В. Т. Марков, А. А. Туганбаев, Центрально существенные кольца, которые не обязательно унитальны или ассоциативны, *Дискрет. матем.*, 2018, том 30, выпуск 4, 42–47

DOI: 10.4213/dm1533

Дискретная математика

том 30 выпуск 4 * 2018

УДК 512.55 DOI https://doi.org/10.4213/dm1533

Центрально существенные кольца, которые не обязательно унитальны или ассоциативны

© 2018 г. В. Т. Марков*, А. А. Туганбаев**

Центрально существенные кольца, введенные ранее для ассоциативных унитальных колец, определяются в данной работе для колец, не обязательно ассоциативных или унитальных. В этом случае доказано, что центрально существенные полупервичные кольца коммутативны. Доказано, что все идемпотенты центрально существенного альтернативного кольца центральны. Приводится серия примеров некоммутативных центрально существенных колец, описаны некоторые свойства центрально существенных колец.

В.Т.Марков поддержан Российским фондом фундаментальных исследований, проект 17-01-00895-А. Исследование А.А.Туганбаева выполнено за счет гранта Российского научного фонда, проект 16-11-10013.

Ключевые слова: центрально существенное кольцо, полупервичное кольцо, идемпотент, неунитальное кольцо, альтернативное кольцо

1. Введение и примеры

Данная статья является продолжением статьи [2] тех же авторов, где изучались центрально существенные ассоциативные унитальные кольца. Рассматриваемые здесь кольца не обязательно унитальны или ассоциативны.

Через R^1 будем обозначать кольцо R с присоединённой внешней единицей, через $N(R)$, $K(R)$, $Z(R)$ — ассоциативный центр, коммутативный центр и центр кольца R соответственно (в смысле §7.1 книги [4]); через $\hat{C}(R)$ обозначается центроид кольца R, т.е. множество эндоморфизмов группы $(R,+)$, перестановочных с левыми и правыми умножениями на элементы кольца R. Ясно, что R можно рассматривать как левый или правый модуль над ассоциативно-коммутативным кольцом $Z(R)$ и как унитарный модуль над унитальным ассоциативно-коммутативным $Z(R)^1$, а также над центроидом $\hat{C}(R)$.

Следующее замечание хорошо известно в ассоциативном случае.

Замечание 1.1. Ассоциативный центр $N(R)$, коммутативный центр $K(R)$ и центр $Z(R)$ кольца R являются его $\hat{C}(R)$-подмодулями.

*МГУ имени М. В. Ломоносова, e-mail: vtmarkov@yandex.ru

**Национальный исследовательский университет "МЭИ", МГУ имени М. В. Ломоносова, e-mail: tuganbaev@gmail.com

Доказательство. Пусть $n \in N(R)$ и $c \in \hat{C}(R)$. Тогда для любых $a, b \in R$ имеем

$$
\begin{aligned}
&(c(n), a, b) = c(n)a \cdot b - c(n) \cdot ab = c(na)b - c(n \cdot ab) = c((n, a, b)) = 0,\\
&(a, c(n), b) = ac(n) \cdot b - a \cdot c(n)b = c(an)b - ac(nb) = c((a, n, b)) = 0,\\
&(a, b, c(n)) = ab \cdot c(n) - a \cdot bc(n) = c(ab \cdot n) - c(a \cdot bn) = c((a, b, n)) = 0.
\end{aligned}
$$

Следовательно, $c(n) \in N(R)$.

Аналогично, если $k \in K(R)$, то для любого $a \in R$

$$[c(k), a] = c(k)a - ac(k) = c(ka) - c(ak) = c([k, a]) = 0.$$

Следовательно, $c(k) \in K(R)$.

Наконец, утверждение о центре $Z(R)$ следует из двух предыдущих, так как по определению $Z(R) = N(R) \cap K(R)$.

Кольцо R с центром $C = Z(R)$ называется *центрально существенным*, если $rC^1 \cap C \neq 0$ для любого ненулевого элемента $r \in R$ (или, эквивалентно, $K \cap C \neq 0$ для любого ненулевого подмодуля K модуля R_C).

Кольцо R называется *полупервичным*, если R не содержит ненулевых идеалов с нулевым умножением, см. [4, §8.2].

Замечание 1.2. Пусть R — центрально существенное ассоциативное унитальное кольцо. В [2] доказано, что все идемпотенты кольца R центральны, и если кольцо R полупервично, то R коммутативно. В той же работе построены примеры конечных некоммутативных центрально существенных ассоциативных унитальных колец.

В связи с замечанием 1.2 мы докажем теорему 1.3, являющуюся основным результатом данной работы.

Теорема 1.3. *Пусть R — центрально существенное кольцо.*

a. *Если центр $Z(R)$ кольца R полупервичен, то кольцо R коммутативно и ассоциативно.*

b. *Если кольцо R альтернативно и e — идемпотент кольца R, то $e \in Z(R)$.*

Доказательство теоремы 1.3 разбито на несколько утверждений, некоторые из них представляют самостоятельный интерес. Приведем часть необходимых понятий. Все остальные необходимые понятия теории колец можно найти в книгах [1, 3, 4].

Кольцо R с центром $C = Z(R)$ называется *сильно центрально существенным* (соответственно, *слабо центрально существенным*), если $Cr \cap C \neq 0$ (соответственно, $\hat{C}(R)r \cap C \neq 0$) для любого ненулевого элемента $r \in R$.

Предложение 1.4. *Пусть R — кольцо с центром $C = Z(R)$.*

a. *Если R — сильно центрально существенное кольцо, то R — центрально существенное кольцо.*

b. *Если R — центрально существенное кольцо, то R — слабо центрально существенное кольцо.*

c. *В классе унитальных колец сильно центрально существенные кольца, центрально существенные кольца и слабо центрально существенные кольца совпадают.*

Доказательство. **a**. Утверждение следует из того, что C — подкольцо в C^1.

b. Достаточно заметить, что как умножение на центральный элемент, так и умножение на целое число принадлежат центроиду кольца R.

c. В силу **a** и **b** достаточно проверить, что если R — слабо центрально существенное кольцо с единицей 1, то R является сильно центрально существенным. Пусть R — слабо центрально существенное кольцо и $r \in R \setminus \{0\}$. Существует такой элемент $\hat{c} \in \hat{C}(R)$, что $\hat{c}(r) \in Z(R) \setminus \{0\}$. Тогда $0 \neq \hat{c}(r) = \hat{c}(1 \cdot r) = \hat{c}(1)r \in Z(R)r$, так как $\hat{c}(1) \in Z(R)$ в силу замечания 1.1. Итак, $Z(R)r \cap Z(R) \neq 0$. Поэтому R — сильно центрально существенное кольцо.

Приведенные ниже примеры 1.5 и 1.7 показывают, что в общем случае классы сильно центрально существенных, центрально существенных и слабо центрально существенных колец различны.

Пример 1.5. Любое ненулевое кольцо R с нулевым умножением является центрально существенным, но не является сильно центрально существенным кольцом. Действительно, $R = Z(R)$, и для любого ненулевого элемента $r \in R$ имеем $r \in R^1 r \cap R$, но $Z(R)r = 0$.

Для следующего примера понадобится замечание 1.6.

Замечание 1.6. Пусть R — кольцо с условием $R \cdot R^2 = R^2 \cdot R = 0$ и $\varphi\colon R \to R$ — такой эндоморфизм группы $(R, +)$, что $\varphi(R) \subseteq R^2 \subseteq \operatorname{Ker}\varphi$. Тогда $\varphi \in \hat{C}(R)$.
Действительно, для любых $a, b \in R$ имеем $\varphi(ab) = 0$, так как $ab \in R^2$, и $a\varphi(b) = \varphi(a)b = 0$, так как $aR^2 = R^2 b = 0$.

Пример 1.7. Пусть $F = \mathbb{Z}_3$ — поле из трёх элементов, $\Lambda(F^2)$ — внешняя алгебра двумерного линейного пространства над F. Пусть e_1, e_2 — базис пространства F^2 и R — подалгебра алгебры $\Lambda(F^2)$ с базисом $e_1, e_2, e_1 \wedge e_2$. Пусть $r = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_1 \wedge e_2$ — произвольный элемент кольца R. Легко видеть, что $r \in Z(R)$ в точности тогда, когда $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, т.е. $Z(R) = R^2$ и $Z(R)^1 r = Fr$ для любого $r \in R$. В частности, $Z(R)^1 e_1 = Fe_1$ и $Fe_1 \cap R^2 = 0$, значит, кольцо R не является центрально существенным. Пусть теперь $r \neq 0$. Если $r \in Z(R)$, то $r \in \hat{C}(R)r \cap Z(R)$, так как $\hat{C}(R)$ содержит тождественный эндоморфизм группы $(R, +)$. Пусть $\pi\colon R \to R/R^2$ — канонический гомоморфизм. Если $r \notin Z(R)$, то $\pi(r)$ — ненулевой элемент двумерного пространства R/R^2 и существует линейное отображение $\psi : R/R^2 \to R^2$, для которого $\psi(\pi(r)) \neq 0$. Если $\varphi = \psi\pi$, то $\varphi \in \hat{C}(R)$ в силу замечания 1.6 и $0 \neq \varphi(r) \in \hat{C}(R)r \cap R^2 = Z(R)$. Следовательно, R — слабо центрально существенное кольцо.

2. Доказательство теоремы 1.3 и открытые вопросы

Кольцо называется *редуцированным*, если оно не содержит ненулевых элементов с нулевым квадратом. Заметим, что ассоциативные редуцированные кольца — это в точности кольца без ненулевых нильпотентных элементов.

Теорема 2.1. *Пусть R — слабо центрально существенное кольцо, и его центр $C = Z(R)$ является редуцированным кольцом.*

a. *R — сильно центрально существенное кольцо.*
b. *R — ассоциативное кольцо.*
c. *R — коммутативное кольцо.*

Доказательство. a. Пусть $r \in R \setminus \{0\}$, $\varphi \in \hat{C}$ и $\varphi(r) = d \in C \setminus \{0\}$. Тогда $0 \neq d^2 = d\varphi(r) = \varphi(dr) = \varphi(d)r$. В силу замечания 1.1 элемент $\varphi(d) \in C$. Ясно также, что $d^2 \in C$. Следовательно, $0 \neq \varphi(d)r \in Cr \cap C$, т.е. R — сильно центрально существенное кольцо.

b. По **a** R — сильно центрально существенное кольцо. Предположим, что кольцо R неассоциативно, и элементы x, y, z кольца R имеют ненулевой ассоциатор $(x, y, z) = (xy)z - x(yz)$. Тогда существуют такие элементы $c, d \in C$, что $d = (x, y, z)c \in C \setminus \{0\}$. Заметим, что $xd \neq 0$, иначе мы бы имели

$$d^2 = (x, y, z)c \cdot d = (x, y, z) \cdot cd = (x, y, z) \cdot dc =$$
$$((xy \cdot z)d - (x \cdot yz)d)c = (d(xy \cdot z) - d(x \cdot yz))c = ((dx \cdot y)z - dx \cdot yz)c = 0,$$

что невозможно. Поэтому существует такой элемент $b \in C$, что $xd \cdot b = x \cdot db \in C \setminus \{0\}$. Рассмотрим множество $I = \{i \in C : ix \in C\}$. Ясно, что $db \in I$. Допустим, далее, что $dI = 0$. Тогда $d(db) = 0$, $(db)^2 = db \cdot db = (db \cdot d)b = (d \cdot db)b = 0$ и $db = 0$, противоречие. Таким образом, $di \neq 0$ для некоторого $i \in I$. Но $di = (xy \cdot z - x \cdot yz)c \cdot i = c((xi \cdot y)z - xi \cdot yz) = 0$, и мы снова пришли к противоречию. Итак, R — ассоциативное кольцо.

c. Предположим, что кольцо R некоммутативно, и $x, y \in R$ таковы, что $xy - yx \neq 0$. Тогда существуют такие элементы $c, d \in C$, что $d = (xy - yx)c \in C \setminus \{0\}$. Заметим, что $xd \neq 0$, иначе мы бы имели $d^2 = (xy - yx)cd = c((xd)y - y(xd)) = 0$, что невозможно. Значит, существует такой элемент $z \in C$, что $xdz \in C \setminus \{0\}$. Рассмотрим множество $I = \{i \in C : ix \in C\}$. Ясно, что $dz \in I$. Допустим, далее, что $dI = 0$. Тогда $d(dz) = 0$, $(dz)^2 = 0$ и $dz = 0$, противоречие. Таким образом, $di \neq 0$ для некоторого $i \in I$. Но $di = (xy - yx)ci = c((xi)y - y(xi)) = 0$, и мы снова пришли к противоречию. Итак, R — коммутативное кольцо.

Замечание 2.2. Ясно, что центр полупервичного кольца является редуцированным кольцом; обратное верно не всегда, поскольку кольцо верхних треугольных матриц над полем является неполупервичным кольцом с редуцированным центром.

2.3. Окончание доказательства теоремы 1.3. a. Из теоремы 2.1 и замечания 2.2 следует, что слабо центрально существенно полупервичное кольцо ассоциативно и коммутативно.

b. Если R — слабо центрально существенное альтернативное кольцо и e — идемпотент кольца R, то надо доказать, что $e \in Z(R)$.
Пусть r — произвольный элемент кольца R. В дальнейших вычислениях мы несколько раз используем то, что в силу альтернативности кольца R его подкольцо, порождённое двумя элементами e и r, ассоциативно. Если $c \in \hat{C}(R)$ — такой элемент центроида кольца R, что $c(ere - re) = d \in Z(R)$, то $de = c(ere - re)e = c((ere - re)e) = c(ere - re) = d$. С другой стороны, $ed = ec(ere - re) = c(e(ere - re)) = c(0) = 0$. Таким образом, $d = 0$ и $\hat{C}(R)(ere - re) \cap Z(R) = 0$. В силу слабой центральной существенности кольца R, $ere - re = 0$. Аналогично проверяется, что $ere - er = 0$, откуда $re = er$.

Замечание 2.4. В определении сильно центрально существенного кольца можно $Z(R)$ формально заменить на $N(R)$ или на $K(R)$ и назвать кольцо R N-существенным (слева) или K-существенным (слева) соответственно.

2.5. Открытые вопросы. Возникают естественные вопросы:
a. Верно ли, что любое N-существенное кольцо ассоциативно? Предположение: неверно.
b. Верно ли, что любое полупервичное N-существенное кольцо ассоциативно?

Заметим, что аналогичные вопросы для K-существенных колец имеют отрицательные ответы, как показывает следующий пример.

Пример 2.6. Пусть F — произвольное поле и R — алгебра над F с базисом $\{e, f, x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots\}$ и умножением, определённом на элементах базиса равенствами

$$\begin{aligned}
&e^2 = e,\ f^2 = f,\ ef = x_1,\ fe = y_1,\\
&ex_i = x_i e = x_i,\ y_j f = f y_j = y_j,\\
&x_i x_j = x_{i+j},\ y_i y_j = y_{i+j},\\
&x_i f = f x_i = y_j e = e y_j = x_i y_j = y_j x_i = 0 \text{ для всех } i, j \in \mathbb{N}.
\end{aligned}$$

Положим $x = x_1$, $y = y_1$. Легко проверить, что $K(R) = F[x]x + F[y]y$. Действительно, если $r = ae + bf + s$, где $a, b \in F$ и $s \in F[x]x + F[y]y$, то $[r, e] = b(y - x)$ и $[r, f] = a(x - y)$, поэтому $K(R) \subseteq F[x]x + F[y]y$, а обратное включение прямо следует из определения умножения в R.

Заметим, далее, что $K(R)$ — идеал в R и что $K(R) \cong F[x]x \oplus F[y]y$ — редуцированное кольцо. Поэтому если $r \in K(R) \setminus \{0\}$, то $r^2 \in K(R)r \setminus \{0\}$. Если же $r \notin K(R)$, то $r = ae + bf + \sum_{i=1}^{\infty} a_i x^i + \sum_{i=1}^{\infty} b_i y^i$, где $a, b, a_i, b_i \in F$ при всех $i \in \mathbb{N}$ и $a \neq 0$ или $b \neq 0$. Если $a \neq 0$, то $xr = ax + \sum_{i=1}^{\infty} a_i x^{i+1} \in (K(R)r \cap K(R)) \setminus \{0\}$, аналогично, если $b \neq 0$, то $yr = by + \sum_{i=1}^{\infty} b_i y^{i+1} \in (K(R)r \cap K(R)) \setminus \{0\}$. Таким образом, кольцо R является K-существенным.

Далее, $R/K(R) \cong F \oplus F$ и $K(R)$ — ассоциативные редуцированные кольца. Поэтому в R из $r^2 = 0$ следует $r = 0$, и тем более в R нет ненулевых идеалов с нулевым умножением, иначе говоря, кольцо R полупервично. В то же время e и f — нецентральные идемпотенты кольца R, чего в ассоциативном полупервичном слабо центрально существенном кольце быть не может, так как полупервичное слабо центрально существенное кольцо коммутативно по теореме 2.1.

Замечание 2.7. Если R — альтернативное кольцо без элементов порядка 3 в аддитивной группе, то K-существенность кольца R равносильна его центральной существенности, так как $3K(R) \subseteq N(R)$ [4, следствие 7.1.1].

Авторы благодарны И. Б. Кожухову за полезные замечания.

Список литературы

1. Lam T.Y., *A First Course in Noncommutative Rings*, Springer, 2001.
2. Марков В.Т., Туганбаев А.А., “Центрально существенные кольца”, *Дискретная математика*, **30**:2 (2018), 55–61; англ. пер.: Markov V.T., Tuganbaev A.A., “Centrally essential rings”, *Discrete Math. Appl.* (to appear).

3. Туганбаев А.А., *Теория колец. Арифметические модули и кольца*, М.: МЦНМО, 2009, 472 с.
4. Жевлаков К.А., Слинько А.М., Шестаков И.П., Ширшов А.И., *Кольца, близкие к ассоциативным*, М.: Наука, ГРФМЛ, 1978, 431 с.; англ. пер.: Zhevlakov K.A., Slin'ko A.M., Shestakov I.P., Shirshov A.I., *Rings that are nearly associative*, Academic Press, New York-London, 1982, xi+371 pp.

Статья поступила 26.07.2018.