S. V. Konyagin, On Zeros of Sums of Cosines,
Mat. Zametki, 2020, Volume 108, Issue 4, 547–551

Математические заметки

Том 108 выпуск 4 октябрь 2020

УДК 517.518.4

О нулях сумм косинусов

С. В. Конягин

Показано, что найдутся сколь угодно большие натуральные числа N и различные неотрицательные целые числа $n_1,\dots,n_N$, для которых число нулей на $[-\pi,\pi)$ тригонометрического полинома $\sum_{j=1}^N\cos(n_jt)$ есть $O(N^{2/3}\log^{2/3}N)$.

Библиография: 6 названий.

Ключевые слова: тригонометрические полиномы, ядро Дирихле.

DOI: https://doi.org/10.4213/mzm12828

1. Введение. Литтлвуд [1; задача 22] поставил следующий вопрос. Верно ли, что для любых различных неотрицательных целых чисел $n_1,\dots,n_N$ количество действительных нулей на $[-\pi,\pi)$ тригонометрического полинома

$$\sum_{j=1}^N\cos(n_jt) \tag{1}$$

не менее $N-1$ (или ненамного меньше)?

Долгое время по этой проблеме не было никаких результатов. В [2] были указаны найденные с помощью компьютера примеры полиномов со значительно меньшим количеством нулей и доказана следующая теорема.

Теорема A. *Существует последовательность чисел $N_m\geqslant 2$, $m\geqslant 2$, таких, что $N_m/m\to 1$ при $m\to\infty$ и тригонометрические полиномы $\sum_{j=1}^{N_m}\cos(n_jt)$ с различными неотрицательными целыми $n_1,\dots,n_N$, у которых количество действительных нулей на $[-\pi,\pi)$ есть*

$$O(N_m^{5/6}\log N_m)=O(m^{5/6}\log m).$$

Используя ту же конструкцию, что и в работе [2], мы улучшаем верхнюю оценку числа нулей.

Теорема 1. *Существует последовательность чисел $N_m\geqslant 2$, $m\geqslant 2$, таких, что $N_m/m\to 1$ при $m\to\infty$ и тригонометрические полиномы $\sum_{j=1}^{N_m}\cos(n_jt)$ с различными неотрицательными целыми $n_1,\dots,n_N$, у которых количество действительных нулей на $[-\pi,\pi)$ есть*

$$O(N_m^{2/3}\log^{2/3}N_m)=O(m^{2/3}\log^{2/3}m).$$

Отметим, что долгое время не было известно, что количество нулей тригонометрических полиномов вида (1) стремится к бесконечности при $N\to\infty$. Это было сделано недавно [3]–[5].

2. Локальное поведение нулей специальных тригонометрических полиномов. Как и в [2], мы будем для достаточно большого m искать требуемый тригонометрический полином среди полиномов вида

$$S_m(t) = D_m(t) - P_n(t), \tag{2}$$

где

$$D_m(t) = \sum_{j=0}^{m} \cos(jt) = \frac{1}{2} + \frac{\sin((m+1/2)t)}{2\sin(t/2)}\,,$$

$$P_n(t) = \sum_{j=0}^{n} a_j \cos(jt), \qquad a_j \in \{0,1\}.$$

В отличие от [2] мы берем

$$n = n(m) = [m^{2/3}\log^{2/3} m].$$

Для достаточно большого m выполнено неравенство $n \leqslant m$. Поэтому полином S_m имеет нужный вид и при этом количество N_m его ненулевых членов удовлетворяет неравенствам $m - n \leqslant N_m \leqslant m+1$, откуда следует, что $N_m/m \to 1$ при $m \to \infty$.

Лемма 1. *Для достаточно большого m и любого целого числа l полином S_m не может иметь более 4 нулей на отрезке*

$$[u,v] = \left[\frac{\pi l}{m+1/2} + \frac{\pi}{4m+2}\,, \frac{\pi l}{m+1/2} + \frac{3\pi}{4m+2}\right].$$

Доказательство леммы. Домножая (2) на $2\sin(t/2)$, мы получаем

$$2S_m(t)\sin(t/2) = \sin\biggl(\biggl(m+\frac{1}{2}\biggr)t\biggr) + \sin(t/2) - \sum_{j=-1}^{n+1} b_j \sin\biggl(\biggl(j+\frac{1}{2}\biggr)t\biggr), \tag{3}$$

где $|b_j| \leqslant 2$ для $j = -1,\dots,n+1$. После четырехкратного дифференцирования получаем

$$\biggl(2S_m(t)\sin\biggl(\frac{t}{2}\biggr)\biggr)^{(4)} = R_1(t) - R_2(t),$$

где

$$R_1(t) = \biggl(m+\frac{1}{2}\biggr)^4 \sin\biggl(\biggl(m+\frac{1}{2}\biggr)t\biggr),$$

$$R_2(t) = -\frac{\sin(t/2)}{16} + \sum_{j=-1}^{n+1} b_j \biggl(j+\frac{1}{2}\biggr)^4 \sin\biggl(\biggl(j+\frac{1}{2}\biggr)t\biggr).$$

Для $t \in [u,v]$ выполнено неравенство

$$\left|\sin\biggl(\biggl(m+\frac{1}{2}\biggr)t\biggr)\right| \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2}\,,$$

и, значит,

$$|R_1(t)| \geqslant \biggl(\frac{\sqrt{2}}{2}\biggr) m^4.$$

Далее,

$$|R_2(t)| \leqslant \frac{1}{16} + 2\sum_{j=-1}^{n+1} |j+1|^4 \ll n^5.$$

Поэтому для достаточно большого m выполнено $|R_1(t)| > |R_2(t)|$. Таким образом,

$$\left(2S_m(t)\sin\left(\frac{t}{2}\right)\right)^{(4)} \neq 0, \qquad t \in [u,v].$$

Отсюда по теореме Ролля следует, что функция $2S_m(t)\sin(t/2)$ имеет не более 4 нулей на $[u,v]$, что и требовалось доказать.

Следующая лемма аналогична лемме 1.

Лемма 2. *Для достаточно большого m и любого целого числа l полином S_m не может иметь более 5 нулей на отрезке*

$$[u,v] = \left[\frac{\pi l}{m+1/2} - \frac{\pi}{4m+2}, \frac{\pi l}{m+1/2} + \frac{\pi}{4m+2}\right].$$

Доказательство леммы. После пятикратного дифференцирования равенства (3) получаем

$$\left(2S_m(t)\sin\left(\frac{t}{2}\right)\right)^{(5)} = R_1(t) - R_2(t),$$

где

$$R_1(t) = \left(m+\frac{1}{2}\right)^5 \cos\left(\left(m+\frac{1}{2}\right)t\right),$$
$$R_2(t) = -\frac{\cos(t/2)}{32} + \sum_{j=-1}^{n+1} b_j\left(j+\frac{1}{2}\right)^5 \cos\left(\left(j+\frac{1}{2}\right)t\right).$$

Для $t \in [u,v]$ выполнено неравенство

$$\left|\cos\left(\left(m+\frac{1}{2}\right)t\right)\right| \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2},$$

и, значит,

$$|R_1(t)| \geqslant \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)m^5.$$

Далее,

$$|R_2(t)| \leqslant \frac{1}{32} + 2\sum_{j=-1}^{n+1} |j+1|^5 \ll n^6.$$

Поэтому для достаточно большого m выполнено $|R_1(t)| > |R_2(t)|$. Таким образом,

$$\left(2S_m(t)\sin\left(\frac{t}{2}\right)\right)^{(5)} \neq 0, \qquad (t \in [u,v]).$$

Отсюда по теореме Ролля следует, что функция $2S_m(t)\sin(t/2)$ имеет не более 5 нулей на $[u,v]$, что и требовалось доказать.

Отметим, что отрезки длины $\pi/(2m+1)$, фигурирующие в формулировках лемм 1 и 2, не перекрываются и покрывают всю числовую прямую. Поэтому из этих лемм вытекает следующее утверждение.

Лемма 3. *Количество нулей полинома S_m на любом отрезке $[U,V]\subset\mathbb{R}$ не превосходит* $5(1+(2m+1)(V-U)/\pi)$.

3. Доказательство теоремы 1. Следующая лемма является леммой 1 из [2].

Лемма 4. *Существует такая константа c, что для всякой неотрицательной интегрируемой на $[-\pi,\pi)$ функции α найдутся коэффициенты $a_0,\dots,a_n$ из $\{0,1\}$ такие, что*

$$\operatorname{meas}\{t\in[-\pi,\pi]:|P_n(t)|\leqslant\alpha(t)\}\leqslant cn^{-1/2}\int_{-\pi}^{\pi}(\alpha(u)+1)\,du,$$

где

$$P_n(t)=\sum_{j=0}^{n}a_j\cos(jt).$$

Используя эту лемму, мы выберем соответствующий полином P_n для функции α, равной $1/|2\sin(t/2)|+1/2$ для $1/m\leqslant|t|\leqslant\pi$ и равной $m+1$ для $|t|<1/m$. Легко видеть, что

$$\int_{-\pi}^{\pi}(\alpha(u)+1)\,du\ll\log m.$$

Пусть

$$E=\{t\in[-\pi,\pi]:|P_n(t)|\leqslant\alpha(t)\}.$$

В силу леммы 4

$$\operatorname{meas}E\ll\frac{\log m}{\sqrt{n}}\,. \tag{4}$$

Поскольку $|D_m(t)|\leqslant\alpha(t)$ для $t\in[-\pi,\pi]$, все нули полинома S_m на $[0,\pi)$ принадлежат E. Далее, множество E содержит отрезок $[-1/m,1/m]$ и является объединением нескольких попарно не пересекающихся отрезков $[U_j,V_j]$, $j=1,\dots,N$, концы которых совпадают с точками $\pi,-\pi$ или являются корнем уравнения

$$|P_n(t)|=\alpha(t)=\frac{1}{|2\sin(t/2)|}+\frac12 \tag{5}$$

на $[-\pi,\pi]$. Оценим число этих корней.

Для любых $\sigma_1\in\{1,-1\}$, $\sigma_2\in\{1,-1\}$ уравнение $\sigma_1P_n(t)=\sigma_2/(2\sin(t/2))+1/2$ равносильно уравнению $R(t/2)=0$, где R – некоторый тригонометрический полином степени не выше $2n+1$, имеющий не более $4n+2$ корней $t\in[-\pi,\pi]$. Следовательно, общее число корней уравнения (5) на $t\in[-\pi,\pi]$ есть $O(n)$, и количество отрезков N, образующих множество E, также есть $O(n)$.

Теперь мы готовы оценить количество M нулей на $[-\pi,\pi)$ тригонометрического полинома S_m. В силу леммы 3 и неравенства (4) мы имеем

$$M\ll\sum_{j=1}^{N}(1+m(V_j-U_j))\leqslant N+m\operatorname{meas}E\ll n+\frac{m\log m}{\sqrt{n}}\ll m^{2/3}\log^{2/3}m.$$

Теорема доказана.

Замечание. После подачи данной работы в печать появился препринт [6], в котором была доказана теорема 1. Более того, в [6] было установлено существование надлежащих N-членных тригонометрических полиномов для любого $N \geqslant 2$. Идеи построения таких полиномов близки к предложенным в настоящей работе. (Указанное примечание добавлено автором при проверке корректуры.)

Автор благодарит К. С. Рютина за интерес к работе и полезные замечания. Без его внимательного и своевременного прочтения статьи ее публикация была бы невозможной.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] J. E. Littlewood, *Some Problems in Real and Complex Analysis*, D. C. Heath and Co., Lexington, MA, 1968.

[2] P. Borwein, T. Erdélyi, R. Ferguson, R. Lockhart, "On the zeros of cosine polynomials: solution to a problem of Littlewood", *Ann. of Math.* (2), **167**:3 (2008), 1109–1117.

[3] T. Erdélyi, "The number of unimodular zeros of self-reciprocal polynomials with coefficients in a finite set", *Acta Arith.*, **176**:2 (2016), 177–200.

[4] T. Erdélyi, "Improved lower bound for the number of unimodular zeros of self-reciprocal polynomials with coefficients in a finite set", *Acta Arith.*, **192**:2 (2020), 189–210.

[5] J. Sahasrabudhe, "Counting zeros of cosine polynomials: on a problem of Littlewood", *Adv. Math.*, **343**:5 (2019), 495–521.

[6] T. Juŝkeviĉius, J. Sahasrabudhe, *Cosine Polynomials with Few Zeros*, 2020, arXiv: 2005.01695v1.

С. В. Конягин
Математический институт им. В.А. Стеклова
Российской академии наук, г. Москва
E-mail: konyagin@mi-ras.ru

Поступило
29.04.2020
Принято к публикации
14.05.2020