pi_d(C^\infty(\mathbb{T}^d)), \tag{1.13}$$

$$\mathcal{E}(\mathbb{T}^\infty) := \bigcup_{d=1}^{\infty} \mathcal{E}_d(\mathbb{T}^\infty). \tag{1.14}$$

Функции из пространства $\mathcal{E}(\mathbb{T}^\infty)$ будем называть гладкими функциями на группе $\mathbb{T}^\infty$. Отметим, что в работе Брюа [10] определено пространство гладких функций $\mathcal{E}(G)$ для любой локально компактной абелевой группы G. Пространство $\mathcal{E}(\mathbb{T}^\infty)$ является частным случаем пространства Брюа $\mathcal{E}(G)$ при $G = \mathbb{T}^\infty$.

Через $\mathbb{Z}_+^{(\infty)}$ обозначим множество всех последовательностей $\boldsymbol{\alpha} = \{\alpha_k\}_{k=1}^\infty$ неотрицательных целых чисел α_k, у которых только конечное число элементов α_k отлично от нуля. Если $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{Z}_+^{(\infty)}$, то пусть

$$|\boldsymbol{\alpha}| := \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k, \tag{1.15}$$

а $\nu(\boldsymbol{\alpha})$ — такое наименьшее неотрицательное целое число, что $\alpha_k = 0$ при $k > \nu(\boldsymbol{\alpha})$.

Для любой функции $g \in C^\infty(\mathbb{T}^d)$ и для любого $k \in \mathbb{N}$ пусть

$$(\partial_k g)(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_d) := \frac{\partial g}{\partial x_k}(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_d)$$

— частная производная по переменной $\bar{x}_k$ (если $k > d$, то $\partial_k g = 0$). Если $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{Z}_+^{(\infty)}$ и $N = \nu(\boldsymbol{\alpha})$, то полагаем

$$\partial^{(\boldsymbol{\alpha})} g := \partial_1^{\alpha_1} \ldots \partial_N^{\alpha_N} g.$$

Пусть $f \in \mathcal{E}(\mathbb{T}^\infty)$, тогда функция f имеет вид $f = \pi_d(g)$ для некоторых $d \in \mathbb{N}$ и $g \in C^\infty(\mathbb{T}^d)$. Если $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{Z}_+^{(\infty)}$, то по определению полагаем

$$\partial^{(\boldsymbol{\alpha})} f := \pi_d(\partial^{(\boldsymbol{\alpha})} g). \tag{1.16}$$

Оператор $\partial^{(\boldsymbol{\alpha})}$ является линейным оператором на пространстве $\mathcal{E}(\mathbb{T}^\infty)$. Будем называть оператор $\partial^{(\boldsymbol{\alpha})}$ оператором частной производной. Очевидно, что $\partial^{(\boldsymbol{\alpha})} f = 0$, если $f \in \mathcal{E}_d(\mathbb{T}^\infty)$ и $\nu(\boldsymbol{\alpha}) > d$. Отметим также, что $\partial^{(\mathbf{0})} f = f$.

Пусть $r \in \mathbb{N}$. Для любой функции $f \in \mathcal{E}(\mathbb{T}^\infty)$ определим норму

$$\|f\|_p^{(r)} := \sum_{\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{Z}_+^{(\infty)},\ |\boldsymbol{\alpha}| \leqslant r} 2^{\mathfrak{n}(\boldsymbol{\alpha})} \|\partial^{(\boldsymbol{\alpha})} f\|_p, \tag{1.17}$$

где

$$\mathfrak{n}(\boldsymbol{\alpha}) := \sum_{k=1}^{\infty} k \alpha_k. \tag{1.18}$$

Так как $f \in \mathcal{E}(\mathbb{T}^\infty)$, то ряды в правых частях формул (1.17) и (1.18) содержат только конечное число ненулевых слагаемых.

Через $W_p^{(r)}(\mathbb{T}^\infty)$ обозначим банахово пространство, которое получается пополнением пространства $\mathcal{E}(\mathbb{T}^\infty)$ по норме $\|\cdot\|_p^{(r)}$. Пространство $W_p^{(r)}(\mathbb{T}^\infty)$ будем называть пространством Соболева порядка r на группе $\mathbb{T}^\infty$. Так как $\|f\|_p \leqslant \|f\|_p^{(r)}$ и пространство $L_p(\mathbb{T}^\infty)$ полное, то возникает естественное вложение

$$W_p^{(r)}(\mathbb{T}^\infty) \subseteq L_p(\mathbb{T}^\infty). \tag{1.19}$$

Если $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{Z}_+^{(\infty)}$ и $|\boldsymbol{\alpha}| \leqslant r$, то отображение $\partial^{(\boldsymbol{\alpha})} : f \mapsto \partial^{(\boldsymbol{\alpha})} f$ из пространства $\mathcal{E}(\mathbb{T}^\infty)$ в пространство $\mathcal{E}(\mathbb{T}^\infty)$ продолжается по непрерывности до непрерывного отображения из банахова пространства $W_p^{(r)}(\mathbb{T}^\infty)$ в банахово пространство $L_p(\mathbb{T}^\infty)$. Продолженное отображение будем также обозначать $\partial^{(\boldsymbol{\alpha})}$. Если $f \in W_p^{(r)}(\mathbb{T}^\infty)$, то функцию $\partial^{(\boldsymbol{\alpha})} f$ будем называть обобщенной частной производной функции f.

Пусть $m, r \in \mathbb{N}$, $f \in W_p^{(r)}(\mathbb{T}^\infty)$. Назовем дифференциальным модулем непрерывности порядка (m, r) от функции f следующую функцию:

$$\omega_m^{(r)}(f;\delta)_p := \sum_{\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{Z}_+^{(\infty)},\ |\boldsymbol{\alpha}| = r} 2^{\mathfrak{n}(\boldsymbol{\alpha})} \omega_m(\partial^{(\boldsymbol{\alpha})} f;\delta)_p, \quad \delta > 0, \tag{1.20}$$

где $\omega_m(f;\delta)_p$ — модуль непрерывности порядка m (см. (1.10)), $\mathfrak{n}(\boldsymbol{\alpha})$ определено формулой (1.18). Нетрудно видеть, что $\omega_m^{(r)}(f;\delta)_p \leqslant 2^m \|f\|_p^{(r)}$, поэтому ряд в правой части формулы (1.20) сходится. Другие свойства дифференциального модуля непрерывности $\omega_m^{(r)}(f;\delta)_p$ см. в §2.

Следующая теорема является аналогом теоремы Джексона для дифференцируемых функций.

Теорема 1.2. *Пусть функция f принадлежит пространству Соболева $W_p^{(r)}(\mathbb{T}^\infty)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $r \in \mathbb{N}$, и m — произвольное натуральное число. Тогда для любого $N = 1, 2, 3, \ldots$ справедливо неравенство*

$$E_N(f)_p \leqslant c_2 \frac{1}{N^r} \omega_m^{(r)}\Big(f; \frac{1}{N}\Big)_p, \tag{1.21}$$

где $c_2 = c_2(m, r)$ — некоторая постоянная.

Доказательство теорем 1.1 и 1.2 является основной целью настоящей работы. Основные идеи доказательств брались из классических доказательств теорем Джексона (см., например, [3]), но при этом приходится преодолевать ряд трудностей, связанных с бесконечномерностью группы $\mathbb{T}^\infty$.

Автор выражает благодарность рецензенту за полезные замечания.

§2. Доказательства основных теорем

В этом параграфе приводятся доказательства теорем 1.1 и 1.2. Предварительно рассматриваются вспомогательные результаты о свойствах модулей непрерывности, свойствах соболевских пространств $W_p^{(r)}(\mathbb{T}^\infty)$ и о некоторых специальных тригонометрических полиномах на группе $\mathbb{T}^\infty$. Всюду далее $c_1, c_2, \ldots$ — положительные постоянные, вообще говоря, разные в разных местах, которые могут зависеть от несущественных параметров (обычно эти параметры указываются).

Любой функции $f \in L_1(\mathbb{T}^\infty)$ можно сопоставить формальный ряд Фурье по системе характеров $\chi_{\mathbf{n}}$, $\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^{(\infty)}$:

$$f \sim \sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{Z}^{(\infty)}} c(f;\mathbf{n})\chi_{\mathbf{n}}, \tag{2.1}$$

где

$$c(f;\mathbf{n}) := \int\limits_{\mathbb{T}^\infty} f(\mathbf{x})\,\chi_{\mathbf{n}}(-\mathbf{x})\,d\mathbf{x} \tag{2.2}$$

— коэффициенты Фурье. Так как группа $\mathbb{T}^\infty$ компактная, то $L_p(\mathbb{T}^\infty) \subseteq L_1(\mathbb{T}^\infty)$ при любом $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Поэтому ряд Фурье определен для любой функции $f \in L_p(\mathbb{T}^\infty)$. Отметим, что любая функция $f \in L_p(\mathbb{T}^\infty)$ однозначно определяется по набору ее коэффициентов Фурье (это справедливо для любой локально компактной абелевой группы, см., например, [11, гл. II, §1, п. 2]).

Пусть $\tau_{\mathbf{h}}$ — оператор сдвига, т. е. $(\tau_{\mathbf{h}} f)(\mathbf{x}) := f(\mathbf{x} - \mathbf{h})$, $\mathbf{h}, \mathbf{x} \in \mathbb{T}^\infty$. Из определения коэффициентов Фурье и из инвариантности меры Хаара легко получить, что

$$c(\tau_{\mathbf{h}} f;\mathbf{n}) = \chi_{\mathbf{n}}(-\mathbf{h})\,c(f;\mathbf{n}). \tag{2.3}$$

Используя свойство (2.3) и определение конечной разности $\Delta_{\mathbf{h}}^m f$ (см. (1.8) и (1.9)), получим, что

$$c(\Delta_{\mathbf{h}}^m f;\mathbf{n}) = (1 - \chi_{\mathbf{n}}(-\mathbf{h}))^m c(f;\mathbf{n}). \tag{2.4}$$

Напомним, что любой элемент 1-мерного тора $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ имеет вид $\bar{s} = s + 2\pi\mathbb{Z}$, $s \in \mathbb{R}$. На группе $\mathbb{T}$ определена функция

$$|\bar{s}|_{\mathbb{T}} := \min\{|s - 2\pi m| : m \in \mathbb{Z}\}.$$

Назовем число $s_0 \in \mathbb{R}$ каноническим представителем числа $\bar{s}$, если $s_0 \in (-\pi, \pi]$ и $s_0 - s \in 2\pi\mathbb{Z}$. Очевидно, что $|\bar{s}|_{\mathbb{T}} = |s_0|$.

Так как $\mathbb{T}$ — абелева группа, то стандартным образом $\mathbb{T}$ становится $\mathbb{Z}$-модулем, т. е. для любых $n \in \mathbb{Z}$ и $\bar{s} \in \mathbb{T}$ определено произведение $n\bar{s} \in \mathbb{T}$.

Определим еще произведение элементов из $\mathbb{T}$ на действительные числа из отрезка $[0,1]$. Если $\lambda \in [0,1]$ и $\bar{s} \in \mathbb{T}$, то полагаем

$$\lambda\bar{s} := \lambda s_0 + 2\pi\mathbb{Z}, \tag{2.5}$$

где s_0 — канонический представитель элемента $\bar{s}$.

Из определения (2.5) следует, что

$$n\Big(\frac{1}{n}\bar{s}\Big) = \bar{s} \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{2.6}$$

Легко видеть, что для функции $|\cdot|_{\mathbb{T}}$ выполняются следующие свойства (всюду $\bar{s} \in \mathbb{T}$, $\lambda \in [0,1]$):

1) $|\bar{s}|_{\mathbb{T}} \geqslant 0$ и $|\bar{s}|_{\mathbb{T}} = 0 \Leftrightarrow \bar{s} = \bar{0}$;
2) $|-\bar{s}|_{\mathbb{T}} = |\bar{s}|_{\mathbb{T}}$;
3) $|\bar{s}_1 + \bar{s}_2|_{\mathbb{T}} \leqslant |\bar{s}_1|_{\mathbb{T}} + |\bar{s}_2|_{\mathbb{T}} \quad \forall \bar{s}_1, \bar{s}_2 \in \mathbb{T}$;
4) $|\lambda\bar{s}|_{\mathbb{T}} = \lambda|\bar{s}|_{\mathbb{T}}$.

Из свойств 1)–3) вытекает, что функция $|\cdot|_{\mathbb{T}}$ является квазинормой на абелевой группе $\mathbb{T}$.

Операцию умножения на числа $\lambda \in [0,1]$ можно перенести с $\mathbb{T}$ на $\mathbb{T}^\infty$: если $\mathbf{x} = \{\bar{x}_k\} \in \mathbb{T}^\infty$, $\lambda \in [0,1]$, то полагаем

$$\lambda\mathbf{x} := \{\lambda\bar{x}_k\}.$$

Тогда $\lambda\mathbf{x} \in \mathbb{T}^\infty$ и справедливо равенство

$$n\Big(\frac{1}{n}\mathbf{x}\Big) = \mathbf{x} \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{2.7}$$

Для любого $\mathbf{x} \in \mathbb{T}^\infty$ число $|\mathbf{x}|$ определено по формуле (1.7). Из свойств 1)–4) квазинормы $|\cdot|_{\mathbb{T}}$ вытекает, что функция $\mathbf{x} \mapsto |\mathbf{x}|$ задает квазинорму на группе $\mathbb{T}^\infty$ и удовлетворяет условию

$$|\lambda\mathbf{x}| = \lambda|\mathbf{x}|, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{T}^\infty, \ \lambda \in [0,1]. \tag{2.8}$$

Для любой функции $f \in L_p(\mathbb{T}^\infty)$ конечная разность $\Delta_{\mathbf{h}}^m f$, $\mathbf{h} \in \mathbb{T}^\infty$, $m \in \mathbb{N}$, и модуль непрерывности $\omega_m(f;\delta)_p$, $\delta > 0$, определены формулами (1.8), (1.9) и (1.10). Для краткости пусть $\omega_m(\delta) := \omega_m(f;\delta)_p$.

Предложение 2.1 (свойства модуля непрерывности).

1°. *Функция $\omega_m(\delta)$ неубывающая по δ.*

2°. *При $l \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство*

$$\omega_m(l\delta) \leqslant l^m \omega_m(\delta). \tag{2.9}$$

3°. *Для любого действительного числа $t > 0$ справедливо неравенство*

$$\omega_m(t\delta) \leqslant (t+1)^m \omega_m(\delta). \tag{2.10}$$

Доказательство.

1) П. 1° следует из определения $\omega_m(\delta)$.

2) Пусть $\mathbf{h} \in \mathbb{T}^\infty$, $|\mathbf{h}| \leqslant l\delta$. Используя (2.7) представим $\mathbf{h}$ в виде $\mathbf{h} = l\mathbf{u}$, где $\mathbf{u} = \frac{1}{l}\mathbf{h} \in \mathbb{T}^\infty$. Тогда из (2.8) следует, что $|\mathbf{u}| \leqslant \delta$.

Заметим, что

$$\Delta_{l\mathbf{u}} f = \sum_{j=0}^{l-1} \Delta_{\mathbf{u}} \tau_{j\mathbf{u}} f. \tag{2.11}$$

Из (2.11) индукцией по m получаем формулу

$$\Delta_{l\mathbf{u}}^m f = \sum_{j_1=0}^{l-1} \cdots \sum_{j_m=0}^{l-1} \Delta_{\mathbf{u}}^m \tau_{(j_1+\cdots+j_m)\mathbf{u}} f. \tag{2.12}$$

Так как при любом $\mathbf{v} \in \mathbb{T}^\infty$ оператор $\tau_{\mathbf{v}}$ является изометрическим оператором в пространстве $L_p(\mathbb{T}^\infty)$, то

$$\|\Delta_{\mathbf{u}}^m \tau_{\mathbf{v}} f\|_p = \|\tau_{\mathbf{v}} \Delta_{\mathbf{u}}^m f\|_p = \|\Delta_{\mathbf{u}}^m f\|_p.$$

Тогда из (2.12) следует, что

$$\|\Delta_{\mathbf{h}}^m f\|_p = \|\Delta_{l\mathbf{u}}^m f\|_p \leqslant l^m \|\Delta_{\mathbf{u}}^m f\|_p \leqslant l^m \omega_m(\delta), \tag{2.13}$$

откуда вытекает неравенство (2.9).

3) Пусть $t > 0$. Выберем такое число $l \in \mathbb{Z}_+$, что $l \leqslant t < l+1$. Тогда из свойств 1° и 2° модуля непрерывности вытекает

$$\omega_m(t\delta) \leqslant \omega_m((l+1)\delta) \leqslant (l+1)^m \omega_m(\delta) \leqslant (t+1)^m \omega_m(\delta),$$

что доказывает неравенство (2.10). □

Через $d\mu(\bar{t})$ обозначим нормированную меру Хаара на 1-мерном торе $\mathbb{T}$. Если $f(\bar{t}) \in C(\mathbb{T})$, то

$$\int_{\mathbb{T}} f(\bar{t})\, d\mu(\bar{t}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, dt. \tag{2.14}$$

На группе $\mathbb{T}^\infty$ мера Хаара $d\mathbf{x}$ представляет собой счетное произведение нормированных мер Хаара на группе $\mathbb{T}$. Из общей конструкции интеграла на произвольных произведениях компактных хаусдорфовых пространств (см., например, [1, т. 1, гл. 3, п. (3.15)]) следует, что если $f \in C(\mathbb{T}^\infty)$ и $f = \pi_d(g)$, где $g(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_d) \in C(\mathbb{T}^d)$, то

$$\int_{\mathbb{T}^\infty} f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{T}} \dots \int_{\mathbb{T}} g(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_d)\, d\mu(\bar{x}_1) \dots d\mu(\bar{x}_d). \tag{2.15}$$

Пусть σ — фиксированное натуральное число (оно будет уточнено в дальнейшем). Для любого $n \in \mathbb{N}$ пусть

$$K_n(t) := \frac{1}{A_n}\Big(\frac{\sin\frac{nt}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\Big)^{2\sigma}, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{2.16}$$

где A_n — нормировочный множитель такой, что

$$\int_{-\pi}^{\pi} K_n(t)\,dt = 2\pi. \tag{2.17}$$

Функция $K_n(t)$ называется ядром типа Джексона порядка n.

Отметим следующие, хорошо известные свойства ядер типа Джексона (см., например, [12, гл. II, §3]):

а) $K_n(t)$ является четным неотрицательным тригонометрическим полиномом на $\mathbb{R}$ степени $\sigma(n-1)$;

б) при любом натуральном $\rho \leqslant 2\sigma - 2$ справедливо неравенство

$$\int_{-\pi}^{\pi} K_n(t)\,|t|^{\rho}\,dt \leqslant \frac{a_\rho}{n^\rho}, \tag{2.18}$$

где a_ρ — не зависящая от n постоянная.

Отметим, что (2.17) и (2.18) можно также записать в виде

$$\int_{\mathbb{T}} K_n(\bar{t})\,d\mu(\bar{t}) = 1, \tag{2.19}$$

$$\int_{\mathbb{T}} K_n(\bar{t})\,|\bar{t}|_{\mathbb{T}}^{\rho}\,d\mu(\bar{t}) \leqslant \frac{a_\rho}{n^\rho}. \tag{2.20}$$

Для любого натурального числа N определим функцию $\mathcal{J}_N(\mathbf{x})$ на группе $\mathbb{T}^\infty$ формулой

$$\mathcal{J}_N(\mathbf{x}) := \prod_{s=1}^{N-1} K_N(\bar{x}_s), \quad \mathbf{x} = \{\bar{x}_k\} \in \mathbb{T}^\infty. \tag{2.21}$$

Так как $K_N(x_s)$ является тригонометрическим полиномом на $\mathbb{R}$ степени $\sigma(N-1)$, то $\mathcal{J}_N(\mathbf{x}) \in \mathcal{P}_{\sigma(N-1)}$, т. е. $\mathcal{J}_N(\mathbf{x})$ является тригонометрическим полиномом степени $\sigma(N-1)$ на $\mathbb{T}^\infty$. Функция $\mathcal{J}_N(\mathbf{x})$ неотрицательная, и из (2.19) и (2.15) вытекает, что

$$\int_{\mathbb{T}^\infty} \mathcal{J}_N(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = 1. \tag{2.22}$$

Пусть $f \in L_p(\mathbb{T}^\infty)$. Рассмотрим функцию

$$T_N(\mathbf{x}) = T_N(f;\mathbf{x}) := \int\limits_{\mathbb{T}^\infty} (f(\mathbf{x}) - \Delta_{\mathbf{h}}^m f(\mathbf{x}))\mathcal{J}_N(\mathbf{h})\,d\mathbf{h}. \tag{2.23}$$

Предложение 2.2. *Функция $T_N(\mathbf{x})$ является тригонометрическим полиномом степени $\sigma(N-1)$ на группе $\mathbb{T}^\infty$ (т. е. $T_N(\mathbf{x}) \in \mathcal{P}_{\sigma(N-1)}$).*

Доказательство. Для любых функций $f(\mathbf{x})$ и $g(\mathbf{x})$ на группе $\mathbb{T}^\infty$ таких, что $f(\mathbf{x})g(\mathbf{x}) \in L_1(\mathbb{T}^\infty)$, определим скалярное произведение $\langle f, g\rangle$ формулой

$$\langle f, g\rangle := \int\limits_{\mathbb{T}^\infty} f(\mathbf{x})\overline{g(\mathbf{x})}\,d\mathbf{x}, \tag{2.24}$$

где $\overline{g(\mathbf{x})}$ — число, комплексно сопряженное числу $g(\mathbf{x})$. В частности, $\langle f, g\rangle$ является обычным скалярным произведением в гильбертовом пространстве $L_2(\mathbb{T}^\infty)$.

Учитывая, что $\chi_{\mathbf{n}}(-\mathbf{x}) = \overline{\chi_{\mathbf{n}}(\mathbf{x})}$, коэффициент Фурье функции $f \in L_p(\mathbb{T}^\infty)$ можно записать в виде

$$c(f;\mathbf{n}) = \langle f, \chi_{\mathbf{n}}\rangle, \quad \mathbf{n} \in \mathbb{Z}^{(\infty)}. \tag{2.25}$$

Найдем коэффициенты Фурье функции T_N. По определению

$$\begin{aligned}
c(T_N;\mathbf{n}) &= \int\limits_{\mathbb{T}^\infty} T_N(\mathbf{x})\chi_{\mathbf{n}}(-\mathbf{x})\,d\mathbf{x} \\
&= \int\limits_{\mathbb{T}^\infty}\int\limits_{\mathbb{T}^\infty} (f(\mathbf{x}) - \Delta_{\mathbf{h}}^m f(\mathbf{x}))\mathcal{J}_N(\mathbf{h})\chi_{\mathbf{n}}(-\mathbf{x})\,d\mathbf{h}\,d\mathbf{x} \\
&= \int\limits_{\mathbb{T}^\infty} \langle f - \Delta_{\mathbf{h}}^m f, \chi_{\mathbf{n}}\rangle \mathcal{J}_N(\mathbf{h})\,d\mathbf{h} = \int\limits_{\mathbb{T}^\infty} c(f - \Delta_{\mathbf{h}}^m f;\mathbf{n})\mathcal{J}_N(\mathbf{h})\,d\mathbf{h} \\
&= c(f;\mathbf{n})\int\limits_{\mathbb{T}^\infty} (1 - (1 - \chi_{\mathbf{n}}(-\mathbf{h}))^m)\mathcal{J}_N(\mathbf{h})\,d\mathbf{h} \\
&= c(f;\mathbf{n})\langle \mathcal{J}_N, (1 - (1 - \chi_{\mathbf{n}})^m)\rangle.
\end{aligned}$$

При этом использовано свойство (2.4).

Так как $\mathcal{J}_N \in \mathcal{P}_{\sigma(N-1)}$, то функция $\mathcal{J}_N$ является линейной комбинацией характеров $\chi_{\mathbf{a}}$ при $\mathbf{a} \in \Pi_{\sigma(N-1)}^{(\infty)}$. С другой стороны, функция

$$1 - (1 - \chi_{\mathbf{n}})^m = \sum_{j=1}^{m} (-1)^{j+1}\binom{m}{j}\chi_{j\mathbf{n}}$$

является линейной комбинацией характеров $\chi_{j\mathbf{n}}$ при $j = 1, 2, \ldots, m$. Если $\mathbf{n} \notin \Pi^{(\infty)}_{\sigma(N-1)}$, то очевидно, что и $j\mathbf{n} \notin \Pi^{(\infty)}_{\sigma(N-1)}$ при $j \in \mathbb{N}$.

Из ортогональности различных характеров следует, что

$$\langle \mathcal{J}_N, (1-(1-\chi_{\mathbf{n}})^m\rangle = 0$$

при $\mathbf{n} \notin \Pi^{(\infty)}_{\sigma(N-1)}$, поэтому ненулевые коэффициенты $c(T_N; \mathbf{n})$ могут быть только при $\mathbf{n} \in \Pi^{(\infty)}_{\sigma(N-1)}$, откуда вытекает, что $T_N \in \mathcal{P}_{\sigma(N-1)}$. □

Пространство $\mathcal{E}(\mathbb{T}^\infty)$ гладких функций на группе $\mathbb{T}^\infty$ и пространства Соболева $W^{(r)}_p(\mathbb{T}^\infty)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $r \in \mathbb{N}$, определены в §1. Пусть $\|\cdot\|^{(r)}_p$ — норма в пространстве $W^{(r)}_p(\mathbb{T}^\infty)$. Если $f \in \mathcal{E}(\mathbb{T}^\infty)$, то $\|f\|^{(r)}_p$ задается формулой (1.17). В общем случае, при $f \in W^{(r)}_p(\mathbb{T}^\infty)$, формула (1.17) также справедлива, если $\partial^{(\boldsymbol{\alpha})}$ — обобщенная частная производная. Дополнительно будем считать, что

$$W^{(0)}_p(\mathbb{T}^\infty) := L_p(\mathbb{T}^\infty), \quad \|f\|^{(0)}_p := \|f\|_p. \tag{2.26}$$

Для любого $s \in \mathbb{Z}_+$, удовлетворяющего условию $s \leqslant r$, определим полунорму $|\cdot|^{(s)}_p$ на пространстве $W^{(r)}_p(\mathbb{T}^\infty)$ формулой

$$|f|^{(s)}_p := \sum_{\boldsymbol{\alpha}\in\mathbb{Z}^{(\infty)}_+,\ |\boldsymbol{\alpha}|=s} 2^{\mathfrak{n}(\boldsymbol{\alpha})}\|\partial^{(\boldsymbol{\alpha})} f\|_p, \tag{2.27}$$

где $f \in W^{(r)}_p(\mathbb{T}^\infty)$, $\mathfrak{n}(\boldsymbol{\alpha})$ определено в (1.18). Из определения нормы в пространстве $W^{(r)}_p(\mathbb{T}^\infty)$ (см. (1.17)) вытекает следующее равенство:

$$\|f\|^{(r)}_p = \sum_{s=0}^{r} |f|^{(s)}_p. \tag{2.28}$$

Лемма 2.1. *Для любой функции $f \in W^{(r)}_p(\mathbb{T}^\infty)$ и для любого $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{Z}^{(\infty)}_+$ с $|\boldsymbol{\alpha}| \leqslant s \leqslant r$ справедливо неравенство*

$$|\partial^{(\boldsymbol{\alpha})} f|^{(s-|\boldsymbol{\alpha}|)}_p \leqslant 2^{-\mathfrak{n}(\boldsymbol{\alpha})}|f|^{(s)}_p. \tag{2.29}$$

Доказательство. Пусть $f \in \mathcal{E}(\mathbb{T}^\infty)$. Из определения $|\cdot|_p^{(s)}$ и из очевидного равенства $\mathfrak{n}(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}) = \mathfrak{n}(\boldsymbol{\alpha}) + \mathfrak{n}(\boldsymbol{\beta})$ для $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in \mathbb{Z}_+^{(\infty)}$ получим

$$\begin{aligned} |\partial^{(\boldsymbol{\alpha})} f|_p^{(s-|\boldsymbol{\alpha}|)} &= \sum_{\boldsymbol{\beta}\in\mathbb{Z}_+^{(\infty)},\, |\boldsymbol{\beta}|=s-|\boldsymbol{\alpha}|} 2^{\mathfrak{n}(\boldsymbol{\beta})} \|\partial^{(\boldsymbol{\beta})}\partial^{(\boldsymbol{\alpha})} f\|_p \\ &= 2^{-\mathfrak{n}(\boldsymbol{\alpha})} \sum_{\boldsymbol{\beta}\in\mathbb{Z}_+^{(\infty)},\, |\boldsymbol{\beta}|=s-|\boldsymbol{\alpha}|} 2^{\mathfrak{n}(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})} \|\partial^{(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})} f\|_p \\ &\leqslant 2^{-\mathfrak{n}(\boldsymbol{\alpha})} \sum_{\boldsymbol{\gamma}\in\mathbb{Z}_+^{(\infty)},\, |\boldsymbol{\gamma}|=s} 2^{\mathfrak{n}(\boldsymbol{\gamma})} \|\partial^{(\boldsymbol{\gamma})} f\|_p = 2^{-\mathfrak{n}(\boldsymbol{\alpha})} |f|_p^{(s)}. \end{aligned}$$

Тем самым доказана справедливость неравенства (2.29) для $f \in \mathcal{E}(\mathbb{T}^\infty)$. Так как $\mathcal{E}(\mathbb{T}^\infty)$ является всюду плотным подпространством в $W_p^{(r)}(\mathbb{T}^\infty)$ и оператор $\partial^{(\boldsymbol{\alpha})}$ на $W_p^{(r)}(\mathbb{T}^\infty)$ получается продолжением по непрерывности оператора $\partial^{(\boldsymbol{\alpha})}$ с подпространства $\mathcal{E}(\mathbb{T}^\infty)$, то неравенство (2.29) будет справедливо и при $f \in W_p^{(r)}(\mathbb{T}^\infty)$. □

Следствие 2.1. *Для любой функции $f \in W_p^{(r)}(\mathbb{T}^\infty)$ и для любого $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{Z}_+^{(\infty)}$ с $|\boldsymbol{\alpha}| \leqslant r$ справедливо неравенство*

$$\|\partial^{(\boldsymbol{\alpha})} f\|_p^{(r-|\boldsymbol{\alpha}|)} \leqslant 2^{-\mathfrak{n}(\boldsymbol{\alpha})} \|f\|_p^{(r)}. \tag{2.30}$$

Доказательство. Используя равенство (2.28) и неравенство (2.29), получим

$$\begin{aligned} \|\partial^{(\boldsymbol{\alpha})} f\|_p^{(r-|\boldsymbol{\alpha}|)} &= \sum_{s=0}^{r-|\boldsymbol{\alpha}|} |\partial^{(\boldsymbol{\alpha})} f|_p^{(s)} = \sum_{s=0}^{r-|\boldsymbol{\alpha}|} |\partial^{(\boldsymbol{\alpha})} f|_p^{(s+|\boldsymbol{\alpha}|-|\boldsymbol{\alpha}|)} \\ &\leqslant \sum_{s=0}^{r-|\boldsymbol{\alpha}|} 2^{-\mathfrak{n}(\boldsymbol{\alpha})} |f|_p^{(s+|\boldsymbol{\alpha}|)} = 2^{-\mathfrak{n}(\boldsymbol{\alpha})} \sum_{s=|\boldsymbol{\alpha}|}^{r} |f|_p^{(s)} \leqslant 2^{-\mathfrak{n}(\boldsymbol{\alpha})} \|f\|_p^{(r)}, \end{aligned}$$

что доказывает (2.30). □

Из неравенства (2.30) сразу получаем следующее

Следствие 2.2. *Если $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{Z}_+^{(\infty)}$ и $|\boldsymbol{\alpha}| \leqslant r$, то оператор $\partial^{(\boldsymbol{\alpha})}$ является линейным непрерывным оператором из банахова пространства $W_p^{(r)}(\mathbb{T}^\infty)$ в банахово пространство $W_p^{(r-|\boldsymbol{\alpha}|)}(\mathbb{T}^\infty)$.*

Оператор сдвига $\tau_{\mathbf{h}}$ является изометрическим оператором в банаховом пространстве $L_p(\mathbb{T}^\infty)$. Так как $W_p^{(r)}(\mathbb{T}^\infty) \subseteq L_p(\mathbb{T}^\infty)$, то оператор $\tau_{\mathbf{h}}$ может применяться и к функциям из пространства $W_p^{(r)}(\mathbb{T}^\infty)$.

Лемма 2.2.

1°. *Для любого* $\mathbf{h} \in \mathbb{T}^\infty$ *оператор* $\tau_{\mathbf{h}}$ *переводит пространство* $W_p^{(r)}(\mathbb{T}^\infty)$ *в себя и является изометрическим оператором в банаховом пространстве* $W_p^{(r)}(\mathbb{T}^\infty)$.

2°. *Если* $f \in W_p^{(r)}(\mathbb{T}^\infty)$, *то отображение* $\mathbf{h} \mapsto \tau_{\mathbf{h}} f$ *является непрерывным отображением из топологической группы* $\mathbb{T}^\infty$ *в банахово пространство* $W_p^{(r)}(\mathbb{T}^\infty)$.

Доказательство. 1) Пусть $f \in \mathcal{E}(\mathbb{T}^\infty)$. Так как $\tau_{\mathbf{h}}$ является изометрическим оператором в банаховом пространстве $L_p(\mathbb{T}^\infty)$ и

$$\tau_{\mathbf{h}}(\partial^{(\boldsymbol{\alpha})} f) = \partial^{(\boldsymbol{\alpha})}(\tau_{\mathbf{h}} f) \quad \forall \boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{Z}_+^{(\infty)},$$

то

$$\|\partial^{(\boldsymbol{\alpha})}(\tau_{\mathbf{h}} f)\|_p = \|\tau_{\mathbf{h}}(\partial^{(\boldsymbol{\alpha})} f)\|_p = \|\partial^{(\boldsymbol{\alpha})} f\|_p. \tag{2.31}$$

Из (2.31) вытекает, что $\|\tau_{\mathbf{h}} f\|_p^{(r)} = \|f\|_p^{(r)}$, а так как $\mathcal{E}(\mathbb{T}^\infty)$ всюду плотно в банаховом пространстве $W_p^{(r)}(\mathbb{T}^\infty)$, то оператор $\tau_{\mathbf{h}} : \mathcal{E}(\mathbb{T}^\infty) \mapsto \mathcal{E}(\mathbb{T}^\infty)$ единственным образом продолжается с $\mathcal{E}(\mathbb{T}^\infty)$ до изометрического оператора из $W_p^{(r)}(\mathbb{T}^\infty)$ в $W_p^{(r)}(\mathbb{T}^\infty)$. Очевидно, что продолженный оператор будет совпадать с оператором, полученным ограничением оператора $\tau_{\mathbf{h}}$ с пространства $L_p(\mathbb{T}^\infty)$ на подпространство $W_p^{(r)}(\mathbb{T}^\infty)$.

2) Пусть $f \in W_p^{(r)}(\mathbb{T}^\infty)$. Так как операторы $\tau_{\mathbf{h}}$ образуют группу изометрических операторов в банаховом пространстве $W_p^{(r)}(\mathbb{T}^\infty)$ (т. е. $\tau_{\mathbf{h}_1}\tau_{\mathbf{h}_2} = \tau_{\mathbf{h}_1+\mathbf{h}_2}$ $\forall \mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2 \in \mathbb{T}^\infty$), то для доказательства непрерывности отображения $\mathbf{h} \mapsto \tau_{\mathbf{h}} f$ из $\mathbb{T}^\infty$ в $W_p^{(r)}(\mathbb{T}^\infty)$ достаточно доказать его непрерывность в точке $\mathbf{0}$, т. е. нужно доказать, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что из $|\mathbf{h}| < \delta$ следует $\|f - \tau_{\mathbf{h}} f\|_p^{(r)} < \varepsilon$.

Так как подпространство $\mathcal{E}(\mathbb{T}^\infty)$ всюду плотно в банаховом пространстве $W_p^{(r)}(\mathbb{T}^\infty)$, то можно найти функцию $g \in \mathcal{E}(\mathbb{T}^\infty)$, для которой $\|f - g\|_p^{(r)} < \varepsilon/3$. Очевидно, что для функции g отображение $\mathbf{h} \mapsto \tau_{\mathbf{h}} g$ является непрерывным отображением из топологической группы $\mathbb{T}^\infty$ в банахово пространство $W_p^{(r)}(\mathbb{T}^\infty)$, поэтому найдется $\delta > 0$ такое, что из $|\mathbf{h}| < \delta$ следует $\|g - \tau_{\mathbf{h}} g\|_p^{(r)} < \varepsilon/3$. Тогда, пользуясь неравенством треугольника и изометричностью оператора $\tau_{\mathbf{h}}$, получим

$$\|f - \tau_{\mathbf{h}} f\|_p^{(r)} \leqslant \|f - g\|_p^{(r)} + \|g - \tau_{\mathbf{h}} g\|_p^{(r)} + \|\tau_{\mathbf{h}}(g - f)\|_p^{(r)} < \varepsilon.$$

□

Замечание 2.1. Из формулы (2.31) также вытекает, что для любых $f \in W_p^{(r)}(\mathbb{T}^\infty)$, $\mathbf{h} \in \mathbb{T}^\infty$, $s \in \mathbb{Z}_+$, $s \leqslant r$, справедливо равенство

$$|\tau_{\mathbf{h}} f|_p^{(s)} = |f|_p^{(s)}. \tag{2.32}$$

Пусть $\mathbf{h} = \{\bar{h}_k\} \in \mathbb{T}^\infty$, где $\bar{h}_k \in \mathbb{T}$, $k \in \mathbb{N}$, и пусть h_k — канонический представитель элемента $\bar{h}_k$ (т. е. $\bar{h}_k \in (-\pi, \pi]$ и $\bar{h}_k = h_k + 2\pi\mathbb{Z}$).

Для любой функции $f \in \mathcal{E}(\mathbb{T}^\infty)$ определим функцию $\partial_{\mathbf{h}} f$ формулой

$$\partial_{\mathbf{h}} f := \sum_{k=1}^{\infty} h_k\, \partial_k f. \tag{2.33}$$

Лемма 2.3. *Оператор $\partial_{\mathbf{h}}$ единственным образом продолжается с пространства $\mathcal{E}(\mathbb{T}^\infty)$ до линейного непрерывного оператора из банахова пространства $W_p^{(r)}(\mathbb{T}^\infty)$, $r \geqslant 1$, в банахово пространство $W_p^{(r-1)}(\mathbb{T}^\infty)$ (продолженный оператор будем также обозначать $\partial_{\mathbf{h}}$) и для любой функции $f \in W_p^{(r)}(\mathbb{T}^\infty)$ и для любого числа $s \in \mathbb{Z}_+$, удовлетворяющего условию $1 \leqslant s \leqslant r$, справедливы неравенства*

$$|\partial_{\mathbf{h}} f|_p^{(s-1)} \leqslant |\mathbf{h}|\, |f|_p^{(s)}, \tag{2.34}$$

$$\|\partial_{\mathbf{h}} f\|_p^{(r-1)} \leqslant |\mathbf{h}|\, \|f\|_p^{(r)}. \tag{2.35}$$

Доказательство. Пусть $f \in \mathcal{E}(\mathbb{T}^\infty)$. Из неравенства (2.29) вытекает, что для любого $k \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство

$$|\partial_k f|_p^{(s-1)} \leqslant 2^{-k} |f|_p^{(s)}. \tag{2.36}$$

Используя (2.36) и учитывая, что

$$|\mathbf{h}| = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} |h_k|,$$

получим

$$|\partial_{\mathbf{h}} f|_p^{(s-1)} \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} |h_k| |\partial_k f|_p^{(s-1)} \leqslant \left(\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} |h_k| \right) |f|_p^{(s)} = |h|\, |f|_p^{(s)}.$$

Тем самым неравенство (2.34) доказано для $f \in \mathcal{E}(\mathbb{T}^\infty)$. Неравенство (2.35) для $f \in \mathcal{E}(\mathbb{T}^\infty)$ вытекает из неравенства (2.34) и из равенства (2.28).

Так как $\mathcal{E}(\mathbb{T}^\infty)$ всюду плотно в $W_p^{(r)}(\mathbb{T}^\infty)$, то линейный оператор $\partial_{\mathbf{h}}$ продолжается по непрерывности до линейного непрерывного оператора из банахова пространства $W_p^{(r)}(\mathbb{T}^\infty)$ в банахово пространство $W_p^{(r-1)}(\mathbb{T}^\infty)$ и для продолженного оператора останутся справедливыми неравенства (2.34) и (2.35). □

Замечание 2.2. Продолженный на $W_p^{(r)}(\mathbb{T}^\infty)$ оператор $\partial_{\mathbf{h}}$ можно задать формулой (2.33), если считать, что ∂_k — обобщенные частные производные.

Лемма 2.4. *Для любых $f \in W_p^{(r)}(\mathbb{T}^\infty)$, $r \geqslant 1$ и $\mathbf{h} \in \mathbb{T}^\infty$ справедлива формула*

$$\Delta_{\mathbf{h}} f = \int\limits_0^1 \tau_{t\mathbf{h}}(\partial_{\mathbf{h}} f)\, dt. \tag{2.37}$$

Интеграл в правой части формулы (2.37) *можно понимать как интеграл Римана от функции $\psi(t) = \tau_{t\mathbf{h}}(\partial_{\mathbf{h}} f)$ со значениями в банаховом пространстве $W_p^{(r-1)}(\mathbb{T}^\infty)$. Этот интеграл существует, так как из леммы* 2.2 *вытекает, что функция $\psi(t)$ непрерывна при $t \in [0,1]$.*

Доказательство. Из лемм 2.2 и 2.3 вытекает, что левая и правая части в формуле (2.37) представляют собой линейные непрерывные операторы относительно f, переводящие пространство $W_p^{(r)}(\mathbb{T}^\infty)$ в $W_p^{(r-1)}(\mathbb{T}^\infty)$. Так как подпространство $\mathcal{E}(\mathbb{T}^\infty)$ всюду плотно в $W_p^{(r)}(\mathbb{T}^\infty)$, то для доказательства равенства (2.37) достаточно доказать его для случая, когда $f \in \mathcal{E}(\mathbb{T}^\infty)$.

Пусть $f \in \mathcal{E}(\mathbb{T}^\infty)$, тогда при некотором $n \in \mathbb{N}$ функцию f можно представить в виде $f = \pi_n(g)$, где $g \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$ (см. (1.12)–(1.14)), т. е. $f(\mathbf{x}) = g(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)$, где $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n$ — первые n элементов последовательности $\mathbf{x} = \{\bar{x}_k\} \in \mathbb{T}^\infty$.

Пусть $\varphi(t) = \tau_{t\mathbf{h}} f(\mathbf{x}) = g(\bar{x}_1 - t\bar{h}_1, \ldots, \bar{x}_n - t\bar{h}_n)$, $t \in [0,1]$. Функция $\varphi(t)$ бесконечно дифференцируемая по t и ее производная равна

$$\varphi'(t) = -\sum_{k=1}^n h_k\, \partial_k g(\bar{x}_1 - t\bar{h}_1, \ldots, \bar{x}_n - t\bar{h}_n) = -\tau_{t\mathbf{h}}(\partial_{\mathbf{h}} f). \tag{2.38}$$

Из (2.38) следует, что

$$\int\limits_0^1 \tau_{t\mathbf{h}}(\partial_{\mathbf{h}} f)\, dt = \varphi(0) - \varphi(1) = f - \tau_{\mathbf{h}} f = \Delta_{\mathbf{h}} f,$$

что доказывает равенство (2.37). □

Следствие 2.3. *Если $f \in W_p^{(m+r)}(\mathbb{T}^\infty)$, $m \in \mathbb{Z}_+$, $r \in \mathbb{N}$, то для любого $\mathbf{h} \in \mathbb{T}^\infty$ справедлива формула*

$$\Delta_{\mathbf{h}}^r f = \int\limits_0^1 \ldots \int\limits_0^1 \tau_{(t_1+\ldots+t_r)\mathbf{h}}(\partial_{\mathbf{h}}^r f)\, dt_1 \ldots dt_r. \tag{2.39}$$

Доказательство. Равенство (2.39) следует из леммы 2.4. □

Следствие 2.4. *Если* $f \in W_p^{(r)}(\mathbb{T}^\infty)$, $r \in \mathbb{N}$, *то для любого* $\mathbf{h} \in \mathbb{T}^\infty$ *справедливо неравенство*

$$\|\Delta_{\mathbf{h}}^r f\|_p \leqslant \|\partial_{\mathbf{h}}^r f\|_p \leqslant |\mathbf{h}|^r |f|_p^{(r)}. \tag{2.40}$$

Доказательство. Первое неравенство в (2.40) вытекает из (2.39) с учетом того, что оператор сдвига является изометрическим оператором в банаховом пространстве $L_p(\mathbb{T}^\infty)$. Второе неравенство в (2.40) следует из неравенства (2.34) с учетом того, что $\|\partial_{\mathbf{h}}^r f\|_p = |\partial_{\mathbf{h}}^r f|_p^{(0)}$. □

Напомним, что для любой функции $f \in W_p^{(r)}(\mathbb{T}^\infty)$ дифференциальный модуль непрерывности $\omega_m^{(r)}(f;\delta)_p$ порядка (m,r), $m,r \in \mathbb{N}$, $\delta > 0$, определен формулой (1.20). Дополнительно определим $\omega_m^{(r)}(f;\delta)_p$ при $r = 0$ или $m = 0$ формулами

$$\omega_m^{(0)}(f;\delta)_p := \omega_m(f;\delta)_p, \tag{2.41}$$

$$\omega_0^{(r)}(f;\delta)_p := |f|_p^{(r)}. \tag{2.42}$$

В частности,

$$\omega_0^{(0)}(f;\delta)_p = \omega_0(f;\delta)_p := \|f\|_p.$$

Таким образом, всюду далее будем считать, что $r, m \in \mathbb{Z}_+$. Для краткости пусть $\omega_m^{(r)}(\delta) := \omega_m^{(r)}(f;\delta)_p$.

Предложение 2.3 (свойства дифференциального модуля непрерывности).

1°. *Для любых* $m, s, r \in \mathbb{Z}_+$ *справедливы неравенства*

$$\omega_{m+s}^{(r)}(f;\delta)_p \leqslant 2^s \omega_m^{(r)}(f;\delta)_p; \tag{2.43}$$

$$\omega_m^{(r)}(f;\delta)_p \leqslant \omega_0^{(r)}(f;\delta)_p = 2^m |f|_p^{(r)} \leqslant 2^m \|f\|_p^{(r)}. \tag{2.44}$$

2°. *Функция* $\omega_m^{(r)}(\delta)$ *не убывающая по переменной* δ.

3°. *Для любого натурального числа* l *справедливо неравенство*

$$\omega_m^{(r)}(l\delta) \leqslant l^m \omega_m^{(r)}(\delta).$$

4°. *Для любого действительного числа* $\lambda > 0$ *справедливо неравенство*

$$\omega_m^{(r)}(\lambda\delta) \leqslant (\lambda+1)^m \omega_m^{(r)}(\delta). \tag{2.45}$$

Доказательство.

1) Пусть $\mathbf{h} \in \mathbb{T}^\infty$ и $|\mathbf{h}| \leqslant \delta$, $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{Z}_+^{(\infty)}$ и $|\boldsymbol{\alpha}| \leqslant r$, I — тождественный оператор. Тогда

$$\begin{aligned}\|\Delta_{\mathbf{h}}^{m+s}\partial^{(\boldsymbol{\alpha})}f\|_p &= \|(I-\tau_{\mathbf{h}})^{m+s}\partial^{(\boldsymbol{\alpha})}f\|_p = \|(I-\tau_{\mathbf{h}})^{s}(I-\tau_{\mathbf{h}})^{m}\partial^{(\boldsymbol{\alpha})}f\|_p\\ &\leqslant 2^s\|(I-\tau_{\mathbf{h}})^{m}\partial^{(\boldsymbol{\alpha})}f\|_p \leqslant 2^s\omega_m^{(r)}(\partial^{(\boldsymbol{\alpha})}f;\delta)_p,\end{aligned}$$

откуда следует, что

$$\omega_{m+s}(\partial^{(\boldsymbol{\alpha})}f;\delta)_p \leqslant 2^s\omega_m(\partial^{(\boldsymbol{\alpha})}f;\delta)_p. \tag{2.46}$$

Из (2.46) вытекает, что

$$\begin{aligned}\omega_{m+s}^{(r)}(\delta) &= \sum_{\boldsymbol{\alpha}\in\mathbb{Z}_+^{(\infty)},\,|\boldsymbol{\alpha}|=r} 2^{\mathrm{n}(\boldsymbol{\alpha})}\omega_{m+s}(\partial^{(\boldsymbol{\alpha})}f;\delta)\\ &\leqslant 2^s \sum_{\boldsymbol{\alpha}\in\mathbb{Z}_+^{(\infty)},\,|\boldsymbol{\alpha}|=r} 2^{\mathrm{n}(\boldsymbol{\alpha})}\omega_{m}(\partial^{(\boldsymbol{\alpha})}f;\delta)_p = 2^s\omega_m^{(r)}(f;\delta)_p,\end{aligned}$$

что доказывает неравенство (2.43). Первое неравенство в (2.44) следует из (2.43), если взять $m=0$ и $s=m$. Второе неравенство в (2.44) вытекает из очевидного неравенства $|f|_p^{(r)} \leqslant \|f\|_p^{(r)}$.

2) Свойство 2° очевидно.

3) Свойства 3° и 4° следуют из соответствующих свойств (2.9) и (2.10) модуля непрерывности $\omega_m(\delta)$. □

Пусть α_j, x_j — любые положительные числа, $j \in \mathbb{N}$, удовлетворяющие условиям

$$\sum_j \alpha_j = 1, \quad \sum_j x_j < \infty.$$

Тогда для любого $m > 1$ справедливо неравенство

$$\Bigl(\sum_j \alpha_j x_j\Bigr)^m \leqslant \sum_j \alpha_j x_j^m. \tag{2.47}$$

Неравенство (2.44) вытекает из неравенства Иенсена для выпуклой на интервале $(0,+\infty)$ функции $y = x^m$. Отметим также хорошо известное неравенство

$$(a+b)^m \leqslant 2^{m-1}(a^m+b^m), \tag{2.48}$$

при $a, b > 0$, $m \geqslant 1$.

Доказательства теорем 1.1 и 1.2. С учетом определений (2.26), (2.41) можно считать, что теорема 1.1 является частным случаем теоремы 1.2 при $r = 0$. Поэтому будем доказывать теорему 1.2, считая, что $r \in \mathbb{Z}_+$.

Напомним, что σ — фиксированное натуральное число, участвующее в определении функции $K_n(t)$ (см. (2.16)). Будем считать, что σ удовлетворяет условию $\sigma \geqslant (m+r+2)/2$ (можно, например, взять $\sigma = [(m+r)/2]+2$, где $[x]$ — целая часть числа x).

Для любого натурального N функция $\mathcal{J}_N(\mathbf{x})$ на группе $\mathbb{T}^\infty$ определяется формулой (2.21). Пусть $f \in W_p^{(r)}(\mathbb{T}^\infty)$. Функцию $T_N(\mathbf{x})$ определим по формуле

$$T_N(\mathbf{x}) = T_N(f;\mathbf{x}) := \int\limits_{\mathbb{T}^\infty} (f(\mathbf{x}) - \Delta_{\mathbf{h}}^{m+r} f(\mathbf{x}))\mathcal{J}_N(\mathbf{h})\, d\mathbf{h}. \tag{2.49}$$

Заметим, что от определения функции $T_N(\mathbf{x})$ в (2.23) это определение отличается только заменой m на $m+r$.

По предложению 2.2 функция $T_N(\mathbf{x})$ является тригонометрическим полиномом степени $\sigma(N-1)$ на группе $\mathbb{T}^\infty$ (т. е. $T_N(\mathbf{x}) \in \mathcal{P}_{\sigma(N-1)}$). Из (2.49) следует, что

$$f(\mathbf{x}) - T_N(\mathbf{x}) = \int\limits_{\mathbb{T}^\infty} \Delta_{\mathbf{h}}^{m+r} f(\mathbf{x})\, \mathcal{J}_N(\mathbf{h})\, d\mathbf{h}. \tag{2.50}$$

Используя неравенство (2.40), получим

$$\|\Delta_{\mathbf{h}}^{m+r} f\|_p = \|\Delta_{\mathbf{h}}^{r}\Delta_{\mathbf{h}}^{m} f\|_p \leqslant |\mathbf{h}|^r\, |\Delta_{\mathbf{h}}^{m} f|_p^{(r)}. \tag{2.51}$$

Из определения дифференциального модуля непрерывности $\omega_m^{(r)}(\delta) = \omega_m^{(r)}(f;\delta)_p$ (см. (1.20)) и из определения полунормы $|\cdot|_p^{(r)}$ (см. (2.27)) вытекает, что

$$\begin{aligned} |\Delta_{\mathbf{h}}^{m} f|_p^{(r)} &= \sum_{\boldsymbol{\alpha}\in\mathbb{Z}_+^{(\infty)},\, |\boldsymbol{\alpha}|=r} 2^{\mathfrak{n}(\boldsymbol{\alpha})} \|\Delta_{\mathbf{h}}^{m}\partial^{(\boldsymbol{\alpha})} f\|_p \\ &\leqslant \sum_{\boldsymbol{\alpha}\in\mathbb{Z}_+^{(\infty)},\, |\boldsymbol{\alpha}|=r} 2^{\mathfrak{n}(\boldsymbol{\alpha})} \omega_m(\partial^{(\boldsymbol{\alpha})} f; |\mathbf{h}|) = \omega_m^{(r)}(|\mathbf{h}|). \end{aligned} \tag{2.52}$$

Из (2.51) и (2.52) следует неравенство

$$\|\Delta_{\mathbf{h}}^{m+r} f\|_p \leqslant |\mathbf{h}|^r \omega_m^{(r)}(|\mathbf{h}|). \tag{2.53}$$

Пользуясь свойством (2.45) дифференциального модуля непрерывности, можно написать, что

$$\omega_m^{(r)}(|\mathbf{h}|) = \omega_m^{(r)}\Big(|\mathbf{h}|N\frac{1}{N}\Big) \leqslant (|\mathbf{h}|N+1)^m \omega_m^{(r)}\Big(\frac{1}{N}\Big). \tag{2.54}$$

Из равенства (2.50) и из неравенств (2.53) и (2.54) получаем оценку

$$\begin{aligned} \|f - T_N\|_p &\leqslant \int\limits_{\mathbb{T}^\infty} \|\Delta_{\mathbf{h}}^{m+r} f\|_p \, \mathcal{J}_N(\mathbf{h})\, d\mathbf{h} \leqslant \int\limits_{\mathbb{T}^\infty} |h|^r \omega_m^{(r)}(|\mathbf{h}|)\, \mathcal{J}_N(\mathbf{h})\, d\mathbf{h} \\ &\leqslant \omega_m^{(r)}\Big(\frac{1}{N}\Big) \int\limits_{\mathbb{T}^\infty} |\mathbf{h}|^r (N|\mathbf{h}|+1)^m \, \mathcal{J}_N(\mathbf{h})\, d\mathbf{h}. \end{aligned} \tag{2.55}$$

Пусть

$$I = \int\limits_{\mathbb{T}^\infty} |\mathbf{h}|^r (N|\mathbf{h}|+1)^m \, \mathcal{J}_N(\mathbf{h})\, d\mathbf{h}. \tag{2.56}$$

Используя неравенство (2.48), получим, что

$$I \leqslant 2^{m-1}\bigg(\int N^m |\mathbf{h}|^{m+r} \mathcal{J}_N(\mathbf{h})\, d\mathbf{h} + \int\limits_{\mathbb{T}^\infty} |\mathbf{h}|^r \mathcal{J}_N(\mathbf{h})\, d\mathbf{h}\bigg). \tag{2.57}$$

Если $\mathbf{h} = \{\bar{h}_k\} \in \mathbb{T}^\infty$, $\bar{h}_k \in \mathbb{T}$, то

$$|\mathbf{h}| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} |\bar{h}_k|_{\mathbb{T}^\infty}.$$

Из неравенства (2.47) следует, что для любого $\rho \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство

$$|\mathbf{h}|^\rho \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} |\bar{h}_k|_{\mathbb{T}}^\rho. \tag{2.58}$$

Используя свойства (2.15), (2.19) и (2.21), а также неравенство (2.20), получим, что

$$\int\limits_{\mathbb{T}^\infty} |\bar{h}_k|_{\mathbb{T}}^\rho \mathcal{J}_N(\mathbf{h})\, d\mathbf{h} = \int\limits_{\mathbb{T}} |\bar{h}_k|_{\mathbb{T}}^\rho \, K_N(\bar{h}_k)\, d\mu(\bar{h}_k) \leqslant \frac{a_\rho}{N^\rho} \tag{2.59}$$

для любого натурального $\rho \leqslant 2\sigma - 2$.

Из неравенств (2.58) и (2.59) вытекает, что

$$\int\limits_{\mathbb{T}^\infty} |\mathbf{h}|^\rho \mathcal{J}_N(\mathbf{h})\, d\mathbf{h} \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \int\limits_{\mathbb{T}^\infty} |\bar{h}_k|_{\mathbb{T}}^\rho \mathcal{J}(\mathbf{h})\, d\mathbf{h} \leqslant \frac{a_\rho}{N^\rho}. \tag{2.60}$$

Тогда из (2.57) и из неравенства (2.60) при $\rho = m + r$ и $\rho = r$ следует, что

$$I \leqslant 2^{m-1}\Big(N^m \frac{a_{m+r}}{N^{m+r}} + \frac{a_r}{N^r}\Big) = \frac{c_1}{N^r}, \tag{2.61}$$

где $c_1 = c_1(r,m) = 2^{m-1}(a_{m+r} + a_r)$ — положительная постоянная.

Из (2.55)–(2.57) и (2.61) получаем оценку

$$\|f - T_N\|_p \leqslant \frac{c_1}{N^r}\,\omega_m^{(r)}\Big(\frac{1}{N}\Big). \tag{2.62}$$

Для произвольного $N \in \mathbb{N}$ выберем число $M \in \mathbb{N}$ так, чтобы

$$\sigma(M-1) \leqslant N < \sigma M. \tag{2.63}$$

Тогда $T_M \in \mathcal{P}_N$, откуда, с учетом (2.62),

$$E_N(f)_p \leqslant \|f - T_M\|_p \leqslant \frac{c_1}{M^r}\,\omega_m^{(r)}\Big(\frac{1}{M}\Big). \tag{2.64}$$

Используя (2.63) и свойства функции $\omega_m^{(r)}(\delta)$ (см. предложение 2.3), получим

$$\frac{1}{M^r}\,\omega_m^{(r)}\Big(\frac{1}{M}\Big) \leqslant \frac{\sigma^r}{N^r}\,\omega_m^{(r)}\Big(\frac{\sigma}{N}\Big) \leqslant \frac{\sigma^r(\sigma+1)^m}{N^r}\,\omega_m^{(r)}\Big(\frac{1}{N}\Big). \tag{2.65}$$

Из (2.62) и (2.63) вытекает неравенство

$$E_N(f)_p \leqslant \frac{c_2}{N^r}\,\omega_m^{(r)}\Big(\frac{1}{N}\Big),$$

где $c_2 = c_1\sigma^r(\sigma+1)^m$, что завершает доказательство теоремы 1.2. $\square$

Замечание 2.3. Рецензент статьи отметил, что теорему 1.2 можно вывести из теоремы 1.1. Приведем соответствующие рассуждения. Из неравенства (2.53) легко получить неравенство

$$\omega_{m+r}(f;\delta)_p \leqslant \delta^r\omega_m^{(r)}(f;\delta)_p, \quad r, m \in \mathbb{Z}_+, \ \ \delta > 0. \tag{2.66}$$

Если справедлива теорема 1.1, то из неравенства (1.11), в котором вместо m берется $m+r$, и из неравенства (2.66) вытекает, что

$$E_N(f)_p \leqslant c\,\omega_{m+r}\Big(f;\frac{1}{N}\Big) \leqslant \frac{c}{N^r}\,\omega_{m+r}^{(r)}\Big(f;\frac{1}{N}\Big),$$

что доказывает теорему 1.2. Доказательство теоремы 1.1 можно получить по схеме приведенного в тексте статьи доказательства теоремы 1.2 при $r = 0$.

Список литературы

[1] Хьюитт Э., Росс К., *Абстрактный гармонический анализ.* Т. 1, Наука, М., 1975; Т. 2, Мир, М., 1975.

[2] Rudin W., *Fourier analysis on groups*, Intersci. Publ., New York–London, 1962.

[3] Никольский С. М., *Приближение функций многих переменных и теоремы вложения*, Наука, М., 1977.

[4] Голубов Б. И., Ефимов А. В., Скворцов В. А., *Ряды и преобразования Уолша: Теория и применения*, Наука, М., 1987.

[5] Агаев Г. Н., Виленкин Н. Я., Джафарли Г. М., Рубинштейн А. И., *Мультипликативные системы функций и гармонический анализ на нуль-мерных группах*, Элм, Баку, 1981.

[6] Berg Ch., *Potential theory on the infinite dimensional torus*, Invent. Math. **32** (1976), no. 1, 49–100.

[7] Holley R., Stroock D. W., *Diffusions on an infinite dimensional torus*, J. Funct. Anal. **42** (1981), no. 1, 29–63.

[8] Taylor Th. J., *On the Wiener semigroup and harmonic analysis on the infinite dimensional torus*, Acta Appl. Math. **10** (1987), no. 2, 131–143.

[9] Bendikov A., Saloff-Coste L., *On the sample parts of diagonal Brownian motions on the infinite dimensional torus*, Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist. **40** (2004), no. 2, 227–254.

[10] Bruhat F., *Distributions sur un groupe localement compact et applications à l'étude des representations des groupes p-adiques*, Bull. Soc. Math. France **89** (1961), 43–75.

[11] Бурбаки Н., *Спектральная теория*, Элементы математики, Мир, М., 1972.

[12] Дзядык В. К., *Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами*, Наука, М., 1977.

Петрозаводский
государственный университет
185910, Петрозаводск
пр. Ленина, 33
Россия
E-mail: platonov@psu.karelia.ru

Поступило 21 января 2014 г.