S. A. Gritsenko, N. N. Mot'kina, On Chudakov's theorem involving primes of a special type,
Chebyshevskii Sb., 2011, Volume 12, Issue 4, 75–84

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 12 Выпуск 4 (2011)

О ТЕОРЕМЕ ЧУДАКОВА В ПРОСТЫХ ЧИСЛАХ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

С. А. Гриценко, Н. Н. Мотькина (г. Белгород)

Посвящается 60—летию В.Н. Чубарикова

В 1742 г. в письме к Л. Эйлеру Х. Гольдбах высказал гипотезу, что каждое нечетное число, большее семи, может быть представлено в виде суммы трех простых чисел. В ответном письме Л. Эйлер предположил, что четное число, большее двух, может быть представлено в виде суммы двух простых чисел. Эти задачи получили названия соответственно *тернарная* и *бинарная проблемы Гольдбаха.*

В 1937 г. И.М. Виноградов полностью решил тернарную проблему Гольдбаха. Утверждение бинарной проблемы Гольдбаха остается до сих пор недоказанным. В 1938 г. Н.Г. Чудаков [1] доказал следующую теорему, решив тем самым бинарную проблему Гольдбаха «в среднем».

Теорема 1. *Пусть $K(X)$ равно числу тех четных чисел между 6 и X, которые не могут быть представлены как сумма двух нечетных простых. Тогда*

$$K(X) \leqslant C_D \frac{X}{\log^D X}, \quad 6 \leqslant X < \infty,$$

где D — произвольное фиксированное положительное число, C_D — положительная константа, зависящая только от D.

В настоящей работе изучается вопрос о числе решений бинарной проблемы Гольдбаха в простых числах специального вида. Пусть η — произвольное иррациональное алгебраическое число степени n, a и b — произвольные фиксированные действительные числа из отрезка $[0,1]$. Покажем, что теорема 1 верна и с простыми числами вида:

$$a < \{\eta p_i\} < b, \quad i = 1, 2.$$

Теорема 2. *Пусть $K(X)$ — число тех четных чисел между 6 и X, которые не могут быть представлены как сумма двух нечетных простых специального вида $a < \{\eta p_i\} < b, i = 1, 2, b - a > 1/2$. Тогда при любом фиксированном $D > 0$*

$$K(X) = O(X \log^{-D} X).$$

Данная работа является продолжением исследования авторов ([2], [3]) решения аддитивных задач с простыми числами специального вида. В отличии от ([2], [3]) в настоящей работе η — произвольное иррациональное алгебраическое число.

Доказательство теоремы 2.

1. Пусть $v_j = 2j$, где $j = 1, 2, \ldots, N$, $X/2 < v_j \leqslant X$. Определим множество

$$\mathcal{K} = \{v_j \,|v_j \neq p_1 + p_2,\, a < \{\eta p_i\} < b,\, i = 1, 2\}$$

Рассмотрим интеграл

$$I = \int_0^1 S_0^2(y) T(y)dy,$$

где

$$S_0(y) = \sum_{\substack{p \leqslant X \\ a < \{\eta p\} < b}} e^{2\pi i y p}, \quad T(y) = \sum_{\substack{j \leqslant N \\ v_j \in \mathcal{K}}} e^{-2\pi i y v_j}.$$

Введем функцию $\psi_0(x)$ — характеристическую функцию интервала (a, b) и продолжим ее с периодом 1 на всю числовую ось. Тогда

$$S_0(y) = \sum_{p \leqslant X} \psi_0(\eta p) e^{2\pi i y p}.$$

В лемме о «стаканчиках» И.М. Виноградова (см.[4], с. 22) выберем $r = [\log X]$, $\Delta = \log^{-1,5C} X$. При выборе $\alpha = a + \Delta/2$ и $\beta = b - \Delta/2$ функцию ψ из леммы о «стаканчиках» обозначим как ψ_1, α и β — как α_1 и β_1, соответственно. Положив $\alpha = a - \Delta/2$ и $\beta = b + \Delta/2$, соответствующую функцию ψ обозначим ψ_2, α и β — как α_2 и β_2, соответственно.

Определим

$$J_k = \int_0^1 \left(\sum_{p \leqslant X} \psi_k(\eta p) e^{2\pi i y p} \right)^2 T(y)dy, \quad k = 1, 2. \tag{1}$$

Из свойств $\psi_1(x)$ и $\psi_2(x)$ следует, что $J_1 \leqslant I \leqslant J_2$. Для J_1 и J_2 выведем приближенные формулы, главные члены в которых одинаковы.

Разложив предварительно «сглаженную» функцию $\psi_k(x)$ в ряд Фурье, перейдем к рассмотрению сумм

$$\sum_{|m_1| \leq r\Delta^{-1}} c_k(m_1) \sum_{|m_2| \leq r\Delta^{-1}} c_k(m_2) \int_0^1 S(y + m_1\eta) S(y + m_2\eta) T(y)dy +$$

$$+ O(X^{3/2 - \log \pi} N^{1/2}),$$

где

$$S(y) = \sum_{p \leq X} e^{2\pi i y p}.$$

2. При $m_1 = m_2 = m$ рассмотрим

$$I_1 = \sum_{|m|\leqslant r\Delta^{-1}} c_k^2(m) \sum_{\substack{j\leqslant N\\ v_j\in\mathcal{K}}} e^{2\pi i m\eta v_j} \sum_{p_1\leqslant X}\sum_{p_2\leqslant X}\int_0^1 e^{2\pi i y(p_1+p_2-v_j)}dy.$$

Получим

$$I_1 = \sum_{|m|\leqslant r\Delta^{-1}} c_k^2(m) \sum_{\substack{j\leqslant N\\ v_j\in\mathcal{K}}} e^{2\pi i m\eta v_j} I_{2,1}(X,j),$$

где $I_{2,1}(X,j)$ — число решений уравнения $p_1+p_2=v_j$ в простых числах p_1,p_2.

Поскольку при $m\neq 0$ ([5], с. 16)

$$c_k(m) = i\frac{e^{-2\pi i m\beta_k}-e^{-2\pi i m\alpha_k}}{2\pi m}\left(\frac{e^{\pi i m\Delta/r}-e^{-\pi i m\Delta/r}}{2\pi i m\Delta/r}\right)^r,$$

то для $0<|m|<\Delta^{-1/2}$

$$c_k^2(m) = e^{-2\pi i m(a+b)}\frac{\sin^2\pi m(b-a)}{\pi^2m^2}\left(1+O(\Delta^{1/2})\right).$$

Тогда

$$I_1 = \sum_{\substack{j\leqslant N\\ v_j\in\mathcal{K}}} I_{2,1}(X,j)(\sigma(v_j,a,b)+O(\Delta^{1/2})),$$

где

$$\sigma(v_j,a,b) = \sum_{|m|<\infty} e^{2\pi i m(\eta v_j-(a+b))}\frac{\sin^2\pi m(b-a)}{\pi^2m^2}.$$

Известно [5, с. 224], что

$$I_{2,1}(X,j)\sim \sum_{k+m=v_j}\frac{1}{\log k\log m}\cdot$$

$$\cdot\prod_{p\nmid v_j}\left(1-\frac{1}{(p-1)^2}\right)\prod_{p|v_j}\left(1+\frac{1}{p-1}\right)\gg\frac{X}{\log^2 X}.$$

Нами изучено поведение ряда $\sigma(v_j,a,b)$ ([6]) и получено равенство

$$\sigma(v_j,a,b) = (b-a)^2+\{\eta v_j-a-b\}^2-\{\eta v_j-a-b\}-$$

$$-0,5(\{\eta v_j-2a\}^2-\{\eta v_j-2a\}+\{\eta v_j-2b\}^2-\{\eta v_j-2b\}).$$

При фиксированной разности $b-a$ нами построены графики. Если $b-a>1/2$, то сумма ряда $\sigma(v_j,a,b)>0$.

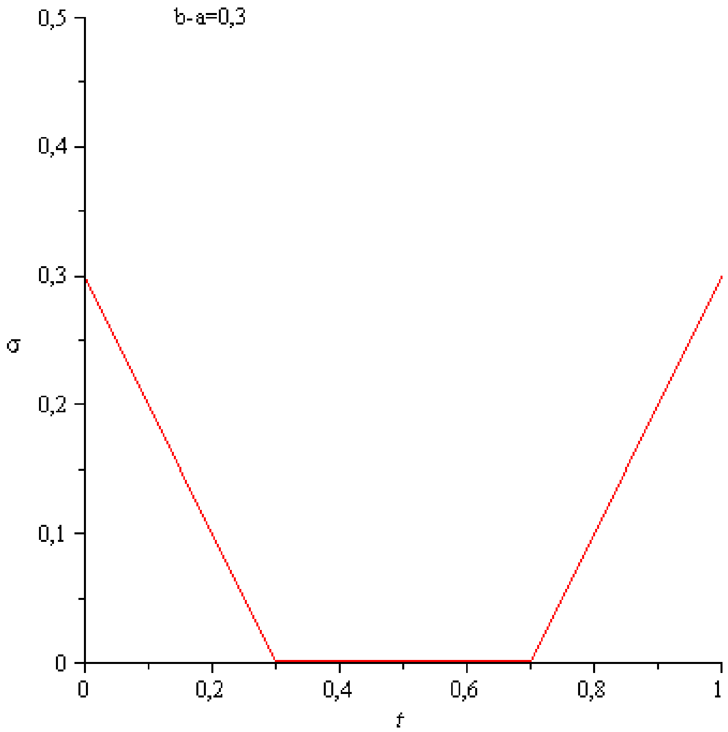

Рис.1. $0 \leqslant b-a \leqslant 1/2$

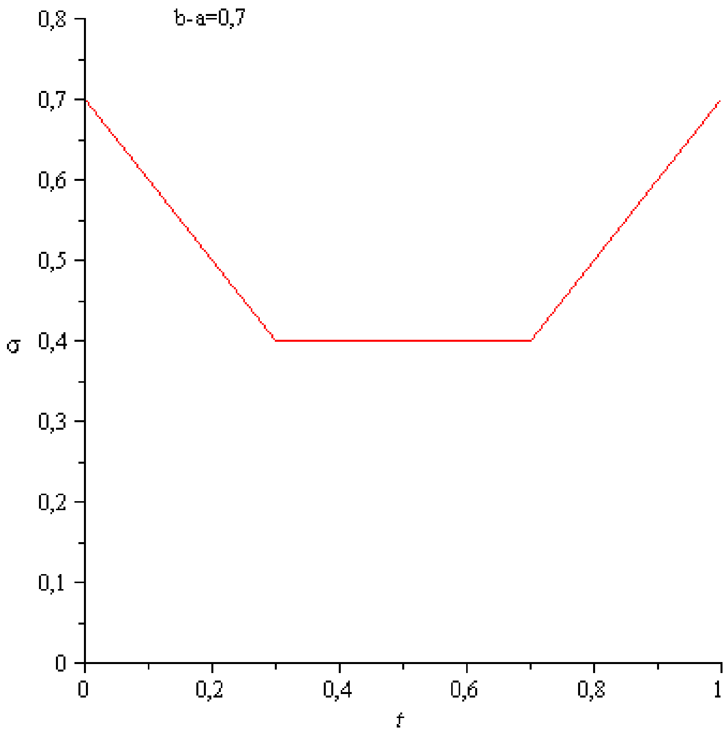

Рис.2. $1/2 < b-a \leqslant 1$

3. Если $m_1 \neq m_2$, то допустим, что $m_1 < m_2$. Сделаем замену $t = y + m_1\eta$. Поскольку подынтегральная функция является периодичной по t с периодом 1, интеграл можно рассматривать на промежутке $E = [-1/\tau; 1 - 1/\tau)$, где $\tau = X\log^{-B} X$, $B > 2C + 8$.

По теореме Дирихле о приближении действительных чисел рациональными числами t представимо в виде

$$t = \frac{d}{q} + \frac{\theta_1}{q\tau}, \quad (d, q) = 1, \quad 1 \leqslant q \leqslant \tau, \quad |\theta_1| \leqslant 1. \tag{2}$$

Промежуток интегрирования по t разобьем на два непересекающихся множества: E_1 — «большие» дуги и E_2 — «малые» дуги. На «больших» дугах E_1 в разложении (2) выберем $q \leqslant \log^A X$, $A > 2C + 8$. Тогда $E_2 = E \backslash E_1$.

4. На «малых» дугах известна оценка для $|S(t)|$. На «больших» дугах получаем оценку для $|S(t + m\eta)|$. Пользуясь неравенством Коши, получаем

$$(\int_{E_1} + \int_{E_2})|S(t)||S(t + (m_2 - m_1)\eta)||T(t - m_1\eta)|dt \ll$$

$$\ll \sqrt{\pi(X)\pi(N)}(\max_{t\in E_1}|S(t + m\eta)| + \max_{t\in E_2}|S(t)|).$$

5. Оценим

$$\max_{t\in E_1}|S(t + m\eta)|$$

сверху. Для этого изучим рациональные приближения числа $t + m\eta$.

По теореме Дирихле

$$\eta = \frac{A}{Q} + \frac{\theta}{Q\tau_1}, \quad (A, Q) = 1, \quad |\theta| < 1, \quad 1 \leqslant Q \leqslant \tau_1. \tag{3}$$

Значение τ_1 выберем позже.

Поскольку η — алгебраическое число степени n, согласно теореме Лиувилля имеем

$$\frac{c(\eta)}{Q^n} \leqslant \left|\eta - \frac{A}{Q}\right|, \quad c(\eta) > 0. \tag{4}$$

Из (3), (4) получаем

$$\tau_1^{\frac{1}{n-1}} \leqslant Q \leqslant \tau_1.$$

Для t, принадлежащих «большим» дугам E_1, рассмотрим $\gamma = t + m\eta$. Тогда

$$\gamma = \frac{d}{q} + \frac{A_1}{Q_1} + \frac{\theta_1}{q\tau} + \frac{\theta m}{Q\tau_1} = \frac{V}{Y} + \frac{\theta_1}{q\tau} + \frac{\theta m}{Q\tau_1},$$

$$(A_1, Q_1) = 1, \quad (V, Y) = 1.$$

Поскольку

$$Y = \frac{qQ_1}{(dQ_1 + A_1q, qQ_1)}, \tag{5}$$

то
$$Y \leqslant qQ \leqslant q\tau_1.$$
При выборе $\tau_1 = \sqrt{\tau}$ выполняется
$$\frac{\theta_1}{q\tau} \ll \frac{1}{\tau_1^2} \ll \left(\frac{q}{Y}\right)^2,$$
$$\left|\frac{\theta_1}{q\tau} + \frac{\theta m}{Q\tau_1}\right| = \frac{\theta_2}{Y^2}, \quad |\theta_2| \leqslant (1+|m|)q^2. \tag{6}$$
Обозначим $(dQ_1 + A_1 q, Q_1)$ как δ, тогда $\delta|q$ и
$$(dQ_1 + A_1 q, qQ_1) \leqslant q(dQ_1 + A_1 q, Q_1) = q\delta \leqslant q^2. \tag{7}$$
Тогда из (5), (7) имеем
$$Y \geqslant \frac{Q_1}{q} \geqslant \frac{Q}{mq}. \tag{8}$$
6. К сумме $S(\gamma)$ применим интегральное преобразование Абеля:
$$S(\gamma) \ll |\mathbb{C}(X)|\frac{1}{\log X} + \int_2^X |\mathbb{C}(x)|\frac{dx}{x\log^2 x},$$
где
$$\mathbb{C}(x) = \sum_{p\leqslant X} e^{2\pi i\gamma p}\log p.$$
При выборе $U = X^{0{,}2/(n-1)}$ имеет место соотношение
$$\mathbb{C}(x) = \sum_{U<n\leqslant X} e^{2\pi i\gamma n}\Lambda(n) + O(\sqrt{X}).$$

Для оценки тригонометрической суммы с функцией Мангольдта рассмотрим:
$$\sum_{U<n\leqslant X} e^{2\pi i\gamma n}\Lambda(n) = W_1 - W_2 - W_3,$$
где
$$W_1 = \sum_{d\leqslant U}\mu(d)\sum_{l\leqslant Xd^{-1}}(\log l)e^{2\pi i\gamma dl},$$
$$W_2 = \sum_{d\leqslant U}\mu(d)\sum_{n\leqslant U}\Lambda(n)\sum_{r\leqslant X(dn)^{-1}} e^{2\pi i\gamma dnr},$$
$$W_3 = \sum_{U<m\leqslant XU^{-1}} a_m \sum_{U<n\leqslant Xm^{-1}}\Lambda(n)e^{2\pi i\gamma mn},$$
$$a_m = \sum_{\substack{d|m\\ d\leqslant U}}\mu(d).$$

Получаем

$$W_1, W_2 \ll \log X \sum_{d \leqslant U^2} |\sum_{l \leqslant Xd^{-1}} e^{2\pi i \gamma dl}| \ll$$

$$\ll \log X \sum_{d \leqslant U^2} \min(Xd^{-1}, \|\gamma d\|^{-1}|).$$

Согласно неравенствам (6), (8) для

$$\gamma d = \frac{Vd + \theta_2 d Y^{-1}}{Y}$$

имеем $|\theta_2 d Y^{-1}| < 0,5$. Полагая

$$r = \begin{cases} k, & \text{если } k \leqslant Y/2, \\ Y - k, & \text{если } Y/2 < k \leqslant Y, \end{cases}$$

где k — наименьший неотрицательный вычет числа Vd по модулю Y, имеем

$$W_1, W_2 \ll \log^2 X \sum_{0 < r \leqslant Y/2} \frac{Y}{r - 0,5} \ll Y \log^3 X.$$

7. Перейдем к оценке суммы W_3. Пусть

$$U < M \leqslant XU^{-1}, \quad U < K \leqslant XM^{-1},$$

$$M_1 \leqslant 2M, \quad K_1 \leqslant 2K, \quad MK \leqslant X.$$

Тогда

$$W_3 \ll |W_3(M, K)| \log^2 X,$$

где

$$W_3(M, K) = \sum_{M < m \leqslant M_1} a_m \sum_{K < n \leqslant K_1} \Lambda(n) e^{2\pi i \gamma mn}.$$

Возведем сумму $W_3(M, K)$ в квадрат, с помощью неравенства Коши получим:

$$W_3(M, K)^2 \ll (\sum_{M < m \leqslant M_1} a_m^2) \sum_{M < m \leqslant M_1} |\sum_{K < n \leqslant K_1} \Lambda(n) e^{2\pi i \gamma mn}|^2.$$

Поскольку $a_m \leqslant \tau(m)$, для первой суммы имеем

$$\sum_{M < m \leqslant M_1} a_m^2 \ll M \log^3 X.$$

Для второй суммы

$$S(M, K) = \sum_{M < m \leqslant M_1} |\sum_{K < n \leqslant K_1} \Lambda(n) e^{2\pi i \gamma mn}|^2,$$

раскрывая квадрат модуля, делая внутренним суммирование по m, получим

$$S(M,K) \ll \log^2 X \sum_{K<n_1,n_2\leqslant K_1} \Big|\sum_{M<m\leqslant M_2} e^{2\pi i\gamma m(n_1-n_2)}\Big|,$$

где $M_2 = \min(M_1, X/n_1, X/n_2)$, и n_1 независимо от n_2 пробегает те же значения, что и n_2. При $n_1 = n_2$ внутренняя сумма равна $M_2 - M$, что даст оценку $\ll X\log^2 X$. В остальных случаях имеем:

$$G(M,K) = \sum_{K<n_2<n_1\leqslant K_1} \Big|\sum_{M<m\leqslant M_2} e^{2\pi i\gamma m(n_1-n_2)}\Big| \ll$$

$$\ll \sum_{K<n_2<n_1\leqslant K_1} \min(M, \|\gamma(n_1-n_2)\|^{-1}) \ll K \sum_{1\leqslant h\leqslant K} \min(M, \|\gamma h\|^{-1}).$$

Сумма по h оценивается по аналогии, что и соответствующая сумма у И. М. Виноградова ([5], с. 94). Поскольку условия леммы ([5], с. 94, лемма VI.2.5) в рассматриваемом случае не выполняются, приводим все рассуждения. Пусть $h = h_1 + Ys$, $0 \leqslant h_1 < Y$, тогда

$$\gamma h = \gamma h_1 + \beta_1 = \frac{Vh_1 + [\beta_1 Y] + \theta_2 h_1 Y^{-1} + \{\beta_1 Y\}}{Y},$$

где $\beta_1 = \gamma Y s$.

$$\sum_{1\leqslant h\leqslant K} \min(M, \|\gamma h\|^{-1}) \ll \left(\frac{K}{Y}+1\right) \sum_{0\leqslant h_1<Y} \min\left(M, \frac{1}{\|\gamma h_1 + \beta_1\|}\right).$$

Делая замену $Z = Vh_1 + [\beta_1 Y]$, учитывая периодичность функции $\|x\|$ с периодом 1, имеем

$$\sum_{0\leqslant h_1<Y} \min\left(M, \frac{1}{\|\gamma h_1 + \beta_1\|}\right) \ll \sum_{|Z|\leqslant 0{,}5Y} \min\left(M, \frac{1}{\left\|\frac{Z}{Y} + \frac{\theta_3(Z)}{Y}\right\|}\right),$$

где $|\theta_3(Z)| < 2|m|q^2$. Следовательно,

$$G(M,K) \ll$$

$$\ll K\left(\frac{K}{Y}+1\right)\left(M(4|m|q^2+2) + \sum_{2|m|q^2\leqslant|Z|\leqslant 0{,}5Y} \frac{Y}{|Z| - 2|m|q^2}\right).$$

Учитывая, что $q \leqslant \log^A X$, $|m| < \Delta^{-1}\log X$, имеем

$$G(M,K) \ll K\left(\frac{K}{Y}+1\right)\left(\frac{M}{\Delta}+Y\right)\log^{1+2A} X \ll$$

$$\ll \left(K^2 M \left(\frac{1}{Y\Delta} + \frac{1}{M} + \frac{1}{K\Delta}\right) + KY\right) \log^{1+2A} X.$$

Тогда

$$W_3(M,K)^2 \ll M \log^3 X (X \log^2 X +$$

$$+K^2 M \left(\frac{1}{Y\Delta} + \frac{1}{M} + \frac{1}{K\Delta}\right) + KY) \log^{3+2A} X) \ll$$

$$\ll \left(X^2 \left(\frac{1}{Y\Delta} + \frac{1}{U} + \frac{1}{U\Delta}\right) + XY\right) \log^{6+2A} X.$$

Окончательно:

$$W_3 \ll \left(X \left(\frac{1}{\sqrt{Y\Delta}} + \frac{1}{\sqrt{U}} + \frac{1}{\sqrt{U\Delta}}\right) + \sqrt{XY}\right) \log^{4+A} X.$$

8. По лемме ([7], с. 35) имеем

$$\max_{t\in E_2} |S(t)| \ll \log^4 X (X \log^{-A/2} X + X^{4/5} + X^{1/2}\tau^{1/2}).$$

9. В результате получили

$$(\int_{E_1} + \int_{E_2})|S(t)||S(t+(m_2-m_1)\eta)||T(t-m_1\eta)|dt \ll \frac{X^2}{\log^C X}.$$

10. При выборе $A = D + 12,\ B = 2D + 14,\ C = D + 2$ следует утверждение теоремы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Чудаков Н Г. О плотности совокупности четных чисел, непредставимых как сумма двух нечетных простых // Изв. АН СССР, Серия математич., №1, 1938, с. 25—40.

[2] Motkina N. Ternary Goldbach's Problem Involving Primes of a special type [Электронный ресурс] / Gritsenko S., Motkina N. // Режим доступа: http://arXiv.org/abs/0812.4606 — 26 Dec 2008

[3] Motkina N. Hua Loo Keng's Problem Involving Primes of a Special Type [Электронный ресурс] / Gritsenko S., Motkina N. // Режим доступа: http://arXiv.org/abs/0812.4665 — 25 Dec 2008

[4] Виноградов И. М. Особые варианты метода тригонометрических сумм. — М.: Наука, 1983.

[5] Карацуба А. А. Основы аналитической теории чисел. —М.: Наука, 1983.

[6] Мотькина Н. Н. О некоторых особых рядах / С. А. Гриценко, Н. Н. Мотькина // Комплексный анализ и его приложения в дифференциальных уравнениях и теории чисел: сб. материалов Международной конференции (Белгород, 17-21 окт. 2011 г.). — Белгород: ИПК НИУ «БелГУ», 2011. —С. 44—45.

[7] Вон Р. Метод Харди–Литтлвуда. —М.: Мир,1985.

НИУ «Белгородский государственный университет»
Поступило 1.12.11