ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 1997, том 37, № 8, с. 945–950

УДК 519.62

ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТИ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ С ПОГРАНИЧНЫМ СЛОЕМ[1)]

© 1997 г. Т. А. Якубенко

(Москва)

Поступила в редакцию 14.03.96 г.

Рассматривается краевая задача для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с малым параметром при старшей производной при умеренных требованиях на гладкость коэффициентов. Исследован метод решения задачи на неравномерной сетке, сгущающейся в области пограничного слоя. Получена равномерная по параметру оптимальная оценка погрешности численного решения. Существенным моментом исследования является переход к близкой задаче с гладкими коэффициентами.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть на отрезке $[-1, 1]$ решается краевая задача следующего вида:

$$\mu^2 u''(x) - p(x)u(x) = f(x), \quad u(-1) = b_{-1}, \quad u(1) = b_1. \tag{1.1}$$

Далее рассматривается представляющий наибольший интерес случай $\mu \ll 1$.

Будем предполагать, что выполнены условия

$$|b_{\pm 1}| \le B, \quad \min_{|x| \le 1} p(x) = b > 0, \quad f(x),\ p(x) \in C_{m+\lambda}(A', [-1, 1]),$$
$$A' > 0 \text{ – константа}, \quad m = 0, 1, \quad 0 < \lambda \le 1.$$

Вопрос оптимизации методов решения такой задачи для случая гладких коэффициентов рассматривался в [1].

Приближенное решение этой задачи находится следующим методом. Задаемся сеткой с узлами $-1 \le x_0 < \ldots < x_N = 1$, вообще говоря неравномерной. Пусть u_i – приближения к значениям $u(x_i)$. Аппроксимацию задачи (1.2) берем в виде

$$\mu^2 L_i u_i - p_i u_i = f_i, \quad 0 < i < N, \quad u_0 = b_{-1}, \quad u_N = b_1, \quad p_i = p(x_i), \quad f_i = f(x_i), \tag{1.2}$$

L_i – удвоенный оператор разделенной разности:

$$L_i u_i = \frac{2}{x_{i+1} - x_{i-1}}\left(\frac{u_{i+1} - u_i}{x_{i+1} - x_i} - \frac{u_i - u_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}\right).$$

Пусть u_h – решение сеточной задачи (1.2). Для получения оценки погрешности $\|u - u_h\|_h = \max_i |u(x_i) - u_i|$ ниже используется следующий прием [2].

Приблизим (1.1) задачей с гладкими коэффициентами

$$\mu^2 \bar{u}''(x) - \bar{p}(x)\bar{u}(x) = \bar{f}(x), \quad x \in [-1, 1], \quad \bar{u}(-1) = b_{-1}, \quad \bar{u}(1) = b_1. \tag{1.3}$$

Здесь

$$\bar{f}(x) = \frac{1}{\Delta}\int_{-\infty}^{\infty} K\left(\frac{x-y}{\Delta}\right) f(y)dy, \quad \bar{p}(x) = \frac{1}{\Delta}\int_{\infty}^{\infty} K\left(\frac{x-y}{\Delta}\right) p(y)dy,$$

$0 < \Delta < 1$ – некоторая постоянная, $K(y)$ – неотрицательная финитная бесконечно дифференциру-

---

[1)] Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 96–01–01394).

емая четная функция, удовлетворяющая условиям $K(y) = 0$ при $|y| \ge 1$,

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} K(y)dy = 1.$$

Функции $f(x)$, $p(x)$ продолжены (см. [3]) на отрезок $[-2, 2]$ так, что $f(x), p(x) \in C_{m+\lambda}(A, [-2, 2])$.

Из свойств ядра $K(y)$ следует, что $\bar{p}(x) \ge b$.

Пусть $\bar{u}_h$ – решение сеточной задачи для уравнения (1.3). Для погрешности $\|u - u_h\|_h$ верно соотношение

$$\|u - u_h\|_h \le \|u - \bar{u}\|_h + \|\bar{u} - \bar{u}_h\|_h + \|\bar{u}_h - u_h\|_h. \tag{1.4}$$

2. ОЦЕНКИ $\|u - \bar{u}\|_h$ И $\|u_h - \bar{u}_h\|_h$

На основании принципа максимума получается оценка

$$\|u\|_C = \max_{|x| \le 1}|u(x)| \le \max\left(|b_{-1}|, |b_1|, \frac{1}{b}\max_{|x| \le 1}|f(x)|\right). \tag{2.1}$$

Отсюда сразу следует однозначная разрешимость задач (1.1) и (1.3).

Вычитая (1.1) из (1.3), получаем

$$\mu^2 r''(x) - \bar{p}(x)r(x) = (\bar{f}(x) - f(x)) + (\bar{p}(x) - p(x))u(x).$$

Здесь $r(x) = \bar{u}(x) - u(x)$, $r(-1) = r(1) = 0$,

Аналогично (2.1) имеем

$$\|r\|_C \le \frac{1}{b}\|\bar{f} - f\|_C + \frac{1}{b}\|\bar{p} - p\|_C\|u\|_C. \tag{2.2}$$

Рассмотрим случай $m = 0$, т.е. на функцию $f(x)$ наложены условия $|f(x)| \le A$, $|f(x) - f(x_1)| \le A|x - x_1|^\lambda$, если $|x| \le 1$, $|x_1| \le 1$.

Сделав замену переменных $(x - y)/\Delta = t$, получим

$$|\bar{f}(x) - f(x)| = \left|\int\limits_{-\infty}^{\infty} K(t)f(x - \Delta t)dt - f(x)\int\limits_{-\infty}^{\infty} K(t)dt\right| =$$

$$= \left|\int\limits_{-1}^{1} K(t)(f(x - \Delta t) - f(x))dt\right| \le \int\limits_{-1}^{1} K(t)A\Delta^\lambda dt = A\Delta^\lambda.$$

Аналогично,

$$|\bar{p}(x) - p(x)| \le A\Delta^\lambda.$$

Приведем вывод соответствующих оценок для $m = 1$. В этом случае при $|x| \le 1$, $|x_1| \le 1$ имеем

$$|f(x)| \le A, \quad |f'(x) - f'(x_1)| \le A|x - x_1|^\lambda.$$

Положим

$$r(y, x) = [f(y) - f(x)] - (y - x)f'(x). \tag{2.3}$$

По теореме Лагранжа о среднем, существует ξ такая, что $f(y) - f(x) = f'(\xi)(y - x)$, $x < \xi < y$. Получаем

$$r(y, x) = (y - x)[f'(\xi) - f'(x)].$$

Поэтому

$$|r(y, x)| = |y - x||f'(\xi) - f'(x) \le ||y - x|A|\xi - x|^\lambda \le A|y - x|^{\lambda + 1}. \tag{2.4}$$

Используя (2.3), получаем

$$|\bar{f}(x) - f(x)| =$$

$$= \left|\frac{1}{\Delta}\int\limits_{-\infty}^{\infty} K\left(\frac{x - y}{\Delta}\right)f(x)dy - f(x)\int\limits_{-\infty}^{\infty} K(t)dt + \frac{1}{\Delta}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} K\left(\frac{x - y}{\Delta}\right)f'(x)(y - x)dy + \frac{1}{\Delta}\int\limits_{-\infty}^{\infty} K\left(\frac{x - y}{\Delta}\right)r(y, x)dy\right|. \tag{2.5}$$

Первые два интеграла сокращаются. Кроме того,

$$\frac{1}{\Delta}\int_{-\infty}^{\infty} K\left(\frac{x-y}{\Delta}\right)f'(x)(y-x)dy = 0$$

в силу четности функции $K(t)$.

Поэтому из (2.4) и (2.5) имеем

$$|\bar{f}(x)-f(x)| \le \left|A\int_{-1}^{1} K(t)|\Delta t|^{\lambda+1}dt\right| \le A\Delta^{\lambda+1}.$$

В итоге для $m = 0, 1$ имеем оценку

$$|\bar{f}(x)-f(x)| \le A\Delta^{m+\lambda}. \tag{2.6}$$

Аналогичным образом получаем

$$|\bar{p}(x)-p(x)| \le A\Delta^{m+\lambda}, \quad 0<\lambda\le 1. \tag{2.7}$$

Окончательную оценку $\|u-\bar{u}\|_C$ получаем, подставляя (2.1) в (2.2) с учетом неравенств (2.6) и (2.7):

$$\|r(x)\|_C \le \frac{A\Delta^{m+\lambda}}{b} + \frac{A\Delta^{m+\lambda}}{b}\max\left(|b_{-1}|, |b_1|, \frac{A}{b}\right),$$

т.е.

$$\|u-\bar{u}\|_h \le Q\Delta^{m+\lambda}. \tag{2.8}$$

Отметим, что Q – константа, не зависящая от Δ.

Аналогичным образом для сеточной задачи получаем

$$\|u_h-\bar{u}_h\|_h \le Q\Delta^{m+\lambda}. \tag{2.9}$$

3. ОЦЕНКА $\|\bar{u} - \bar{u}_h\|_h$

Для функций $f(x)$, $p(x)$ верны оценки (см. [2])

$$\left|\bar{f}^{(r)}(x)\right| \le C(r, m+\lambda)\Delta^{-\max(r-(m+\lambda),0)}, \quad \left|\bar{p}^{(r)}(x)\right| \le C(r, m+\lambda)\Delta^{-\max(r-(m+\lambda),0)} \tag{3.1}$$

Здесь $r = 0, 1, 2$, $C(r, m+\lambda)$, B, b – константы, не зависящие от Δ, $|x| \le 1$.

Задача (1.3) удовлетворяет условиям (3.1) и

$$|b_{\pm 1}| \le B, \quad \min_{|x|\le 1}\bar{p}(x) = b > 0.$$

Найдем зависимость величины производных решения задачи (1.3) от Δ.

Теорема. *Решение задачи* (1.3) *удовлетворяет неравенствам*

$$|\bar{u}(x)| \le D_0,$$

$$|\bar{u}'(x)| \le D_{10}\Delta^{(m+\lambda)/2-1} + D_{11}S_e, \quad \mu \le 1, \tag{3.2}$$

$$\left|(\bar{u})^{(r)}(x)\right| \le \frac{D_{r0}}{\mu^{r-2}}\Delta^{\lambda+m-2} + \frac{D_{r1}}{\mu^{r-2}}S_e, \quad r = 2, 3, 4, \quad \mu \le 1, \tag{3.3}$$

где

$$S_e = \frac{1}{\mu^2}\left(\exp\left[-\frac{d(1+x)}{\mu}\right] + \exp\left[-\frac{d(1-x)}{\mu}\right]\right), \quad d = \text{const}.$$

Доказательство. Положим

$$\bar{z}(z) = -\bar{f}(x)/\bar{p}(x), \quad \bar{y}(x) = \bar{u}(x) - \bar{z}(x), \quad \bar{g}(x) = -\bar{z}''(x).$$

Справедливы соотношения

$$\mu^2[\bar{y}''(x)+\bar{z}''(x)]-\bar{p}(x)[\bar{y}(x)+\bar{z}(x)] = \bar{f}(x), \quad \mu^2\bar{y}''(x)-\bar{p}(x)\bar{y}(x) = \mu^2\bar{g}(x),$$
$$\bar{y}(\pm 1) = b_{\pm}-\bar{z}(\pm 1).$$

Умножив эти уравнения на $2\bar{y}$, получим

$$\mu^2 Y''-2\mu^2(\bar{y}')^2-2\bar{p}Y = 2\mu^2\bar{g}\bar{y}, \quad \text{где } Y = (\bar{y})^2.$$

Из обеих частей равенства вычтем $2bY$. Получим

$$\mu^2 Y''-2bY = 2(\bar{p}-b)Y+2\mu^2(\bar{y}')^2+2\mu^2\bar{g}\bar{y} \ge 2\mu^2\bar{g}\bar{y}.$$

При любых $\sigma > 0$ имеем

$$|2\bar{g}\bar{y}| \le \sigma\bar{y}^2+\bar{g}^2/\sigma,$$

следовательно, при любых $\sigma > 0$

$$\mu^2 Y''-2bY \ge -\mu^2\sigma\bar{y}^2-\mu^2\bar{g}^2/\sigma.$$

Пусть

$$\sigma = \frac{2b(1-\gamma)}{\mu^2}, \quad 0<\gamma<1, \quad G = \max_{|x|\le 1}\bar{g}^2.$$

Тогда

$$\mu^2 Y''-2bY \ge -2b(1-\gamma)Y-\frac{\mu^4 G}{2b(1-\gamma)} \ge -\frac{\mu^4 G}{2b(1-\gamma)}.$$

Если $v(\pm 1) \ge Y(\pm 1)$ и

$$\mu^2 v''-2b\gamma v \le -\frac{\mu^4 G}{2b(1-\gamma)},$$

то на основании принципа максимума для решений линейных дифференциальных уравнений имеем

$$v(x) \ge Y(x), \quad -1 \le x \le 1.$$

В качестве такой функции $v(x)$ можно взять

$$v_0(x) = \frac{\mu^4 G}{4b^2\gamma(1-\gamma)}+Y(-1)\exp\left[-\frac{\sqrt{2b\gamma}\,(1+x)}{\mu}\right]+Y(1)\exp\left[-\frac{\sqrt{2b\gamma}\,(1-x)}{\mu}\right].$$

Зафиксируем некоторую постоянную γ, $0<\gamma<1$. Воспользуемся неравенством

$$\sqrt{\sum_{j=1}^{l}|a_j|} \le \sum_{j=1}^{l}\sqrt{|a_j|}.$$

Имеем

$$|\bar{y}(x)| = \sqrt{Y(x)} \le \sqrt{v_0(x)} \le \frac{\mu^2}{2b}\sqrt{\frac{G}{\gamma(1-\gamma)}}+d_1\exp\left[-\frac{d(1+x)}{\mu}\right]+d_2\exp\left[-\frac{d(1-x)}{\mu}\right],$$

где $d = \sqrt{b\gamma/2}$, d_1, d_2 – некоторые постоянные.

Из определения $\bar{g} = (-\bar{f}/\bar{p})''$ и оценок (3.1) следует, что

$$|\bar{g}| \le \begin{cases} \dfrac{[b+C(0,\lambda)]C(2,\lambda)\Delta^{\lambda-2}}{b^2}+\dfrac{2[b+C(0,\lambda)]C^2(1,\lambda)\Delta^{2(\lambda-1)}}{b^3}, & m = 0, \\[2ex] \dfrac{[b+C(0,1+\lambda)]C(2,1+\lambda)\Delta^{\lambda-1}}{b^2}+\dfrac{2[b+C(0,1+\lambda)]C^2(1,1+\lambda)\Delta^{2(\lambda-1)}}{b^3}, & m = 1. \end{cases}$$

Так как $\Delta \le 1$, то отсюда следует оценка

$$|\bar{g}| \le G_0\Delta^{m+\lambda-2}, \quad m = 0, 1,$$

где $0 \le G_0$ – константа, не зависящая от Δ.

Следовательно,

$$|\bar{y}(x)| \le d_0\mu^2\Delta^{m+\lambda-2} + d_1\exp\left[-\frac{d(1+x)}{\mu}\right] + d_2\exp\left[-\frac{d(1-x)}{\mu}\right], \tag{3.4}$$

где $d_0 = G_0/[2b\sqrt{\gamma(1-\gamma)}\,]$.

Из уравнения (1.3) и определения $\bar{z}$ получим

$$\bar{u}''(x) = [\bar{p}(x)\bar{y}(x)]/\mu^2.$$

Используя соотношение (3.4), получаем

$$|\bar{u}''(x)| \le \max_{|x|<1}[|\bar{p}(x)||\bar{y}(x)|]/\mu^2 \le D_{20}\Delta^{m+\lambda-2} + D_{21}S_e. \tag{3.5}$$

Здесь D_{20}, D_{21} – положительные константы. Таким образом, при $r = 2$ и любом μ выполняется (3.3).

Из уравнения

$$\mu^2\bar{u}''(x) - \bar{p}(x)\bar{u}(x) = \bar{f}(x),$$

используя принцип максимума, можно получить оценку

$$\|\bar{u}\|_C \le \max\left(|b_{-1}|, |b_1|, \frac{1}{b}\|\bar{f}\|_C\right),$$

т.е. для любых μ выполняется

$$|\bar{u}(x)| \le D_0, \tag{3.6}$$

где $D_0 > 0$ – константа.

Можно показать, что при $\alpha \le x \le \beta$ выполняется неравенство (см. [1])

$$|g'(x)| \le \left|\frac{g(\beta)-g(\alpha)}{\beta-\alpha}\right| + \left|\frac{\beta-\alpha}{2}\right| \sup_{x\in[\alpha,\beta]}|g''(x)|. \tag{3.7}$$

Пусть $g(x) = \bar{u}(x)$. Положим $\alpha = x$, $\beta = x + \Delta^{1-0.5(m+\lambda)}$ при $x \le 0$ и $\beta = x$, $\alpha = x - \Delta^{1-0.5(m+\lambda)}$ при $x \ge 0$. Из (3.7), используя (3.5) и (3.6), получаем, что неравенство

$$|\bar{u}'(x)| \le \Delta^{0.5(m+\lambda)-1}(2D_0 + 0.5D_{20}) + 0.5\Delta^{1-0.5(m+\lambda)}D_{21}S_e$$

выполняется при любом μ. Отсюда с учетом того, что $\Delta^{1-0.5(m+\lambda)} \le 1$, следует (3.2).

Дифференцируем $\mu^2\bar{u}''(x) - \bar{p}(x)\bar{u}(x) = \bar{f}(x)$ по x два раза. Получаем

$$\bar{u}^{(4)} = [\bar{f}'' + \bar{p}''\bar{u} + \bar{p}\bar{u}'' + 2\bar{p}'\bar{u}']/\mu^2.$$

Используя найденные оценки, получаем, что для любого μ выполняются неравенства

$$|\bar{u}^{(4)}| \le \begin{cases} \Big[C(2,\lambda)\Delta^{\lambda-2} + D_0C(2,\lambda)\Delta^{\lambda-2} + C(0,\lambda)(D_{20}\Delta^{\lambda-2} + D_{21}S_e) + \\ + 2C(1,\lambda)\Delta^{\lambda-1}\left(\Delta^{\lambda/2-1}\left(2D_0 + \frac{1}{2}D_{20}\right) + \frac{1}{2}\Delta^{1-\lambda/2}D_{21}S_e\right)\Big]/\mu^2, \quad m = 0, \\ [C(2,1+\lambda)\Delta^{\lambda-1} + D_0C(2,1+\lambda)\Delta^{\lambda-1} + C(0,1+\lambda)(D_{20}\Delta^{\lambda-1} + D_{21}S_e) + \\ + 2C(1,1+\lambda)(D_{10}\Delta^{(\lambda-1)/2} + D_{11}S_e)]/\mu^2, \quad m = 1. \end{cases}$$

Так как $\Delta^{\lambda-1}\Delta^{\lambda/2-1} \le \Delta^{\lambda-2}$, $\Delta^{\lambda-1}\Delta^{1-\lambda/2} \le 1$ и $\Delta^{(\lambda-1)/2}\Delta^{1-\lambda/2} \le \Delta^{\lambda-1}$, то для любого μ имеем

$$|\bar{u}^{(4)}| \le D_{40}\Delta^{m+\lambda-2}/\mu^2 + D_{41}S_e/\mu^2. \tag{3.8}$$

Подставив $g(x) = \bar{u}''(x)$ в (3.7), положив $\alpha = x$, $\beta = x + \mu$ при $x \le 0$ и $\alpha = x - \mu$, $\beta = x$ при $x \ge 0$, а также воспользовавшись (3.5) и (3.8), получим оценку для третьей производной при $\mu \le 1$:

$$|\bar{u}^{(3)}(x)| \le D_{30}\Delta^{m+\lambda-2}/\mu + D_{31}S_e/\mu.$$

Теорема доказана.

Правые части оценок производных $\bar{u}$ в (3.2), (3.3) состоят из двух слагаемых. Второе слагаемое такое же, как в [1], а первое отличается множителем $\Delta^{m+\lambda-2}$. Воспользуемся оптимальным расположением узлов, описанным в [1]. Проводя выкладки, аналогичные тем, которые были описаны в [1], можно получить, что для аппроксимации (1.2) при оптимальном выборе узлов выполняется равномерная по μ оценка погрешности

$$\|\bar{u}-\bar{u}_h\|_h \le \frac{D}{N^2}\Delta^{m+\lambda-2}. \qquad (3.9)$$

Здесь D – положительная константа, не зависящая от Δ.

4. ОЦЕНКА $\|u - u_h\|_h$

Используя (1.4), (2.8), (2.9) и (3.9), получаем следующую оценку:

$$\|u-u_h\|_h \le 2Q\Delta^{m+\lambda} + \frac{D}{N^2}\Delta^{m+\lambda-2}.$$

Минимизируем правую часть полученного неравенства по Δ. Минимум будет достигаться, когда оба члена будут одного порядка, т.е. при $\Delta = 1/N$. Тогда оценка погрешности для любого $\mu \le 1$ выглядит следующим образом:

$$\|u-u_h\| \le C/N^{m+\lambda}.$$

Рассуждая так же, как в [1], методом "шапочек" получаем неулучшаемость полученной оценки на рассматриваемом классе задач. А именно, для любого способа решения задачи, использующего информацию о значениях $p(x)$ и $f(x)$ в N точках, найдется задача рассматриваемого класса, для которой погрешность $\|u - u_h\|$ не менее $C/N^{m+\lambda}$.

Полученные результаты переносятся на случай системы уравнений $\mu^2 u'' - P(x)u = f(x)$, $u(\pm 1) = b_{\pm}$, где $u = (u_1, \ldots, u_s)^{\mathrm{т}}$, $f = (f_1, \ldots, f_s)^{\mathrm{т}}$, $P(x) = (p_{ij}(x)) \ge bE$ – квадратная матрица порядка s, $b_{\pm}$ – векторы размерности s, т – знак транспонирования.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бахвалов Н.С.* К оптимизации методов решения краевых задач при наличии пограничного слоя // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1969. Т. 9. № 4. С. 841–859.
2. *Бахвалов Н.С.* Численное решение задач с негладкими данными и интерполяционные теоремы // Тр. МИАН СССР. М., 1984. Т. 166. С. 18–22.
3. *Никольский С.М.* О продолжении функций многих переменных с сохранением дифференциальных свойств // Матем. сб. 1956. Т. 40 (82). С. 243–268.