Функциональный анализ и его приложения,
т. 11, вып. 4, 1977, 76—77.

УДК 517.43

К СПЕКТРАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Е. И. Глазман

0. Рассмотрим дифференциально-разностную операцию

$$l[y]=\sum_{k=0}^{N}\sum_{m=0}^{M}\left(i\frac{d}{dx}\right)^k[a_{km}y(x+\alpha_m)+\overline{a_{km}}y(x-\alpha_m)],$$

где $-\infty<x<\infty$, $\alpha_m\in\mathbf{R}$, $a_{km}\in\mathbf{C}$. Всюду в дальнейшем будем предполагать, что операция $l[y]$ не является чисто разностной. Пусть A — замыкание в $L^2(-\infty,\infty)$ симметрического оператора, заданного на множестве финитных бесконечно дифференцируемых функций операцией $l[y]$. Обозначим через $D[A]$ область определения оператора A и через $s(t)$ — его «символ»:

$$s(t)=\sum_{k=0}^{N}\sum_{m=0}^{M}t^k(a_{km}e^{i\alpha_m t}+\overline{a_{km}}e^{-i\alpha_m t}).$$

Пусть $\tilde{y}(t)$ — преобразование Фурье функции $y(x)$. Тогда

$$D[A]=\left\{y(x)\in L^2(-\infty,\infty):\int_{-\infty}^{\infty}|s(t)\tilde{y}(t)|^2dt<\infty\right\}.$$

Примеры. 1) Если $l[y]=\frac{d^2}{dx^2}[y(x+1)-2y(x)+y(x-1)]$, то $D[A]$ содержит разрывные функции.

2) Если $l[y]=\frac{d^4}{dx^4}[y(x+1)-2y(x)+y(x-1)]$, то все функции из $D[A]$ непрерывны, но среди них есть недифференцируемые.

3) Если $l[y]=\frac{d^4}{dx^4}[y(x+\sqrt{2})+y(x+1)-4y(x)+y(x-1)+y(x-\sqrt{2})]$, то все функции из $D[A]$ дифференцируемы.

1. Введем оператор A_q на $D[A]$ формулой

$$A_qy=Ay+qy. \tag{1}$$

Здесь $q(x)$ вещественна и принадлежит $L^\infty(\mathbf{R})$. Оператор A_q самосопряжен. (В случае полуограниченных $s(t)$ и $q(x)\in L^\infty_{\mathrm{loc}}$ сохраним обозначение A_q для расширения по Фридрихсу оператора, заданного формулой (1) на множестве бесконечно дифференцируемых финитных функций.)

Теорема. *Пусть $q(x)\to 0$ при $|x|\to\infty$. Тогда существенные спектры операторов A_q и A совпадают.*

В доказательстве теоремы используется оценка (2) работы [6].

Следствие. *Пусть $s(t)\geqslant 0$ и $q(x)\to\infty$ при $|x|\to\infty$. Тогда спектр оператора A_q дискретен.*

2. Методы, развитые в [2], [3], позволяют получить признаки существования и полноты волновых операторов $W_\pm(A_q,A)$.

Предположим, что существует $\varepsilon>0$, для которого

$$\int_{-\infty}^{\infty}|q(x)|^2|x|^{1+\varepsilon}dx<\infty, \tag{2}$$

и выполнено одно из следующих условий:

а) $\int_{-\infty}^{\infty}[1+s^2(t)]^{-1}dt<\infty$,

б) $\forall\delta>0\quad\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sqrt{\operatorname{mes}\{[m,m+1)\cap\{t:|s(t)|\leqslant\delta\}\}}<\infty$.

Тогда операторы $W_\pm(A_q,A)$ существуют и полны.

Пример. Если «потенциал» $q(x)$ удовлетворяет условию (2) и оператор A задан операцией

$$l[y]=\frac{d^2}{dx^2}[y(x+\sqrt{2})+y(x+1)-4y(x)+y(x-1)+y(x-\sqrt{2})],$$

то волновые операторы $W_\pm(A_q,A)$ существуют и полны.

© Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука»,
«Функциональный анализ и его приложения», 1977

Для проверки этого утверждения мы используем условие б) и один арифметический результат Ленга (см. [5], глава IV, теорема 10).

3. Следующие примеры показывают, что известные критерии дискретности спектра и дискретности (конечности) отрицательного спектра (см., например, [1]) оператора Штурма — Лиувилля не переносятся на случай его дифференциально-разностного аналога

$$[y(x+1) - 2y(x) + y(x-1)]'' + q(x)y(x). \tag{3}$$

α) Положим $q(x) = x^2 \sin^2 \pi x$. Тогда $\int\limits_x^{x+h} q(t)\,dt \to \infty$ при $|x| \to \infty$ и любом h, однако спектр оператора A_q не дискретен.

β) Положим $q(x) = -1/(1+x^2 \sin^6 \pi x)$. Тогда $\int\limits_x^{x+1} q(t)\,dt \to 0$ при $|x| \to \infty$, однако спектр оператора A_q на левой полуоси не дискретен.

γ) Если $\psi(x) = -1$ при $|x| \leqslant a$ и $\psi(x) = 0$ при $|x| > a$, то число отрицательных собственных значений оператора $A_{\omega\psi}$ $(\omega > 0)$ бесконечно, хотя потенциал $q(x) = \omega\psi(x)$ финитен.

Пусть $N_\omega(\lambda)$ — число собственных значений, взятых с учетом кратности и не превосходящих λ, оператора $A_{\omega\psi}$. При $\lambda < 0$ и $a = 1/4$ имеет место асимптотическая формула

$$\lim_{\omega\to\infty} \frac{N_\omega(\lambda)}{\omega} = 2\sqrt{|\lambda|}.$$

4. Рассмотрим оператор A_q, заданный формулой (3). *Если $q(x)$ — выпуклая функция, $q(x) \to \infty$ при $|x| \to \infty$, и $\lim (q(x)/q(y)) = 1$ при $|x| \to \infty$, $|y| \to \infty$, $|x-y| \leqslant 1$, то число собственных значений (с учетом кратности), не превосходящих λ, оператора A_q подчинено асимптотике*

$$N(\lambda) \sim \frac{1}{\pi^2} \int\limits_{q(x)\leqslant\lambda} \sqrt{\lambda - q(x)}\,dx \left(\ln \int\limits_{q(x)\leqslant\lambda} \sqrt{\lambda - q(x)}\,dx - \frac{1}{2}\ln\lambda\right).$$

При доказательстве этого факта мы пользовались соответствующей формулой асимптотики спектра оператора Штурма — Лиувилля [4].

5. Пусть $f(t) \in L^\infty(-\pi, \pi)$, $f(t) \geqslant 0$. Предположим, что в некоторой окрестности нуля функция $f(t)$ выпукла и $f(0) = 0$, $f''(0) > 0$, а вне этой окрестности $\operatorname{ess\,inf} f(t) > 0$.

Рассмотрим дифференциально-разностную операцию

$$l_a[y] = -\frac{d^2}{dx^2} \sum_{n=-2a-1}^{2a+1} c_n y(x-n),$$

где $c_n = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt$, a — натуральное число. Обозначим через A_a расширение по Фридрихсу оператора, заданного на множестве бесконечно дифференцируемых функций с носителями в интервале $(-a, a)$ формулой $y \mapsto \chi_a l_a[y]$, где $\chi_a(x)$ — характеристическая функция интервала $(-a, a)$. Пусть $N_a(\lambda)$ — число собственных значений (с учетом кратности), не превосходящих λ, оператора A_a и $\lambda_1(a)$ — его наименьшее собственное значение.

При $a \to \infty$ и фиксированном λ имеют место асимптотические формулы:

$$N_a(\lambda) \sim \frac{2}{\pi^2} \sqrt{\frac{2\lambda}{f''(0)}}\, a \ln a, \qquad \lambda_1(a) \sim \frac{r^4 f''(0)}{2} a^{-4}.$$

Здесь r — корень уравнения $\operatorname{tg} r = -\operatorname{th} r$ в интервале $(0, \pi)$.

Ростовский государственный университет

Поступило в редакцию 28 февраля 1977 г.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Бирман М. Ш., Павлов Б. С., Вестник ЛГУ, № 1 (1961), 61—74. 2. Бирман М. Ш., Функц. анализ, 3, вып. 3 (1969), 1—16. 3. Бирман М. Ш., Соломяк М. З., Сб. «Десятая математическая школа», Киев, 1974. 4. De Wet J. S. and Mandl F., Proc. Roy. Soc. A200 (1950), 572—580. 5. Ленг С., Введение в теорию диофантовых приближений, М., «Мир», 1970. 6. Лин В. Я., Матем. заметки 6, вып. 2. (1969), 173—179.