Н. С. Демин, У. В. Андреева, Экзотические опционы купли с ограничением выплат и гарантированным доходом в модели Блэка–Шоулса,
Пробл. управл., 2011, выпуск 1, 33–39

УДК 517.977

ЭКЗОТИЧЕСКИЕ ОПЦИОНЫ КУПЛИ С ОГРАНИЧЕНИЕМ ВЫПЛАТ И ГАРАНТИРОВАННЫМ ДОХОДОМ В МОДЕЛИ БЛЭКА—ШОУЛСА

Н.С. Демин, У.В. Андреева

Дано решение задач хеджирования для трех видов экзотических опционов купли европейского типа с ограничением выплат и гарантированным доходом в случае выплаты дивидендов по базисному активу. Получены формулы, определяющие стоимости опционов, портфели (хеджирующие стратегии) и соответствующие им капиталы. Рассмотрены свойства решения.

Ключевые слова: финансовый рынок, опцион, платежная функция, капитал, портфель, хеджирование.

ВВЕДЕНИЕ

Опцион является производной (вторичной) ценной бумагой и представляет собой контракт, по которому покупатель опциона приобретает право покупки или продажи некоторого оговоренного в контракте базисного актива по оговоренной цене, а продавец за премию, которая является ценой опциона, обязан исполнить требование покупателя при предъявлении опциона к исполнению [1—4]. В первом случае имеем опцион купли (*call option*), а во втором — опцион продажи (*put option*). Если платежные обязательства характеризуются только ценой базисного актива в фиксированный момент исполнения опциона (спотовой ценой — *spot price*) и ценой исполнения контракта (страйковой ценой — *striking price*), то такие опционы являются стандартными опционами европейского типа. Развитие рынка опционных контрактов потребовало более сложных платежных обязательств, учитывающих как желание эмитента ограничить выплаты по опционам, так и желание покупателя опциона иметь гарантированный доход. Платежные функции с дополнительными условиями породили класс экзотических опционов (*exotic options*) [5—7]. В обзорной работе [5], написанной по материалам иностранной научной печати, отмечается, что хотя на западных финансовых рынках, особенно на внебиржевых, в настоящее время имеют хождение несколько десятков экзотических опционов, теория этих опционов мало разработана. Контракты по ним заключаются на основе эвристических соображений и опыта работы дилеров с корректировкой классических формул Блэка—Шоулса [8] и Кокса—Росса—Рубинштейна [9], определяющих цены стандартных опционов соответственно в диффузионной и биномиальной моделях. В данной работе рассматриваются три вида опционов купли на диффузионном (B, S)-рынке: опционов с ограничением выплат, которые дают преимущество продавцу опциона; опционов с гарантированной выплатой, которые дают преимущество покупателю опциона.

Принятые обозначения:

$\boldsymbol{P}(\cdot)$ — вероятность события; $E(\cdot)$ — математическое ожидание; $I[A]$ — индикатор события A, т. е. $I[A] = 1$, если событие A происходит, и $I[A] = 0$, если не происходит; $N\{a; b\}$ — нормальная (гауссовская) плотность с параметрами a и b; $a^+ = \max\{a; 0\}$;

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(y)dy, \quad \varphi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{y^2}{2}\right). \quad \text{(В.1)}$$

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Задача рассматривается на стохастическом базисе $(\Omega, F, \boldsymbol{F} = (F_t)_{t \geqslant 0}, \boldsymbol{P})$ [1—3]. На финансовом рынке обращаются рисковые (акции) и безрисковые (банковский счет, государственные облигации) активы, текущие цены которых S_t и B_t в течение фиксированного интервала времени $t \in [0, T]$ определяются уравнениями [1—3]

$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dW_t), \quad dB_t = rB_t d_t, \qquad (1.1)$$

где первое уравнение есть стохастическое дифференциальное уравнение Ито, W_t — стандартный винеровский процесс, $\sigma > 0$, $r > 0$, $\mu \in R = (-\infty, +\infty)$, $S_0 > 0$, $B_0 > 0$, решения которых имеют вид

$$S_t(\mu) = S_0\exp\{(\mu - (\sigma^2/2))t + \sigma W_t\},$$
$$B_t = B_0\exp\{rt\}. \qquad (1.2)$$

Считаем, что текущее значение капитала инвестора X_t определяется в виде

$$X_t = \beta_t B_t + \gamma_t S_t, \qquad (1.3)$$

где $\pi_t = (\beta_t, \gamma_t)$ есть пара F_t-измеримых процессов, составляющая портфель ценных бумаг инвестора (стратегию инвестирования). Аналогично предполагается [10], что за обладание акцией выплачиваются дивиденды в соответствии с процессом D_t со скоростью $\delta\gamma_t S_t$, пропорциональной рисковой части капитала с коэффициентом δ таким, что $0 \leqslant \delta < r$, т. е. $dD_t = \delta\gamma_t S_t dt$. Тогда капитал в задаче с дивидендами изменяется как $dX_t = \beta_t dB_t + \gamma_t dS_t + dD_t$. Так как $dX_t = \beta_t dB_t + \gamma_t dS_t + B_t d\beta_t + S_t d\gamma_t$, то $B_t d\beta_t + S_t d\gamma_t = dD_t$, что является балансовым соотношением, заменяющим условие самофинансируемости $B_t d\beta_t + S_t d\gamma_t = 0$ в стандартной задаче [1—3]. Тогда из выражений (1.1) и (1.3) следует, что капитал определяется уравнением $dX_t = rX_t dt + \sigma\gamma_t S_t d W_t^{\mu - r + \delta}$, где согласно теореме Гирсанова [1—3] процесс $W_t^{\mu - r + \delta} = W_t + ((\mu - r + \delta)/\sigma)t$ является винеровским относительно меры $P^{\mu - r + \delta}$ такой, что

$$d\boldsymbol{P}_t^{\mu - r + \delta} = Z_t^{\mu - r + \delta} d\boldsymbol{P}_t, \qquad (1.4)$$

$$Z_t^{\mu - r + \delta} = \exp\left\{-\frac{\mu - r + \delta}{\sigma} W_t - \frac{1}{2}\left(\frac{\mu - r + \delta}{\sigma}\right)^2 t\right\}. \qquad (1.5)$$

Так как $Law(W^{\mu - r + \delta}|\boldsymbol{P}^{\mu - r + \delta}) = Law(W|\boldsymbol{P})$, то [1, 2]

$$Law\left(S_0\exp\left\{\left(r - \delta - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t^{\mu - r + \delta}\right\};\right.$$
$$\left. t \leqslant T|\boldsymbol{P}^{\mu - r + \delta}\right) =$$
$$= Law\left(S_0\exp\left\{\left(r - \delta - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t\right\};\ t \leqslant T|\boldsymbol{P}\right).$$

Таким образом, $Law(S(\mu, r, \delta)|\boldsymbol{P}^{\mu - r + \delta}\} = Law(S(r, \delta)|\boldsymbol{P})$, т. е. вероятностные свойства процесса $S(\mu, r, \delta)$, определяемого уравнением

$$d_t S_t(\mu, r, \delta) = S_t(\mu, r, \delta)((r - \delta)dt + \sigma d W_t^{\mu - r + \delta}),$$

относительно $\boldsymbol{P}^{\mu - r + \delta}$, совпадают со свойствами процесса $S_t(r, \delta)$, определяемого уравнением

$$d_t S_t(r, \delta) = S_t(r, \delta)((r - \delta)dt + \sigma dW_t),$$

относительно меры $\boldsymbol{P}$. Это означает, что мера $\boldsymbol{P}^{\mu - r + \delta}$, определяемая в виде (1.4), (1.5), является риск-нейтральной (мартингальной) мерой [1—4].

Ставится задача: таким образом управлять капиталом, т. е. сформировать портфели (хеджирующие стратегии) $\pi_t^* = (\gamma_t^*, \beta_t^*)$, чтобы соответствующие им капиталы $X_t^* = \beta_t^* B_t + \gamma_t^* S_t$ обеспечили выполнение платежных обязательств $X_T^* = f_t$ относительно платежных функций

$$f_T = f_T^{\min}(S_T) = \min\{(S_T - K_1)^+, K_2\}, \qquad (1.6)$$

$$f_T = f_T^{\max 1}(S_T) = \max\{(S_T - K_1), K_2\}, \qquad (1.7)$$

$$f_T = f_T^{\max 2}(S_T) = \max\{(S_T - K_1), K_2\}I[S_T > K_1], \quad (1.8)$$

где $K_1 > 0$, $K_1 > 0$, а также найти стоимости опционов $C_T^{\min} = X_0^{\min}$, $C_T^{\max 1} = X_0^{\max 1}$, $C_T^{\max 2} = X_0^{\max 2}$ и рассмотреть их свойства.

Согласно платежному обязательству (1.6) если $S_T > K_1$, то владелец опциона предъявляет его к исполнению и получает выплату в размере $\Delta = S_T - K_1$, если $S_T < K_1 + K_2$, и в размере $\Delta = K_2$, если $S_T \geqslant K_1 + K_2$. Согласно платежному обязательству (1.7) владелец опциона может всегда предъявить его к исполнению, получая гарантированную выплату $\Delta = K_2$, если $S_T \leqslant K_1 + K_2$, и выплату в размере $\Delta = S_T - K_1$, если $S_T > K_1 + K_2$. В случае платежного обязательства (1.8) опцион предъявляется к исполнению только при выполнении условия $S_T > K_1$, а далее выплаты осуществляются как и для $f_T^{\max 1}(S_T)$.

Замечание 1. Дополнительные условия, вносимые в платежные обязательства экзотических опционов, могут быть как в пользу покупателя, так и в пользу продавца опциона, что в первом случае должно приводить к увеличению, а во втором — к уменьшению цены опциона относительно стандартного опциона с платежной функцией $f_T(S_T) = (S_T - K_1)^+$. Очевидно, что опционы с платежной функцией $f_T^{\min}(S_T)$ соответствуют платежным обязательствам в пользу продавца опциона, а с платежными функциями $f_T^{\max 1}(S_T)$ и $f_T^{\max 2}(S_T)$ — в пользу покупателя опциона, причем с $f_T^{\max 1}(S_T)$ в большей мере, чем с $f_T^{\max 2}(S_T)$. ♦

2. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Далее всюду

$$z_0(t) = \frac{\ln\frac{K_1}{S_t} - \left(r - \delta - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}},$$

$$z_1(t) = \frac{\ln\frac{K_1 + K_2}{S_t} - \left(r - \delta - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}},$$

$$z_2(t) = \frac{\ln\frac{K_1}{S_t} - \left(r - \delta + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}},$$

$$z_3(t) = \frac{\ln\frac{K_1 + K_2}{S_t} - \left(r - \delta + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}, \quad (2.1)$$

а z_0, z_1, z_2, z_3 определяются формулами (2.1) при $t = 0$.

Теорема 1. *Для опциона с платежной функцией вида* (1.6) *стоимость опциона* $C_T^{\min}$*, капитал* $X_t^{\min}$ *и портфель* $\pi_t^{\min} = (\gamma_t^{\min}, \beta_t^{\min})$ *определяются формулами*

$$C_T^{\min} = S_0 e^{-\delta T}[\Phi(z_3) - \Phi(z_2)] - K_1 e^{-rT}[\Phi(z_1) - \Phi(z_0)] + K_2 e^{-rT}\Phi(-z_1), \quad (2.2)$$

$$X_t^{\min} = S_t e^{-\delta(T-t)}[\Phi(z_3(t)) - \Phi(z_2(t))] - K_1 e^{-r(T-t)}[\Phi(z_1(t)) - \Phi(z_0(t))] + K_2 e^{-r(T-t)}\Phi(-z_1(t)), \quad (2.3)$$

$$\gamma_t^{\min} = e^{-\delta(T-t)}[\Phi(z_3(t)) - \Phi(z_2(t))], \quad (2.4)$$

$$\beta_t^{\min} = -(K_1/B_t)e^{-r(T-t)}[\Phi(z_1(t)) - \Phi(z_0(t))] + (K_2/B_t)e^{-r(T-t)}\Phi(-z_1(t)). \ ♦ \quad (2.5)$$

Теорема 2. *Для опциона с платежной функцией вида* (1.7) *стоимость опциона* $C_T^{\max 1}$*, капитал* $X_T^{\max 1}$ *и портфель* $\pi_t^{\max 1} = (\gamma_t^{\max 1}, \beta_t^{\max 1})$ *определяются формулами*

$$C_T^{\max 1} = S_0 e^{-\delta T}\Phi(-z_3) - K_1 e^{-rT}\Phi(-z_1) + K_2 e^{-rT}\Phi(z_1), \quad (2.6)$$

$$X_T^{\max 1} = S_t e^{-\delta(T-t)}\Phi(-z_3(t)) - K_1 e^{-r(T-t)}\Phi(-z_1(t)) + K_2 e^{-r(T-t)}\Phi(z_1(t)), \quad (2.7)$$

$$\gamma_t^{\max 1} = e^{-\delta(T-t)}\Phi(-z_3(t)), \quad (2.8)$$

$$\beta_t^{\max 1} = -(K_1/B_t)e^{-r(T-t)}\Phi(-z_1(t)) + (K_2/B_t)e^{-r(T-t)}\Phi(z_1(t)). \ ♦ \quad (2.9)$$

Теорема 3. *Для опциона с платежной функцией вида* (1.8) *стоимость опциона* $C_T^{\max 2}$*, капитал* $X_T^{\max 2}$ *и портфель* $\pi_t^{\max 2} = (\gamma_t^{\max 2}, \beta_t^{\max 2})$ *определяются формулами*

$$C_T^{\max 2} = S_0 e^{-\delta T}\Phi(-z_3) - K_1 e^{-rT}\Phi(-z_1) + K_2 e^{-rT}[\Phi(z_1) - \Phi(z_0)], \quad (2.10)$$

$$X_T^{\max 2} = S_t e^{-\delta(T-t)}\Phi(-z_3(t)) - K_1 e^{-r(T-t)}\Phi(-z_1(t)) + K_2 e^{-r(T-t)}[\Phi(z_1(t)) - \Phi(z_0(t))], \quad (2.11)$$

$$\gamma_t^{\max 2} = e^{-\delta(T-t)}[\Phi(-z_3(t)) + \left(\frac{K_2}{S_t}\right)\frac{e^{-r(T-t)}}{\sigma\sqrt{T-t}}\varphi(z_0(t)), \quad (2.12)$$

$$\beta_t^{\max 2} = \frac{e^{-r(T-t)}}{B_t}\left\{K_2[\Phi(z_1(t)) - \Phi(z_0(t))] - K_1\Phi(-z_1(t)) - \frac{K_2\varphi(z_0(t))}{\sigma\sqrt{T-t}}\right\}. \ ♦ \quad (2.13)$$

Доказательства теорем 1—3 см. в Приложении.

Следствие 1. *Связь между решениями задач с платежными функциями* (1.7) *и* (1.8) *определяется формулами*

$$C_T^{\max 2} = C_T^{\max 1} - K_2 e^{-rT}\Phi(z_0), \quad (2.14)$$

$$X_T^{\max 2} = X_T^{\max 1} - K_2 e^{-r(T-t)}\Phi(z_0(t)),$$

$$\gamma_t^{\max 2} = \gamma_t^{\max 1} + \left(\frac{K_2}{S_t}\right)\frac{e^{-r(T-t)}}{\sigma\sqrt{T-t}}\varphi(z_0(t)),$$

$$\beta_t^{\max 2} = \beta_t^{\max 1} - \frac{K_2 e^{-r(T-t)}}{B_t}\left[\Phi(z_0(t)) + \frac{\varphi(z_0(t))}{\sigma\sqrt{T-t}}\right]. \ ♦$$

Данное утверждение следует непосредственно из формул (2.6)—(2.13).

3. СВОЙСТВА

Пусть по определению $(C_T)^\alpha = \partial C_T/\partial\alpha$ есть коэффициент чувствительности, определяющий зависимости стоимостей опционов от параметра α.

Теорема 4. *Коэффициенты чувствительности, определяющие зависимости стоимостей опционов от начальной цены S_0 базисного актива, от цены исполнения опционов K_1 и от величины K_2, ограничивающей выплаты по опциону в случае платежной функции* (1.6) *и гарантирующей доход в случае платежных функций* (1.7) *и* (1.8), *определяются формулами*

$$(C_T^{\min})^{S_0} = e^{-\delta T}[\Phi(z_3) - \Phi(z_2)],$$
$$(C_T^{\min})^{K_1} = -e^{-rT}[\Phi(z_1) - \Phi(z_0)],$$
$$(C_T^{\min})^{K_2} = e^{-rT}\Phi(-z_1), \quad (3.1)$$

$$(C_T^{\max 1})^{S_0} = e^{-\delta T}\Phi(-z_3), \quad (C_T^{\max 1})^{K_1} = -e^{-rT}\Phi(-z_1),$$
$$(C_T^{\max 1})^{K_2} = e^{-rT}\Phi(z_1), \quad (3.2)$$

$$(C_T^{\max 2})^{S_0} = e^{-\delta T}\Phi(-z_3) + \left(\frac{K_2}{S_0}\right)\frac{e^{-rT}}{\sigma\sqrt{T}}\varphi(z_0),$$
$$(C_T^{\max 2})^{K_1} = -e^{-rT}\Phi(-z_1) - \left(\frac{K_2}{K_1}\right)\frac{e^{-rT}}{\sigma\sqrt{T}}\varphi(z_0),$$
$$(C_T^{\max 2})^{K_2} = e^{-rT}[\Phi(z_1) - \Phi(z_0)], \quad (3.3)$$

при этом

$$(C_T^{\min})^{S_0} > 0, \quad (C_T^{\min})^{K_1} < 0, \quad (C_T^{\min})^{K_2} > 0,$$
$$(C_T^{\max 1})^{S_0} > 0, \quad (C_T^{\max 1})^{K_1} < 0, \quad (C_T^{\max 1})^{K_2} > 0, \quad (3.4)$$
$$(C_T^{\max 2})^{S_0} > 0, \quad (C_T^{\max 2})^{K_1} < 0, \quad (C_T^{\max 2})^{K_2} > 0,$$

т. е. по S_0 и K_2 опционы являются возрастающими, а по K_1 — убывающими функциями. ♦

Формулы (3.1)—(3.3) следуют из формул (2.2), (2.6) и (2.10) в результате дифференцирования по S_0, K_1 и K_2 с учетом формул (2.1) и выражений (П.6), (П.11) и (П.12) — см. Приложение, а свойства (3.4) следуют очевидным образом из формул (3.1)—(3.3) с учетом, что $\Phi(x) > 0$, $\varphi(y) > 0$ (см. формулы (В.1)), функция $\Phi(x)$ монотонно возрастающая от $\Phi(-\infty) = 0$ до $\Phi(+\infty) = 1$ со свойством $\Phi(x) + \Phi(-x) = 1$, а $z_1 > z_0$ и $z_3 > z_2$.

Экономическая интерпретация свойств (3.4) заключается в следующем. Возрастание стоимостей опционов с возрастанием начальной цены базисного актива S_0 объясняется тем, что при этом в среднем возрастает S_T, что приводит к увеличению выплат и к увеличению вероятности предъявления к исполнению опционов с платежными функциями (1.6) и (1.8) и к увеличению выплат в случае функции (1.7), а за уменьшение риска и увеличение дохода следует больше платить. Увеличением дохода объясняется и рост цен опционов с ростом K_2. Поскольку при увеличении K_1 уменьшается размер возможных выплат по всем опционам, а для опционов с платежными функциями (1.6) и (1.8) к тому же уменьшается и вероятность их предъявления к исполнению, то этим объясняется уменьшение цен опционов с ростом K_1, так как за уменьшение дохода и увеличение риска следует меньше платить.

Замечание 2. Из формул (1.6) и (1.8) следует, что

$$\lim_{K_2 \to \infty} f_T^{\min}(S_T) = \lim_{K_2 \to 0} f_T^{\max 2}(S_T) = f_T(S_T) =$$
$$= (S_T - K_1)^+, \quad (3.5)$$

где $f_T(S_T)$ — платежная функция стандартного опциона купли [1—4]. ♦

Следствие 2. *Пусть C_T, X_t, γ_t, β_t есть пределы $C_T^{\min}$, $X_t^{\min}$, $\gamma_t^{\min}$, $\beta_t^{\min}$ при $K_2 \to \infty$ либо пределы $C_T^{\max 2}$, $X_T^{\max 2}$, $\gamma_t^{\max 2}$, $\beta_t^{\max 2}$ при $K_2 \to 0$. Тогда*

$$C_T = S_0e^{-\delta T}\Phi(-z_2) - K_1e^{-rT}\Phi(-z_0), \quad (3.6)$$
$$X_t = S_te^{-\delta(T-t)}\Phi(-z_2(t)) - K_1e^{-r(T-t)}\Phi(-z_0(t)), \quad (3.7)$$
$$\gamma_t = e^{-\delta(T-t)}\Phi(-z_2(t)),$$
$$\beta_t = -(K_1/B_t)e^{-r(T-t)}\Phi(-z_0(t)). \blacklozenge \quad (3.8)$$

Так как $\Phi(z_1) = \Phi(z_3) = 1$ при $K_2 \to \infty$, то формулы (3.6)—(3.8) следуют из формул (2.2) — (2.5) с учетом свойства $\Phi(x) + \Phi(-x) = 1$. Так как $z_1 = z_0$ и $z_3 = z_2$ при $K_2 = 0$, то аналогичным образом формулы (3.6)—(3.8) следуют из формул (2.10)—(2.13).

Данный результат представляет собой полное решение задачи хеджирования для стандартного опциона купли при наличии выплат дивидендов. В случае $\delta = 0$, когда выплаты дивидендов отсутствуют, формула (3.6) переходит в формулу Блэка—Шоулса [8].

Следствие 3. *Для стоимостей рассмотренных опционов справедливы соотношения*

$$C_T^{\max 1} > C_T^{\max 2} > C_T > C_T^{\min}. \blacklozenge \quad (3.9)$$

Свойство $C_T^{\max 1} > C_T^{\max 2}$ следует непосредственно из формулы (2.14). Свойства $C_T^{\max 2} > C_T > C_T^{\min}$ следуют из того, что согласно свойствам (3.4) $C_T^{\max 2}$ и $C_T^{\min}$ — возрастающие функции K_2 и при этом, согласно следствию 2, $\lim C_T^{\max 2} = C_T$ при $K_2 \downarrow 0$, а $\lim C_T^{\min} = C_T$ при $K_2 \uparrow \infty$.

Экономическая интерпретация свойств (3.9) заключается в следующем. Поскольку в случае стандартных опционов с платежной функцией вида (3.5) отсутствуют ограничения на размер выплаты по опциону, то $C_T^{\min} < C_T$, так как за наличие ограничений, уменьшающих размер возможного дохода, следует меньше платить. Свойства $C_T^{\max 1} > C_T$ и $C_T^{\max 2} > C_T$ объясняются тем, что за возможность получения гарантированного дохода следует больше платить. Свойство $C_T^{\max 2} < C_T^{\max 1}$ объясняется наличием дополнительного условия $S_T > K_1$, в котором заключена возможность непредъявления опциона к исполнению, а за возрастающий риск следует меньше платить. На рисунке представлены зависимости $C_T^{\min}$, $C_T^{\max 1}$, $C_T^{\max 2}$ и C_T от волатильности σ, вычисленные при $K_1 = 8$, $K_2 = 10$ и $S_0 = 12$. Взаимное расположение кривых отражает свойство (3.9). Проведенные вычисления также подтвердили свойства возрастания стоимостей опционов по S_0 и K_2 и убывания по K_1, т. е. свойства (3.4), а также стремления $C_T^{\min}$ к C_T при $K_2 \to \infty$ и $C_T^{\max 2}$ к C_T при $K_2 \to 0$, т. е. свойства следствия 2.

Отрицательные значения составляющих минимального портфеля (минимального хеджа) [1, 2] $\pi_t^* = (\gamma_t^*, \beta_t^*)$, капитал которого (см. формулу (1.3)) $X_t^* = \beta_t^* B_t + \gamma_t^* S_t$ обеспечивает выполнение платежного обязательства $X_t^* = f_T$, означают взятие соответствующего актива в долг, причем в соответствии с принципом безарбитражности в долг оба актива одновременно не могут браться. Анализ формул (2.4) и (2.5), (2.8) и (2.9), (2.12) и (2.13), а также (3.8) дает:

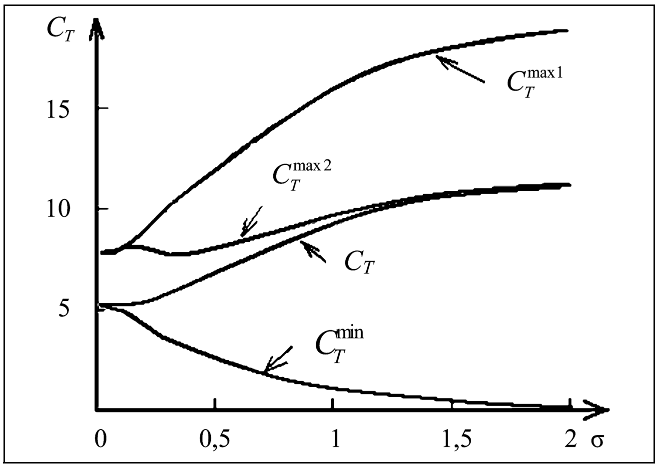
$$\gamma_t^{\min} > 0, \quad \gamma_t^{\max 1} > 0, \quad \gamma_t^{\max 2} > 0, \quad \gamma_t > 0;$$

$$\beta_t^{\min} >< 0, \quad \beta_t^{\max 1} >< 0, \quad \beta_t^{\max 2} >< 0, \quad \beta_t < 0.$$

Таким образом, для опционов купли акции в долг браться не могут, а банковский счет может быть как активом, так и пассивом, т. е. взятым в долг, причем в случае стандартного опциона он берется только в долг. Если $\beta_t^* < 0$, то

$$\gamma_t^* S_T = X_T^* + |\beta_T^*| B_T = f_T + |\beta_T^*| B_T.$$

Следовательно, если у инвестора имеется банковский долг, то в момент T предъявления соответствующего опциона купли к исполнению капитал $\gamma_T^* S_T^*$, содержащийся в акциях, расходуется на выплату по опциону, равную f_T, и на возврат банковского долга, равного $|\beta_T^*| B_T$. Если $\beta_T^* > 0$, то на выплату по опциону используется сумма капиталов, содержащихся в акциях $\gamma_T^* S_T^*$ и на банковском счете $\beta_T^* B_T$.



Соотношения между величинами $C_T^{\min}$, $C_T^{\max 1}$, $C_T^{\max 2}$ и C_T

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Выполнено исследование трех видов экзотических опционов купли с ограничением выплат для продавца опциона и гарантированным доходом для покупателя опциона в диффузионной модели (B, S)-финансового рынка при наличии выплаты дивидендов по рисковым активам. Получены формулы, определяющие стоимости опционов, а также эволюцию во времени капиталов и портфелей (теоремы 1—3). Исследованы зависимости цен опционов от начальной цены базисного актива, от цены исполнения и от величины, ограничивающей выплаты и гарантирующей доход (теорема 4). Исследована связь между решениями задач для экзотических и стандартных опционов (следствия 1—3). Дана содержательная интерпретация свойств решения.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство теоремы 1. Согласно общей теории платежных обязательств на полных безарбитражных рынках [1—3]

$$X_t^* = e^{-r(T-t)} E^*\{f_T | F_t\}, \quad \gamma_t^* = \left.\frac{\partial X_t^*}{\partial s}\right|_{s = S_t},$$

$$\beta_t^* = \frac{X_t^* - \gamma_t^* S_t}{B_t}, \qquad (П.1)$$

где E^* усреднение по риск-нейтральной (мартингальной) мере $\boldsymbol{P}^*$, а $C_T = X_0^*$. Так как, согласно выражениям (1.4) и (1.5), $\boldsymbol{P}^* = \boldsymbol{P}^{\mu - r + \delta}$, то с учетом соотношений (1.2), (1.5) и (1.6),

$$X_t^{\min} = e^{-r(T-t)}E^*\{\min\{(S_T - K_1)^+, K_2\}|F_t\} =$$
$$= e^{-r(T-t)}E\{Z_{T-t}^{\mu-r+\delta}\min\{(S_T - K_1)^+, K_2\}|F_t\} =$$
$$= e^{-r(T-t)}E\left\{\{\exp\left\{-\left(\frac{\mu-r+\delta}{\sigma}\right)[W_T - W_t] -\right.\right.$$
$$\left.- \frac{(T-t)}{2}\left(\frac{\mu-r+\delta}{\sigma}\right)^2\right\}\min\{S_t\exp\{(\mu - \sigma^2/2)(T-t) +$$
$$\left.+ \sigma[W_T - W_t]\} - K_1)^+, K_2\}|S_t\right\}.$$

Так как $\xi(T, t) = [W_T - W_t] \sim N\{0; T - t\}$, то

$$X_t^{\min} = \frac{e^{-r(T-t)}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{-\left(\frac{\mu-r+\delta}{\sigma}\right)x\sqrt{T-t} -\right.$$
$$\left.- \frac{(T-t)}{2}\left(\frac{\mu-r+\delta}{\sigma}\right)^2\right\}\min\{(S_t\exp\{(\mu - \sigma^2/2)(T-t) +$$
$$+ \sigma x\sqrt{T-t}\} - K_1)^+, K_2\}\exp(-x^2/2)dx =$$
$$= \frac{e^{-r(T-t)}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-\alpha x - \alpha^2/2)\exp(-x^2/2)\min\{(S_t\exp\{(r - \delta -$$
$$- \sigma^2/2)(T-t) + \sigma\sqrt{T-t}\,(x + \alpha)\} - K_1)^+, K_2\}dx,$$

где $\alpha = [(\mu - r + \delta)/\sigma]\sqrt{T-t}$. Делая замену переменных $z = x + \alpha$, получаем

$$X_t^{\min} = \frac{e^{-r(T-t)}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\{-z^2/2\}\min\{(S_t\exp\{(r - \delta - \sigma^2/2) \times$$
$$\times (T-t) + z\sigma\sqrt{T-t}\} - K_1)^+, K_2\}dz. \quad (\text{П}.2)$$

Очевидно, что

$$\min\{(S_t\exp\{(r - \delta - \sigma^2/2)(T-t) + z\sigma\sqrt{T-t}\} - K_1)^+, K_2\} =$$
$$= \begin{cases} 0, \text{если } S_t\exp(\cdot) - K_1 \le 0; \\ S_t\exp(\cdot) - K_1, \text{если } 0 < S_t\exp(\cdot) - K_1 < K_2; \\ K_2, \text{если } S_t\exp(\cdot) - K_1 \ge K_2. \end{cases} \quad (\text{П}.3)$$

Тогда из выражений (П.2) и (П.3) следует, что

$$X_t^{\min} = \frac{S_t e^{-\delta(T-t)}}{\sqrt{2\pi}}\int_{z_0(t)}^{z_1(t)}\exp\{-(z - \sigma\sqrt{T-t})^2/2\}dz -$$
$$- \frac{K_1 e^{-r(T-t)}}{\sqrt{2\pi}}\int_{z_0(t)}^{z_1(t)}\exp(-z^2/2)dz +$$
$$+ \frac{K_2 e^{-r(T-t)}}{\sqrt{2\pi}}\int_{z_1(t)}^{\infty}\exp\{-z^2/2\}dz, \quad (\text{П}.4)$$

где $z_0(t)$ и $z_1(t)$ — корни соответственно уравнений

$$S_t\exp\{r - \delta - (\sigma^2/2))(T-t) + z\sigma\sqrt{T-t}\} = K_1 \text{ и}$$
$$S_t\exp\{r - \delta - (\sigma^2/2))(T-t) + z\sigma\sqrt{T-t}\} = K_1 + K_2$$

и имеют вид (2.1). Замена переменных $x = z - \sigma\sqrt{T-t}$ в первом интеграле в выражении (П.4) с учетом, что $z_0(t) - \sigma\sqrt{T-t} = z_2(t)$, $z_1(t) - \sigma\sqrt{T-t} = z_3(t)$, а также свойств

$$(1/\sqrt{2\pi})\int_a^b\exp(-x^2/2)dx = \Phi(b) - \Phi(a),$$
$$\Phi(x) + \Phi(-x) = 1, \quad \Phi(\infty) = 1, \quad (\text{П}.5)$$

приводит к формуле (2.3), а формула (2.2) следует из того, что $C_T^{\min} = X_0^{\min}$ [1—3].

Так как

$$\frac{\partial\Phi(b(s))}{\partial s} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2}b^2(s)\right)\frac{\partial b(s)}{\partial s},$$
$$\frac{\partial\Phi(-b(s))}{\partial s} = -\frac{\partial\Phi(b(s))}{\partial s}, \quad (\text{П}.6)$$

то дифференцирование формулы (2.3) по s дает

$$\frac{\partial X_t^{\min}}{\partial s} = e^{-\delta(T-t)}[\Phi(z_3(t)) - \Phi(z_2(t))] + \psi, \quad (\text{П}.7)$$

$$\psi = \psi_1 - \psi_2, \quad (\text{П}.8)$$

$$\psi_1 = K_1 e^{-r(T-t)}\frac{\partial\Phi(z_0(t))}{\partial s} - se^{-\delta(T-t)}\frac{\partial\Phi(z_2(t))}{\partial s}, \quad (\text{П}.9)$$

$$\psi_2 = (K_1 + K_2)e^{-r(T-t)}\frac{\partial\Phi(z_1(t))}{\partial s} -$$
$$- se^{-\delta(T-t)}\frac{\partial\Phi(z_3(t))}{\partial s}. \quad (\text{П}.10)$$

Из выражений (П.6) и (2.1) получим

$$\frac{\partial\Phi(z_i(t))}{\partial s} = -\frac{\exp(-z_i^2(t)/2)}{s\sigma\sqrt{2\pi(T-t)}}, \quad i = \overline{0, 3}. \quad (\text{П}.11)$$

Так как, согласно формуле (2.1), $z_2(t) = z_0(t) - \sigma\sqrt{T-t}$, $z_3(t) = z_1(t) - \sigma\sqrt{T-t}$, то из равенства (П.11) следует, что

$$\frac{\partial\Phi(z_2(t))}{\partial s} = -\frac{K_1}{s^2\sigma\sqrt{2\pi(T-t)}}\exp(-z_0^2(t)/2) \times$$
$$\times \exp[-(r - \delta)(T-t)],$$
$$\frac{\partial\Phi(z_3(t))}{\partial s} = -\frac{(K_1 + K_2)}{s^2\sigma\sqrt{2\pi(T-t)}}\exp(-z_1^2(t)/2)\exp[-(r - \delta) \times$$
$$\times (T-t)]. \quad (\text{П}.12)$$

Учет выражений (П.11) и (П.12) в формулах (П.9) и (П.10) дает, что $\psi_1 = 0$ и $\psi_2 = 0$, т. е. согласно формуле (П.8), $\psi = 0$. Тогда формула (2.4) следует из выражений (П.1) и (П.7), а формула (2.5) — из выражений (П.1), (2.3) и (2.4). Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. С учетом формулы (1.7) получаем аналогично выражению (П.2), что

$$X_t^{\max 1} = \frac{e^{-r(T-t)}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-z^2/2) \max\{S_t \exp\{(r - \delta - \sigma^2/2) \times$$

$$\times (T-t) + z\sigma\sqrt{T-t}\} - K_1, K_2\} dz. \qquad (П.13)$$

Очевидно,

$$\max\{S_t \exp\{(r - \delta - \sigma^2/2)(T-t) + z\sigma\sqrt{T-t}\} - K_1, K_2\} =$$

$$= \begin{cases} S_t \exp(\cdot) - K_1, \text{если } S_t \exp(\cdot) - K_1 > K_2, \\ K_2, \text{если } S_t \exp(\cdot) - K_1 \le K_2. \end{cases} \qquad (П.14)$$

Тогда из выражений (П.13) и (П.14) с учетом формул (2.1) аналогично выражению (П.4) следует, что

$$X_t^{\max 1} = \frac{S_t e^{-\delta(T-t)}}{\sqrt{2\pi}} \int_{z_1(t)}^{\infty} \exp[-(z - \sigma\sqrt{T-t})^2/2] dz -$$

$$- \frac{K_1 e^{-r(T-t)}}{\sqrt{2\pi}} \int_{z_1(t)}^{\infty} \exp(-z^2/2) dz +$$

$$+ \frac{K_2 e^{-r(T-t)}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z_1(t)} \exp(-z^2/2) dz. \qquad (П.15)$$

Замена переменных $x = z - \sigma\sqrt{T-t}$ в первом интеграле в формуле (П.15) с учетом выражения (П.5) и что $z_1(t) - \sigma\sqrt{T-t} = z_3(t)$, приводит к формуле (2.7), а формула (2.6) следует из того, что $C_T^{\max 1} = X_0^{\max 1}$ [1—3].

Дифференцирование (2.7) по s дает аналогично (П.7)—(П.10), что

$$\frac{\partial X_t^{\max 1}}{\partial s} = e^{-\delta(T-t)} \Phi(-z_3(t)) + \psi, \qquad (П.16)$$

$$\psi = s e^{-\delta(T-t)} \frac{\partial \Phi(-z_3(t))}{\partial s} - K_1 e^{-r(T-t)} \frac{\partial \Phi(-z_1(t))}{\partial s} +$$

$$+ K_2 e^{-r(T-t)} \frac{\partial \Phi(z_1(t))}{\partial s}. \qquad (П.17)$$

Учет выражений (П.11) и (П.12) в формуле (П.17) дает, что $\psi = 0$. Тогда формула (2.8) следует из выражений (П.1) и (П.16), а формула (2.9) — из выражений (П.1), (2.7) и (2.8). Теорема 2 доказана.

Доказательство теоремы 3. С учетом формулы (1.8) получаем аналогично выражениям (П.2) и (П.13), что

$$X_t^{\max 2} = \frac{e^{-r(T-t)}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-z^2/2) \max\{S_t \exp\{(r - \delta - \sigma^2/2) \times$$

$$\times (T-t) + z\sigma\sqrt{T-t}\} - K_1, K_2\} I[S_t \exp\{(r - \delta - \sigma^2/2) \times$$

$$\times (T-t) + z\sigma\sqrt{T-t}\} > K_1] dz. \qquad (П.18)$$

Очевидно, что

$$\max\{S_t \exp\{(r - \delta - \sigma^2/2)(T-t) + z\sigma\sqrt{T-t}\} -$$

$$- K_1, K_2\} I[S_t \exp\{(r - \delta - \sigma^2/2)(T-t) + z\sigma\sqrt{T-t}\} > K_1] =$$

$$= \begin{cases} 0, \text{если } S_t \exp(\cdot) \le K_1, \\ K_2, \text{если } K_1 < S_t \exp(\cdot) \le K_1 + K_2, \\ S_t \exp(\cdot) - K_1, \text{если } S_t \exp(\cdot) > K_1 + K_2. \end{cases} \qquad (П.19)$$

Из выражений (П.18) и (П.19) с учетом формул (2.1) аналогично выражениям (П.4) и (П.15) следует

$$X_t^{\max 2} = \frac{S_t e^{-\delta(T-t)}}{\sqrt{2\pi}} \int_{z_1(t)}^{\infty} \exp\{-(z - \sigma\sqrt{T-t})^2/2\} dz -$$

$$- \frac{K_1 e^{-r(T-t)}}{\sqrt{2\pi}} \int_{z_1(t)}^{\infty} \exp(-z^2/2) dz +$$

$$+ \frac{K_2 e^{-r(T-t)}}{\sqrt{2\pi}} \int_{z_0(t)}^{z_1(t)} \exp(-z^2/2) dz. \qquad (П.20)$$

Тогда формула (2.11) следует из выражения (П.20) аналогично тому, как формула (2.7) следовала из выражения (П.15), а формула (2.10) следует из того, что $C_T^{\max 2} = X_0^{\max 2}$ [1—3].

Дифференцирование формулы (2.11) по s дает аналогично выражению (П.16), что

$$\frac{\partial X_t^{\max 2}}{\partial s} = e^{-\delta(T-t)} \Phi(-z_3(t)) -$$

$$- K_2 e^{-r(T-t)} \frac{\partial \Phi(z_0(t))}{\partial s} + \psi, \qquad (П.21)$$

где ψ имеет вид (П.17). Так как $\psi = 0$, то формула (2.12) следует из выражений (П.1) и (П.21) с учетом формулы (П.11) при $i = 0$ и (В.1), а формула (2.13) — из выражений (П.1), (2.11), (2.12). Теорема 3 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *К теории* расчетов опционов Европейского и Американского типов. II. Непрерывное время // Теория вероятностей и ее применения / А.Н. Ширяев, Ю.М. Кабанов, Д.О. Крамков, А.В. Мельников / — 1994. — Т. 39, вып. 1. — С. 80—129.
2. *Ширяев А.Н.* Основы стохастической финансовой математики. — М.: Фазис, 1998. — 1017 с.
3. *Мельников А.В., Волков С.Н., Нечаев М.Л.* Математика финансовых обязательств. — М.: ГУ ВШЭ, 2001. — 253 с.
4. *Халл Д.К.* Опционы, фьючерсы и другие производные финансовые инструменты. — М.: Вильямс, 2007. — 1052 с.
5. *Кожин К.* Все об экзотических опционах // Рынок ценных бумаг. — 2002. — № 15. — С. 53—57; № 16. — С. 61—64; № 17. — С. 68—73.
6. *Rubinstein M.* Exotic options // Finance working paper. 1991. — Berkeley: Inst. of Business and Econ. Research, 1991, N 220. — 43 p.
7. *Zhang P.G.* An introduction to exotic options // Europ. Financial Manag. — 1995. — Vol. 1, N 1. — P. 87—95.
8. *Black F., Scholes M.* The pricing of options and corporate liabilities // J. of Political Economy. — 1973. — Vol. 81, N 3. — P. 637—659.
9. *Cox J.C., Ross R.A., Rubinstein M.* Option pricing: a simplified approach // J. of Financial Economics. — 1979. Vol. 7, N 3. — P. 229—263.
10. *Шепп Л.А., Ширяев А.Н.* Новый взгляд на расчеты «Русского опциона» // Теория вероятностей и ее применение. — 1994. — Т. 39, вып. 1. — С. 130—148.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Е.Я. Рубиновичем.

Демин Николай Серапионович — д-р физ.-мат. наук, профессор,

Андреева Ульяна Викторовна — аспирант, ✉ egi@sibmail.com,

Томский государственный университет, ☎ (3822) 52-92-99.