N. A. Karazeeva, Global solvability of the initial boundary value problem with periodic boundary conditions describing 2D Maxwell flow,
Zap. Nauchn. Sem. POMI, 1997, Volume 243, 111–117

Н. А. Каразеева

ГЛОБАЛЬНАЯ ОБОБЩЕННАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ С УСЛОВИЕМ ПЕРИОДИЧНОСТИ ДЛЯ ДВУМЕРНЫХ УРАВНЕНИЙ, ОПИСЫВАЮЩИХ ДВИЖЕНИЕ ЖИДКОСТЕЙ МАКСВЕЛЛА

Посвящается памяти
Анатолия Петровича Осколкова

0. К неньютоновским жидкостям типа Максвелла относятся жидкости, в которых после прекращения движения напряжение не прекращается мгновенно, а спадает по некоторому закону. Жидкости Максвелла первого порядка описываются определяющим уравнением

$$\sigma + \lambda \frac{\partial \sigma}{\partial t} = 2\nu D, \quad \lambda,\, \nu > 0, \tag{1}$$

где σ – девиатор тензора напряжений, D – тензор скоростей деформаций, ν – коэффициент вязкости, λ – время релаксации.

Жидкостям Максвелла более высокого порядка L соответствует уравнение

$$\Bigl(1 + \sum_{l=1}^{L} \lambda_l \frac{\partial^l}{\partial t^l}\Bigr)\sigma = 2\nu \Bigl(1 + \sum_{m=1}^{L-1} \varkappa_m \nu^{-1} \frac{\partial^m}{\partial t^m}\Bigr) D, \tag{2}$$

где λ_l, $l = 1, \ldots, L$ – времена релакции, $\varkappa_m$, $m = 1, \ldots, L-1$ – времена запаздывания; $\lambda_l \geqslant 0$, $l = 1, \ldots, L$; $\varkappa_m \geqslant 0$, $m = 1, \ldots, L-1$. На коэффициенты $\varkappa_m$ и λ_l накладываются дополнительные условия, которые подробно описаны в работах [2, 3] и которые соответствуют физическому смыслу.

В работах А. П. Осколкова получена однозначная разрешимость в малом и глобальная разрешимость начально-краевых задач для уравнений, являющихся частичными линеаризациями указанных систем (откинуты сильно нелинейные члены) [4–7].

Для жидкостей Максвелла первого порядка О. А. Ладыженской доказано глобальное существование обобщенных решений двумерных задач при краевых условиях проскальзывания частиц и вихрей и при краевых условиях периодичности по x_k, $k = 1, 2$ (они будут опубликованы в журнале "Applicable Analysis", посвященном памяти Г. Фикера).

В работах А. П. Осколкова [2, 3] показано, что жидкости, для которых σ и D связаны соотношением (2), описываются системой интегро-дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v(x,t)}{\partial t} + v_k \dfrac{\partial v}{\partial x_k} - \displaystyle\int_0^t K(t-\tau)\Delta v(x,\tau)d\tau + \operatorname{grad} p(x,t) = f(x,t) \\ \operatorname{div} v(x,t) = 0, \end{cases} \tag{3}$$

где ядро K интегрального оператора типа Вольтерра имеет вид $K(t) = \sum_{s=1}^{L} \beta_s e^{\alpha_s t}$, $t \geqslant 0$, и коэффициенты $\beta_s \geqslant 0$, $\alpha_s \leqslant 0$. Для этой системы уравнений мы будем рассматривать начально-краевую задачу с периодическим краевым условием. Потом, устремляя границу области к ∞, можно получить разрешимость задачи Коши на плоскости. Через $\hat{\mathrm{J}}^1_2(\Omega)$ обозначим подпространство пространства $W^1_2(\Omega;\mathbb{R}^2)$, состоящее из соленоидальных периодических по x_k полей. Его замыкание в норме $L_2(\Omega;\mathbb{R}^2)$ обозначим через $\hat{\mathrm{J}}^0_2(\Omega)$.

Введем интегральный оператор

$$\mathbb{K}w = \int_0^t K(t-\tau)w(\tau)d\tau.$$

Через $\|\ldots\|_p$ будем обозначать норму в $L_p(\Omega)$ или в $L_p(\mathbb{R}^2)$; $\|\ldots\|_{p,q}$ – это норма в пространстве $L_q(0,T;L_p(\Omega))$ или в пространстве $L_q(0,T;L_p(\mathbb{R}^2))$.

Автор благодарит Ольгу Александровну Ладыженскую за помощь в работе.

1. Пусть $\Omega_R = [-R,R]\times[-R,R]$. На множестве $Q_T = \Omega_R \times [0,T]$ рассматривается система уравнений (3). На функции v и p налагаются периодические краевые условия. Выпишем их для v:

$$\begin{cases} v\big|_{x_1=-R} = v\big|_{x_1=R}; \quad v\big|_{x_2=-R} = v\big|_{x_2=R}; \\ v_{x_1}\big|_{x_1=-R} = v_{x_1}\big|_{x_1=R}; \quad v_{x_2}\big|_{x_2=-R} = v_{x_2}\big|_{x_2=R}; \end{cases} \tag{4}$$

Кроме того v должна удовлетворять начальному условию

$$v\big|_{t=0} = v_0(x), \quad x \in \Omega_R. \tag{5}$$

Подобно тому, как это делает О. А. Ладыженская для уравнений Навье–Стокса [1], мы исключаем из нашей задачи давление и далее занимаемся нахождением v, называя его слабым решением задачи. (После того, как v будет найдено, давление p находится из системы (3).)

Мы докажем существование по крайней мере одного слабого решения, принадлежащего $L_\infty(0,T;\widehat{\mathrm{J}}{}^1_2(\Omega))$ и удовлетворяющего интегральному тождеству

$$\int\limits_{Q_T} \big(- v\Phi_t - v_k v\Phi_{x_k} + (\mathbb{K}v_x)\Phi_x\big)\, dxdt + \int\limits_{\Omega_R} v\Phi\big|_{t=T}\, dx - \\ - \int\limits_{\Omega_R} v_0\Phi\big|_{t=0}\, dx = \int\limits_{Q_T} f\Phi \tag{6}$$

при любой соленоидальной периодической Φ, такой, что Φ_x, $\Phi_{xt} \in L_2(Q_T)$. Множество пробных функций, обладающих этим свойством, будем обозначать $\mathfrak{A}$.

Норму в пространстве $L_\infty(0,T;\widehat{\mathrm{J}}{}^1_2(\Omega))$ мы определим так:

$$\|v\|_{2,\infty} + \|v_x\|_{2,\infty}. \tag{7}$$

Для доказательства нам понадобится непрерывность оператора $\mathbb{K}$ в $L_2(Q_T)$ и положительная определенность квадратичной формы

$$\int\limits_0^t (\mathbb{K}w, w)_2 \geqslant 0.$$

2. Если продолжить ядро K нулем на квадрат $[0,T]\times[0,T]$, то по признаку непрерывности интегрального оператора мы получим, что норма $\mathbb{K}$ ограничена

$$\|\mathbb{K}\| = C_k = \sqrt{\left(\sup_{[0,T]} \int_0^t K(\tau)d\tau\right)\left(\sup_{[0,T]} \int_0^{T-\tau} K(t)dt\right)} = \\ = \int_0^T K(t)dt. \tag{8}$$

Положительная определенность квадратичной формы вытекает из леммы:

Лемма. *Для любой функции* $u(\tau) \in L_2(0,t)$

$$I = \int_0^t \int_0^\sigma K(\sigma - \tau)u(\sigma)u(\tau)\, d\tau\, d\sigma \geqslant 0.$$

Утверждение леммы будет вытекать из теоремы Бохнера о конусе положительно определенных функций, если мы продолжим функцию K на отрицательную полуось четным образом: $K(-t) = K(t)$, $t \geqslant 0$, продолжим функцию u нулем на $\mathbb{R}$ и учтем, что обратное преобразование Фурье функции K не отрицательно.

3. Получим некоторые оценки. Умножим первое уравнение системы (3) на v, проинтегрируем по Ω_R и применим формулу Грина. Это дает соотношение

$$\frac{1}{2}\ \frac{d}{dt}\|v\|_2^2 + (\mathbb{K}v_x\,, v_x) = (f, v). \tag{9}$$

Проинтегрировав по $t \in [0,T]$ и используя положительную определенность $\int_0^T (\mathbb{K}v_x\,, v_x) \geqslant 0$, получим

$$\|v(t)\|_2^2 \leqslant 2\int_0^T |\ (f, v)\ | + \|v(o)\|_2^2 \leqslant 2 \sup_{t\in[0,T]} \|v\|_2 \cdot \|f\|_{2,1} + \|v(o)\|_2^2.$$

Перейдя к sup по $t \in [0,T]$ в левой части, мы получим

$$\sup_{t\in[0,T]} \|v(t)\|_2^2 \leqslant 2 \sup_{t\in[0,T]} \|v\|_2 \cdot \|f\|_{2,1} + \|v(o)\|_2^2.$$

Отсюда выводим

$$\|v\|_{2,\infty} \leqslant \|f\|_{2,1} + \sqrt{\|f\|_{2,1}^2 + \|v(o)\|_2^2}. \tag{10}$$

Теперь перейдем к функции тока $v = (-\psi_{x_2}, \psi_{x_1})$. Применим к обеим частям первого уравнения системы (3) операцию $\operatorname{rot} u = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2}$. Тогда мы получим следующее уравнение

$$\Delta\psi_t - \mathbb{K}\Delta^2\psi = \psi_{x_1}\Delta\psi_{x_2} - \psi_{x_2}\Delta\psi_{x_1} + \varphi, \tag{11}$$

где $\varphi(x,t) = \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}$. Кроме того функцию ψ подчиним периодическому краевому условию. Пусть все производные функции ψ по x_k первого и второго порядков будут периодическими в Ω_R.

Начальное условие будет иметь вид

$$\psi\big|_{t=0} = b(x), \quad \text{где} \quad b_{x_1} = -v_{02}, \quad b_{x_2} = v_{01}. \tag{12}$$

Умножив скалярно в $L_2(\Omega_R)$ уравнение (11) на $\Delta\psi$ и перекинув производные по x, мы придем к интегральному равенству

$$\frac{1}{2}\ \frac{d}{dt}\|\Delta\psi\|_2^2 + (\mathbb{K}\Delta\psi_x, \Delta\psi_x) = (\varphi, \Delta\psi). \tag{13}$$

Это равенство аналогично соотношению (9). Из него мы выводим для $\Delta\psi$ оценку, аналогичную оценке (10), а именно

$$\|\Delta\psi\|_{2,\infty} \leqslant \|\varphi\|_{2,1} + \sqrt{\|\varphi\|_{2,1}^2 + \|\Delta\psi(o)\|_2^2}. \tag{14_1}$$

Поскольку $\|v_x\|_{2,\infty} \leqslant c\|\Delta\psi\|_{2,\infty}$, то из ($14_1$) следует оценка

$$\|v_x\|_{2,\infty} \leqslant c\left(\|\varphi\|_{2,1} + \sqrt{\|\varphi\|_{2,1}^2 + \|\Delta\psi(o)\|_2^2}\ \right). \tag{14_2}$$

4. Доказательство существования слабого решения проведем методом Галеркина, выбирая в качестве базисных функций систему $\{\varphi^l\}_{l=0}^\infty$ собственных функций задачи

$$\begin{cases} -\Delta v = \lambda v, \quad v \in \widehat{\mathrm{J}}{}_2^1(\Omega) \cap W_2^2(\Omega) \equiv \widehat{\mathrm{J}}{}_2^2(\Omega) \\ \operatorname{div} v = 0. \end{cases} \tag{15}$$

Известно, что система $\{\varphi^l\}_{l=0}^\infty$ может быть выбрана ортонормированной в пространстве $\widehat{\mathrm{J}}{}_2^0(\Omega)$, и что она является также базисом в пространствах $\widehat{\mathrm{J}}{}_2^1(\Omega)$ и в $\widehat{\mathrm{J}}{}_2^2(\Omega)$. Заметим, что в эту систему входит и функция $\varphi^0 \equiv 1/\operatorname{mes}\Omega_R$, соответствующая $\lambda_0 = 0$.

Галеркинские приближения v^n ищем в виде

$$v^n(x,t) = \sum_{l=0}^{n} c_{ln}(t)\varphi^l(x).$$

Коэффициенты $c_{ln}(t)$ в них определяются из системы уравнений

$$\frac{d}{dt}(v^n, \varphi^l) + (\mathbb{K}\, v_x^n, \varphi_x^l) + (v_k^n\, v_{x_k}^n, \varphi^l) = (f, \varphi^l) \tag{16}$$

с начальными условиями

$$c_{ln}(o) = (v^0, \varphi^l), \quad l = 0, \ldots, n.$$

Важно то, что для приближений v^n верны те же соотношения (9), (13), что и для точных решений. Поэтому для них верны оценки (10), $(14)_2$ с мажорантой, не зависящей от n. Это позволяет сделать предельный переход по n так, как это сделано в §7 гл. VI монографии [7], и доказать следующее предложение:

Теорема 1. *Пусть функция* $f \in L_{2,1}(Q_T)$, $f_x \in L_{2,1}(Q_T)$; *функция* $v_0 \in \widehat{\mathrm{J}}{}_2^1(\Omega_R)$. *Тогда начально-краевая задача* (3), (4), (5) *имеет глобальное по* t *обобщенное решение* $v \in L_\infty(0,T;\widehat{\mathrm{J}}{}_2^1(\Omega_R))$, *удовлетворяющее равенству* (6) *для любой функции* $\Phi \in \mathfrak{A}$. *Для решения* v *верны оценки* (10), $(14)_1$, $(14)_2$.

5. С помощью теоремы 1 доказывается разрешимость задачи Коши, а именно

Теорема 2. *Пусть функция* $f \in L_{2,1}(\mathbb{R}^2{\times}[0,T])$, $f_x \in L_{2,1}(\mathbb{R}^2{\times}[0,T])$, *функция* $v_0 \in \mathrm{J}_2^1(\mathbb{R}^2)$, *где* $\mathrm{J}_2^1(\mathbb{R}^2)$ *– множество соленоидальных полей на* $\mathbb{R}^2$, *имеющих конечную норму* $\|u\|_2 + \|u_x\|_2$. *Тогда существует обобщенное решение системы* (3), *удовлетворяющее начальному условию Коши*

$$v(x,0) = v_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^2.$$

Это решение принадлежит $L_\infty(0,T;\mathrm{J}_2^1(\mathbb{R}^2))$ *и удовлетворяет оценкам* (10), $(14)_1$, $(14)_2$.

Доказательство проводится так: берется последовательность расширяющихся областей Ω_{R_n}, $R_n \to \infty$, в каждой области строится свое обобщенное решение v^n периодической начально-краевой задачи. Для всех решений v^n нормы $\|v^n\|_{2,\infty}$, $\|v_x^n\|_{2,\infty}$ ограничены мажорантой, не зависящей от области. Поэтому можно перейти к пределу в интегральном тождестве, взяв пробную функцию с компактным носителем.

Литература

1. О. А. Ладыженская, *Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости.* М., ГИФМЛ, (1961); (второе издание, М., Наука, 1970).
2. А. П. Осколков, *О некоторых модельных нестационарных системах в теории неньютоновских жидкостей.* — Труды МИАН **127** (1975), 32–58.
3. А. П. Осколков, *Функциональные методы в теории нестационарных течений линейных вязкоупругих жидкостей.* Препринт ЛОМИ Р–2–83, Л. (1983).
4. А. П. Осколков, *К теории жидкостей Максвелла.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **101** (1981), 119–127.
5. А. П. Осколков, *К теории жидкостей Максвелла,* II. — Зап. научн. семин. ЛОМИ **131** (1983), 106–113.
6. А. П. Осколков, *К теории нестационарных течений жидкостей Максвелла и водных растворов полимеров.* — Зап. научн. семи. ЛОМИ **127** (1983), 158–168.
7. А. П. Осколков, *К теории жидкостей Максвелла,* III. — Зап. научн. семин. ЛОМИ **145** (1985), 164–172.
8. Н. А. Каразеева, *Задача Коши одного уравнения гидродинамики.* Спектральные и эволюционные задачи, II, Симферополь, СГУ (1993).
9. J. C. Maxwell, — Phil. Trans. Roy. Soc. **49** (1867), 157.
10. Дж. Астарита, Дж. Маруччи, *Основы гидромеханики неньютоновских жидкостей.* М. (1978).

Karazeeva N. A. Global solvability of the initial boundary value problem with periodic boundary conditions describing 2D Maxwell flow.

The system of equations describing 2D flow of Maxwell fluid is considered. The global existence of a weak solution for the initial boundary value problem with periodic boundary conditions is proved. The result allows us to prove the solvability of the corresponding Cauchy problem.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им.В. А. Стеклова РАН

Поступило 12 декабря 1996 г.