П. И. Кузнецов, Е. Д. Соломенцев, Иван Иванович Привалов (к девяностолетию со дня рождения), *УМН*, 1982, том 37, выпуск 4, 193–211

1982 г. июль — август *т. 37, вып. 4(226)*
УСПЕХИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЖИЗНЬ В СССР

ИВАН ИВАНОВИЧ ПРИВАЛОВ

(к девяностолетию со дня рождения)

I. Основные биографические сведения. [1]) Иван Иванович Привалов родился в г. Нижнем Ломове Пензенской губ. 13(1) февраля 1891 г. Его отец, нижнеломовский купец Иван Андреевич Привалов, был мастером литейного дела и владел в Нижнем Новгороде литейной мастерской. Мать, Евдокия Львовна, также происходившая из купеческой семьи, занималась домашним хозяйством.

В 1901 г. Иван Иванович поступил в Нижегородскую гимназию, которую и окончил в 1909 г. с золотой медалью. В том же году он поступил на математическое отделение физико-математического факультета Московского университета, где слушал лекции Д. Ф. Егорова, Л. К. Лахтина, Б. К. Млодзеевского, К. А. Андреева, Н. Е. Жуковского, П. Н. Лебедева, П. П. Лазарева, отдавая особое внимание лекциям Д. Ф. Егорова.

Летний семестр 1911 г. Иван Иванович провел в Гёттингенском университете, где слушал лекции Д. Гильберта, Ф. Клейна, Э. Ландау. Исключительные математические способности Ивана Ивановича проявились уже в студенческие годы. Он был активным участником математических семинаров под руководством Д. Ф. Егорова, а в студенческом математическом кружке, игравшем в те времена важную роль, был председателем. Будучи студентом, он выполнил первую свою научную работу [1], полученные в ней результаты были доложены на заседании Московского математического общества.

В 1913 г. Иван Иванович окончил Московский университет с дипломом первой степени. В экзаменационную комиссию он представил сочинение на тему «Проблема приводимости в теории линейных дифференциальных уравнений» и по представлению ординарного профессора Д. Ф. Егорова был оставлен при Университете на два года для подготовки к профессорскому званию по кафедре чистой математики. В своем ходатайстве Д. Ф. Егоров писал: «Г-н Привалов уже с первых годов своего пребывания в Университете выдвинулся интересом к науке, большой начитанностью в математической

---

[1]) При окончательном редактировании статьи учтены ценные советы и замечания, сделанные после прочтения рукописи П. С. Александровым, А. А. Гончаром, С. С. Демидовым, А. Ф. Лапко, П. Л. Ульяновым, А. П. Юшкевичем. Большую помощь авторам оказали сотрудник ЦГИА г. Москвы М. В. Журавлева и сотрудники кафедры высшей математики МБФ 2-го МОЛГМИ им. Н. И. Пирогова М. Г. Пазельская и В. М. Беляков. Всем указанным лицам авторы выражают глубокую благодарность.

литературе и несомненным математическим талантом... Он часто выступал с рефератами в студенческом математическом кружке, а в текущем году делал сообщение в Московском математическом обществе; в этом сообщении он дал распространение теорем Кантора и Фату на общие ряды по ортогональным функциям и с полной несомненностью показал способность к самостоятельной математической работе даже и в настоящее время... Я убежден, что из г-на Привалова выработается незаурядный научный деятель» (ЦГИА, г. Москвы, ф. 418, оп. 91, дело № 475. л. 8).

По ходатайству ординарного профессора Д. Ф. Егорова и присоединившегося к нему заслуженного профессора К. А. Андреева И. И. Привалову на время подготовки к званию была назначена стипендия из «сумм Министерства народного просвещения». В этом ходатайстве говорилось: «Но особенно существенным, с моей точки зрения, является несомненный для меня математический талант и теперь уже сильно проявляющаяся способность и наклонность к самостоятельным изысканиям г-на Привалова, на которого в будущем возлагаю большие надежды». (ЦГИА г. Москвы, ф. 418, оп. 91, дело № 475, л. 24).

По истечении двух лет, т. е. в 1915 г. Иван Иванович сдал магистерские экзамены и в установленном порядке прочитал перед факультетом 11 февраля (29 января) и 14 (1) февраля 1916 г. две пробные лекции на тему «Теорема Пикара» (по собственному выбору) и «Суммирование тригонометрических рядов» (по назначению факультета), после чего ему было предоставлено 16(3) мая 1916 г. «право преподавания в звании приват-доцента по кафедре чистой математики». (ЦГИА г. Москвы, ф. 418, оп. 91, дело № 475, л. 61).

Иван Иванович готовил материалы для магистерской диссертации, но обстоятельства были таковы, что эти материалы были изданы лишь в 1918 г. в виде монографии [13].

В 1918 г. И. И. Привалов переезжает в Саратов. 18 февраля 1918 г. Совет Саратовского университета избрал его профессором по кафедре чистой математики. В этой должности он проработал до осени 1921 г. С 1921 г. Иван Иванович возвращается в Москву, где работает в качестве профессора Московского университета, а с 1938 г. — заведующего кафедрой теории функций, и одновременно заведует кафедрой высшей математики организованного в 1921 г. Автомеханического института им. М. В. Ломоносова. С 1923 г. Иван Иванович — профессор кафедры высшей математики Военно-воздушной академии им. Н. Е. Жуковского. Ему было присвоено воинское звание бригинженера, а впоследствии — военинженера 1-го ранга. Педагогическая деятельность И. И. Привалова в Московском университете и Военно-воздушной академии продолжалась до самой его смерти.

С основанием в 1923 г. Научно-исследовательского института математики и механики при Московском университете И. И. Привалов был действительным его членом, заведуя отделом теории функций. Авторам настоящей статьи посчастливилось работать под его руководством в аспирантуре названного института.

В 1935 г. ВАК Наркомпроса присвоила Ивану Ивановичу без защиты диссертации ученую степень доктора физико-математических наук и звание профессора. В 1939 г. он избирается членом-корреспондентом Академии наук СССР.

И. И. Привалов состоял членом Московского математического общества с 1915 г., секретарем которого он был с 1924 по 1930 г. и вице-президентом с 1930 г. Он был также членом Circolo matematico di Palermo и Société Mathématique de France.

И. И. Привалов всегда активно участвовал в общественной жизни Московского университета и всей страны. Во время выборов в Верховный Совет СССР в 1937 г. он работал доверенным лицом Краснопресненского избирательного округа. В 1940 г. избран депутатом Краснопресненского Райсовета. За большую научную и педагогическую работу в Военно-воздушной академии И. И. Привалов был награжден значком отличника РККА. В 1940 г., в связи с юбилеем Московского университета, он был награжден за выдающиеся научные и общественные заслуги орденом Трудового Красного знамени.

И. И. Привалов скончался 13 июля 1941 г. от воспаления легких в Москве и похоронен на Новодевичьем кладбище.

Рядом с его могилой находится могила Вячеслава Васильевича Степанова, лучшего друга Ивана Ивановича в течении всей его жизни.

На родине Привалова в 1964 г. одна из улиц города Нижнего Ломова названа его именем. Кроме того, материал о жизни и деятельности И. И. Привалова вошел в экспозицию «Наши знатные земляки» Нижнеломовского краеведческого музея.

II. Научные труды. По характеру своего математического мышления И. И. Привалов был аналитиком. Солидная общематематическая подготовка, характерная для Московского университета, глубокое знание современных математических теорий позволили ему проявить себя в широком диапазоне аналитических исследований. Для удобства обозрения мы разобьем тематику исследований Ивана Ивановича условно на несколько разделов.

1. Тригонометрические ряды. Уже первая работа И. И. Привалова [1] в сущности относится к тематике тригонометрических рядов. В ней дается обобщение известных теорем Кантора и Фату для тригонометрических рядов на общие ортогональные ряды. Как известно, исследования по «трудной и точной теории» (по выражению Н. Н. Лузина) тригонометрических рядов были в начале века в центре внимания Московской математической школы. И в дальнейшем в течение более чем 10 лет эта область привлекала внимание Ивана Ивановича, причем ему удалось получить здесь результаты первостепенной важности, вошедшие под его именем во все руководства по тригонометрическим рядам. С этой тематикой в большей или меньшей степени связаны его работы [1], [4]—[6], [8]—[11], [13]—[16], [26], [28]. Отметим, в частности, что и в работе диссертационного характера [13] значительная часть гл. 5 посвящена теории тригонометрических рядов. Формулировки наиболее значительных результатов И. И. Привалова в этой области удобно будет привести в виде теорем.

Т е о р е м а 1 [5], [10], [13]. *Если тригонометрический ряд* $\Phi[f]$ *есть ряд Фурье — Лебега от функции* $f(x)$ *и* $f(x)$ *имеет симметрическую производную* $f'(x_0)$ *в точке* x_0, *то продифференцированный ряд* $\Phi'[f]$ *суммируется методами Чезаро* (C, r), $r > 1$, *Римана и Пуассона к значению* $f'(x_0)$.

Отметим и результат о суммируемости из работы [5]: если $f(x)$ интегрируема в смысле Данжуа — Перрона, то для почти всех x ее ряд Фурье $\Phi[f]$ суммируем методами (C, r), $r > 1$, к значению $f(x)$.

Наиболее плодотворным, однако, оказалось изучение сопряженных тригонометрических рядов. К таким рядам приводит рассмотрение комплексных степенных рядов Тейлора

$$F(z)=\sum_{k=1}^{\infty} c_k z^k, \quad z=re^{ix}, \tag{1}$$

имеющих круг сходимости с центром в начале координат радиуса 1.

Полагая в (1) $z = e^{ix}$ и отделяя действительную и мнимую части, получаем тригонометрический ряд для действительной части

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \tag{2}$$

и сопряженный ему тригонометрический ряд для мнимой части

$$(2') \qquad \sum_{k=1}^{\infty} (-b_k \cos kx + a_k \sin kx),$$

где принято $c_k = a_k - ib_k$. Изучение сходимости сопряженных рядов (2) и (2′) оказалось возможным лишь при помощи предварительного изучения сопряженных гармонический функций $u(z)$ и $v(z)$, являющихся соответственно действительной и мнимой частями $F(z)$. В этом направлении И. И. Привалов получил следующие основные теоремы:

Теорема 2 [9]. *Если гармоническая функция $u(z)$ представима интегралом Пуассона — Лебега*

$$(3) \qquad u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(\theta)\,d\theta}{1 - 2r\cos(\theta - x) + r^2},$$

то сопряженная ей гармоническая функция $v(z)$ принимает почти всюду на единичной окружности по всем некасательным путям определенные значения $\bar{f}(x)$, которые выражаются формулой особого интеграла

$$(4) \qquad \bar{f}(x) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(x+t) - f(x)}{2\operatorname{tg}\frac{t}{2}}\,dt.$$

Важность этой теоремы заключается в том, что особый интеграл (4) существует для всякой суммируемой функции $f(x)$.

Теперь можно сформулировать один из наиболее замечательных результатов И. И. Привалова в данной области.

Теорема 3 [9]. *Если функция $f(x)$ удовлетворяет условию Гёльдера с показателем α, $0 < \alpha < 1$, то и сопряженная функция $\bar{f}(x)$ также удовлетворяет условию Гёльдера с тем же показателем α.*

При $\alpha = 1$ показателем Гёльдера для сопряженной функции можно взять любое число $1 - \varepsilon$, где $0 < \varepsilon < 1$, сколь угодно близкое к единице.

Приводимые И. И. Приваловым примеры показывают, что этот результат улучшить нельзя.

Здесь же необходимо привести полученный И. И. Приваловым в том же круге идей результат для регулярных аналитических функций.

Теорема 4 [4], [13]. *Если для регулярной в единичном круге функции $F(z) = u(z) + iv(z)$ на множестве E точек e^{ix_0} единичной окружности положительной меры существует конечный предел $\lim u(z)$, когда $z \to e^{ix_0}$ по любому некасательному пути, то и для сопряженной функции $v(z)$, а следовательно, и для $F(z)$ это справедливо почти всюду на E.*

Указанные теоремы о сопряженных функциях дали возможность И. И. Привалову получить столь же важные результаты для сопряженных тригонометрических рядов. Мы ограничимся двумя формулировками, замечательными своей законченностью.

Теорема 5 [13]. *Если $\Phi[f]$ — ряд Фурье — Лебега, то сопряженный ряд $\overline{\Phi}[f]$ суммируется методами Фейера, Римана и Пуассона почти всюду к значениям особого интеграла (4).*

Теорема 6 [26]. *Если ряд Фурье — Лебега $\Phi[f]$ сходится равномерно, то сопряженный ряд $\overline{\Phi}[f]$ сходится почти всюду. Если частичные суммы ряда $\Phi[f]$ равномерно ограничены, то частичные суммы сопряженного ряда $\overline{\Phi}[f]$ ограничены почти для всех точек x.*

Мы ограничиваемся в основном окончательными формулировками. Но в ряде работ, отнесенных к данной тематике, были получены и результаты несколько иных направлений. Например, в работе [6] доказано следующее предложение: среди тригонометрических сумм вида

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)+A\cos nx+b_n\sin nx,$$

где A задано, наилучшее приближение нуля на отрезке $0\leqslant x\leqslant 2\pi$ дает $A\cos nx$. Далее, среди многочленов вида

$$Az^n+a_1z^{n-1}+\ldots+a_n$$

наилучшее приближение нуля в единичном круге дает многочлен Az^n. Отсюда И. И. Привалов выводит, как следствия, результаты П. Л. Чебышёва о многочленах, наименее уклоняющихся от нуля.

В качестве другого примера приведем обобщение известной теоремы П. Дюбуа — Реймона из работы И. И. Привалова [15]: если тригонометрический ряд сходится к суммируемой функции $f(x)$ всюду на интервале $(-\pi, \pi)$ кроме, быть может, точек некоторого замкнутого множества единственности, то этот ряд есть ряд Фурье для функции $f(x)$.

2. Интеграл типа Коши. Исследование свойств интеграла типа Коши — главная тема монографии И. И. Привалова [13]. Эта работа, первоначально предназначавшаяся в качестве магистерской диссертации, является итоговой по отношению к более ранним статьям [3]—[5], [8]—[10]. Исследования по интегралам типа Коши также характерны для Московской математической школы, о чем свидетельствует, в частности, появившаяся несколько ранее диссертация В. В. Голубева «Однозначные аналитические функции с совершенным множеством особых точек» (М. 1916) [1]), в отдельных направлениях работа [13] продолжает исследования В. В. Голубева. В дальнейшем Иван Иванович, вплоть до самой своей кончины, неоднократно возвращался к проблематике, связанной с интегралом типа Коши, в статьях [16], [22], [24], [38], [63], [65], [68], [69] и в монографии [73]. Основные результаты И. И. Привалова по интегралам типа Коши также имеют первостепенную важность и вошли под его именем во все руководства по теории функций.

Для удобства формулировок условимся об обозначениях. Пусть на плоскости комплексного переменного z задана замкнутая спрямляемая жорданова кривая $L: x=x(s)$ длины l, s — длина дуги L, $0\leqslant s\leqslant l$, $f(x)$ — суммируемая функция на L. Интегралом типа Коши — Лебега или, короче, *интегралом типа Коши* называется выражение

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{f(x)\,dx}{x-z}, \tag{5}$$

представляющее во внутренней области D^+, ограниченной кривой L, аналитическую функцию $F^+(z)$, а во внешней области D^-—аналитическую функцию $F^-(z)$. В работе [13] основным объектом исследования яляется именно интеграл типа Коши (5). В более поздних работах [68], [69], [73] все результаты, полученные И. И. Приваловым для интеграла (5), перенесены им с соответственными изменениями на выражение более общего вида:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{e^{i\varphi}d\psi(s)}{x-z}, \tag{6}$$

называемое *интегралом тип Коши — Стилтьеса.* Здесь $\psi(s)$ — комплексная функция дуги s с ограниченным изменением на отрезке $[0, l]$, φ — угол меж-

[1]) См. также новое издание: В. В. Голубев, Однозначные аналитические функции. Автоморфные функции.— М.: Физматгиз, 1961.

ду положительным направлением оси абсцисс и касательной к L в точке x. Если $\psi(s)$ — абсолютно непрерывная функция дуги s, то выражение (6) переходит в (5) с $f(x) = f[x(s)] = \psi'(s)$, так как $dx = e^{i\varphi}ds$. Пусть x_0— какая-либо точка L, $x_0 = x(s_0)$. Обозначим через L_ε ту часть контура L, которая остается после удаления из L меньшей дуги с концами $x(s_0 - \varepsilon)$ и $x(s_0 + \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$. *Особым интегралом* называется конечный предел

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{e^{i\varphi}\,d\psi(s)}{x - x_0} = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\pi i}\int_{L_\varepsilon}\frac{e^{i\varphi}\,d\psi(s)}{x - x_0}, \tag{7}$$

если он существует; аналогично строится особый интеграл для интеграла типа Коши (5). В дальнейшем, ради краткости, мы ограничимся в основном формулировками для интеграла типа Коши.

Касательная и нормаль к кривой L существуют почти для всех точек $x_0 \in L$. Выбирая точку z на некоторой прямой, проходящей через x_0 и наклоненной к нормали в x_0 под углом ψ_0, т. е., полагая $z = x_0 \pm \varepsilon i e^{i(\varphi_0+\psi_0)}$, рассмотрим разность

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(x)\,dx}{x - z} - \frac{1}{2\pi i}\int_{L_\varepsilon}\frac{f(x)\,dx}{x - x_0}. \tag{8}$$

Фундаментальное значение в теории интегралов типа Коши имеет так называемая «основная лемма Привалова»:

Т е о р е м а 7[13]. *Разность* (8) *стремится к пределу* $\pm\frac{1}{2}f(x_0)$, *когда* $\varepsilon \to 0$, *для всех точек* $x_0 \in L$, *кроме, быть может, точек множества меры нуль, не зависящего от* ψ_0, *равномерно относительно* ψ_0 *при* $|\psi_0| \leqslant \frac{\pi}{2} - \delta$, $\delta > 0$. *При этом знак* « + » *берется в случае* $z \in D^+$, *знак* «—» — *в случае* $z \in D^-$.

Теорема 7 является далеко идущим развитием формул граничного поведения интеграла типа Коши, установленных Ю. В. Сохоцким еще в 1873 г. в классических предположениях относительно линии L и функции $f(x)$. Таким образом, для того, чтобы особый интеграл существовал почти всюду на L, необходимо и достаточно, чтобы интеграл типа Коши (5) почти всюду на L имел угловые граничные значения $F^\pm(x)$, связанные с особым интегралом формулами Сохоцкого [1]) (см. [13])

$$F^\pm(x_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(x)\,dx}{x - x_0} \pm \frac{1}{2}f(x_0). \tag{9}$$

В случае разомкнутой спрямляемой кривой L теорема 7 по существу остается в силе, но значение предела разности (8) и формулы (9) видоизменяются так, что они будут зависеть от положения концов кривой L.

Следующий результат И. И. Привалова особенно важен для приложений к граничным (или краевым) задачам теории функций.

Т е о р е м а 8 [13]. *Если замкнутая кривая L кусочно-гладкая (без точек заострения), а функция* $f(x)$ *удовлетворяет условию Гёльдера с показателем* α, $0 < \alpha < 1$, *то интеграл типа Коши* (5) *есть непрерывная функция во всей замкнутой области* $\overline{D^+}$ (*или* $\overline{D^-}$), *причем его граничные значения* (9) *удовлетворяют на L условию Гёльдера с тем же показателем* α. *В случае* $\alpha = 1$ *утвер-*

[1]) Формулы (9) ни В. В. Голубев, ни И. И. Привалов не приписывают какому-либо определенному лицу. Очевидно, что с работой Ю. В. Сохоцкого они не были знакомы в то время. По этому поводу см. с. 78—83 в кн.: А. И. М а р к у ш е в и ч, Очерки по истории теории аналитических функций.— М.— Л.: ГИТТЛ, 1951, а также комментарии в кн.: В. В. Г о л у б е в, Однозначные аналитические функции. Автоморфные функции.— М.: Физматгиз, 1961.

ждение о непрерывности остается в силе, но граничные значения удовлетворяют условию Гёльдера с показателем $1-\delta$, $\delta>0$, *сколь угодно близким к единице.*

Выражение (5) называется интегралом Коши, если его угловые граничные значения изнутри L, т. е. из области D^+, совпадают с $f(x)$ почти всюду на L. Следующий результат И. И. Привалова дает полный ответ на вопрос: при каких условиях на $f(x)$ интеграл типа Коши обращается в интеграл Коши?

Теорема 9 [13]. *Для того, чтобы интеграл типа Коши* (5) *обращался в интеграл Коши, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось одно из следующих эквивалентных условий:*

$$(10)\quad \left\{\begin{array}{ll} \text{а)} & \displaystyle\int_L x^n f(x)\,dx=0, \qquad n=0,\ 1,\ \ldots; \\ \text{б)} & \displaystyle\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{f(x)\,dx}{x-x_0}=f(x_0) \text{ почти всюду на } L. \end{array}\right.$$

Отметим, что достаточность условия (10) доказана в цитировавшейся выше диссертации В. В. Голубева.

Развитая И. И. Приваловым теория интеграла типа Коши позволила ему в докладе на II Всесоюзном математическом съезде (см. [38]) дать постановку основной граничной задачи линейного сопряжения аналитических функций, известную как задача «Римана — Привалова» или задача «Гильберта — Привалова» для заданных на замкнутой спрямляемой жордановой кривой L суммируемых функций $G(x)$ и $g(x)$, $0<c<|G(x)|<d$, где c и d — константы, найти аналитические соответственно в D^+ и D^- функции $F^+(z)$ и $F^-(z)$, представимые интегралами Коши в D^+ и D^- и удовлетворяющие почти всюду на L классическому условию линейного сопряжения Римана

$$F^+(x)=G(x)F^-(x)+g(x), \qquad x\in L.$$

В работе [38] И. И. Привалов высказал весьма существенные соображения о разрешимости этой задачи [1]).

Аппарат интегралов типа Коши и связанных с ними граничных задач теории функций находит обширные и важные приложения в теории упругости наложенных в аэродинамике и гидродинамике.

Известно, что отделяя в интеграле типа Коши действительную и мнимую части, получают выражения этих частей через логарифмические потенциалы простого и двойного слоя, создаваемые массами, распределенными на кривой L. Учитывая эту связь, И. И. Привалов в работе [13] (а затем в совместной с В. В. Сагателяном работе [70] для случая пространства) впервые исследовал граничное поведение логарифмического потенциала двойного слоя для случая, когда плотность распределения масс суммируема на L.

3. Граничные свойства аналитических функций. В этой важнейшей области теории функций комплексного переменного, бурно развивающейся и в настоящее время (и включающей, конечно, теорию интеграла типа Коши), И. И. Привалов получил глубокие и ценные результаты, имеющие первостепенную важность для всей теории функций. К этому разделу следует отнести работы И. И. Привалова [13], [16], [23], [29], [52], [54], [56], [60], [73]. Монография [76], изданная под редакцией А. И. Маркушевича через 9 лет после смерти И. И. Привалова, ставила целью «дать изложение этой теории [граничных свойств аналитических функций — Авт.], сохраняющее, по возможности, стиль и общий характер первого издания [т. е. [73] — Авт.],

1) См. по этому поводу обзор Б. В. Хведелидзе. Ме од интегралов типа Коши в разрывных граничных задачах теории голоморфных функций одной комплексной переменной.— В сб.: Современные проблемы математики. Т. 7.— М., 1975, с. 5—162.

и охватывающее все основные ее результаты, добытые советской наукой» (см. [76], с. 7). Мы изложим здесь основные результаты И. И. Привалова по теории граничных свойств в порядке их публикации.

В монографии [13], кроме описанных в п. 2 результатов по теории интегралов типа Коши, были получены весьма существенные результаты о граничных свойствах конформного отображения.

Пусть D — односвязная область, ограниченная жордановой кривой L. Тогда, при условии соответствующей нормировки, существует (по теореме Римана) единственная аналитическая функция $w = f(z)$, дающая конформное отображение единичного круга $|z| < 1$ на область D, причем эта функция непрерывно продолжается на замкнутый круг $|z| \leqslant 1$ так, что она дает и непрерывное взаимно однозначное соответствие единичной окружности $|z| = 1$ и границы L (теорема Каратеодори 1913 г.). В гл. 2 работы [13] дано оригинальное доказательство теоремы Каратеодори, а затем доказаны следующие важные свойства отображающей функции.

Теорема 10 [13] (инвариантность множеств меры нуль). *Если односвязная область D ограничена спрямляемой жордановой кривой L, то всякое множество меры нуль на единичной окружности при конформном отображении переходит в множество меры нуль на L. Обратно, всякому множеству меры нуль на L соответствует множество меры нуль на единичной окружности.*

Вторая часть этой теоремы получена совместно с Н. Н. Лузиным

Теорема 11 [13] (сохранение углов). *При конформном отображении односвязных областей со спрямляемой жордановой границей углы с вершинами в граничных точках сохраняются, за исключением, быть может, множества вершин меры нуль на границе.*

К этому следует добавить, что построены примеры, в которых консерватизм углов не имеет места на множестве точек границы, всюду плотном и мощности континуума на спрямляемой кривой L. С другой стороны, существует односвязная область D, ограниченная жордановой кривой, для которой консерватизм углов не имеет места на множестве, образом которого является почти вся единичная окружность.

В работах [23], [29] (см. также [73], [76]), написанных совместно И. И. Приваловым и Н. Н. Лузиным, дано классически полное исследование граничных свойств единственности аналитических функций:

Теорема 12 (Н. Н. Лузин, И. И. Привалов [23], [29]). *Если мероморфная в единичном круге функция $w = f(z)$ имеет угловые граничные значения нуль на множестве E точек единичной окружности положительной меры, то $f(z) \equiv 0$.*

Иначе говоря, если две мероморфные в единичном круге функции $f_1(z)$ и $f_2(z)$ имеют совпадающие угловые граничные значения на множестве E положительной меры, то $f_1(z) \equiv f_2(z)$. Не существует мероморфной в единичном круге функции, имеющей бесконечные угловые граничные значения на множестве E положительной меры. Учитывая свойства конформного отображения, Н. Н. Лузин и И. И. Привалов показали, что все приведенные формулировки остаются в силе для мероморфной функции $w = f(z)$ в произвольной, односвязной области D, ограниченной спрямляемой кривой L, $E \subset L$.

При доказательстве этой теоремы Н. Н. Лузин и И. И. Привалов применили замечательное геометрическое построение, неоднократно использовавшееся ими и в дальнейшем (см. [76]. с. 289—291).

Следует отметить, что построен пример ограниченной аналитической функции $f(z) \neq 0$ в единичном круге, стремящейся к нулю, когда z стремится к граничной точке $\zeta = e^{ix}$ любым способом для всех точек ζ заданного множества E меры нуль; этот пример доказывает точность теоремы 12.

Теорема 13 (Н. Н. Лузин, И. И. Привалов [23], [29]). *Если мероморфная в единичном круге функция $w = f(z)$ имеет радиальные граничные значения нуль на множестве E точек единичной окружности, расположенном на дуге σ, метрически плотном на σ и второй категории, то $f(z) \equiv 0$.*

Иначе говоря, если две мероморфные в единичном круге функции $f_1(z)$ и $f_2(z)$ имеют совпадающие радиальные граничные значения на множестве E указанного вида, то $f_1(z) \equiv f_2(z)$.

Случай радиальных граничных значений в теоремах единственности вообще гораздо сложнее. В тех же работах Н. Н. Лузина и И. И. Привалова построен пример аналитической в единичном круге функции $f(z) \neq \mathrm{const}$, стремящейся к нулю, когда z стремится по радиусам к точкам множества E полной меры на единичной окружности, $\mathrm{mes}\, E = 2\pi$. Существует также аналитическая в единичном круге функция $f(z) \neq \mathrm{const}$, стремящаяся к нулю, когда z стремится по радиусам к точкам множества E положительной меры на единичной окружности и второй категории.

Доказательство теоремы 12 в работах Н. Н. Лузина и И. И. Привалова [23], [29] получалось как непосредственное следствие одного предложения, характеризующего протяженность множества граничных значений, принимаемых на множестве положительной меры, и представляющего поэтому большой самостоятельный интерес:

Теорема 14 (Н. Н. Лузин, И. И. Привалов [23], [29]). *Если мероморфная функция $f(z) \neq \mathrm{const}$ в области D со спрямляемой границей L имеет угловые граничные значения на множестве $E \subset L$ положительной меры на L, то множество F этих граничных значений содержит по крайней мере две точки.*

Доказательство теоремы 13 опиралось на аналогичный результат для случая радиальных граничных значений на единичной окружности. В более поздних работах И. И. Привалова [54], [56], [73] теорема 14 и соответствующая ей для случая радиальных граничных значений нашли весьма существенное обобщение, а именно, И. И. Привалов доказал, что множество F граничных значений содержит замкнутое множество *положительной емкости.*

4. Исследования по общей геометрической теории функций. Классическая, так сказать, проблематика по изучению свойств аналитических функций внутри области определения также все время привлекала внимание И. И. Привалова, и им получен здесь ряд весьма важных результатов. Сюда можно отнести работы [18], [19], [21], [25], [30], [31], [35], [36], [49].

В работе [18] исследована проблема искажения П. Кёбе для различных специальных классов однолистных аналитических функций. Пусть

$$w = f(z) = z + a_2 z^2 + \ldots \tag{11}$$

— однолистная регулярная функция в единичном круге. Обозначим через K, K_s, K^*, K_s^* классы всех функций вида (11), дающих однолистные конформные отображения круга $|z| < 1$ соответственно на выпуклые, выпуклые и симметричные, звездообразные, звездообразные и симметричные области. Для всех этих классов И. И. Привалов нашел точные границы вида

$$m(r) \leqslant |f'(z)| \leqslant M(r), \qquad r = |z|,$$

т. е. получил точные теоремы искажения. Он дал также точные оценки модулей тейлоровских коэффициентов a_n в разложении (11) для всех четырех классов K, K_s, K^*, K_s^* в виде $|a_n| \leqslant r_n$, где соответственно, $r_n = 1,\ \frac{1}{n},\ n, 1$.

Начиная с 1928 г. (см. [31], [35], [36], [49]) И. И. Привалов для исследования различных проблем геометрической теории функций применяет *метод нормальных семейств.* Остановимся на работе И. И. Привалова [31] «По поводу предложения Блоха». Э. Блох распространил известную теорему Кёбе о существовании круга абсолютного радиуса («константа Кёбе»), покрываемого значениями однолистной функции (11). Блох показал, что если функция

$$w = f(z) = z + \alpha_2 z^2 + \ldots$$

только регулярная в единичном круге, то существует круг абсолютного радиуса («константа Блоха»), покрываемый множеством значений функции. Эта теорема Блоха получила большие применения в теории функций. И. И. Привалову удалось расширить теорему Блоха в различных направлениях. Например, полностью решается вопрос покрытия, если единице равен не первый коэффициент α_1, а любой α_n, $n \geqslant 1$. Найдены также условия, при которых круг абсолютного радиуса покрывается p раз, $p \geqslant 1$. Даются приложения к оценкам функций, выпускающих в круге два значения. В дальнейших работах рассмотрен и случай покрытия кольца, вместо круга.

Ряд работ И. И. Привалова [19], [21], [25], [30] посвящен исследованиям сходимости последовательностей аналитических функций, тесно связанным с проблемами единственности. Пусть область D ограничена спрямляемой жордановой кривой L. В 1922 г. А. Я. Хинчин доказал, что если последовательность $\{f_n(z)\}$ аналитических в D функций равномерно ограничена и сходится на некотором множестве $E \subset L$ (в смысле сходимости угловых граничных значений, которые в условиях теоремы существуют почти всюду на L) положительной меры, то последовательность $\{f_n(z)\}$ сходится равномерно внутри D. Обобщая эту теорему, И. И. Привалов доказал [30], что утверждение остается в силе, если в ее условиях требование равномерной ограниченности заменить любым из следующих двух требований:

а) функции $f_n(z)$ равномерно не принимают значений, составляющих некоторый континуум;

б) функции $f_n(z)$ однолистны и последовательность $\{f_n(z)\}$ сходится хотя бы в одной точке $z_0 \in D$.

Другое направление исследований сходимости относится к случаю, когда множество сходимости E находится внутри области D. Хорошо известна теорема Витали: если последовательность $\{f_n(z)\}$ аналитических в произвольной области D функций равномерно ограничена в D и сходится на счетном множестве $E \subset D$, имеющем предельную точку внутри D, то она сходится равномерно внутри D. Для случая, когда D есть круг $D = \{z\colon |z| < 1\}$ теорему Витали существенно обобщил В. Бляшке: если при условии равномерной ограниченности последовательность $\{f_n(z)\}$ сходится на счетном множестве $E = \{z_k : |z_k| < 1,\ k = 1, 2, \ldots\}$ точек z_k таких, что ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} (1 - |z_k|)$$

расходится, то $\{f_n(z)\}$ сходится равномерно внутри D В работе [25] И. И. Привалов доказал, что утверждение теоремы Бляшке остается в силе, если в ней условие равномерной ограниченности заменить одним из следующих двух требований:

а) существует число K, не зависящее от r и n и такое, что

$$\int_0^{2\pi} \log^+ |f_n(re^{i\theta})|\, d\theta < K \qquad (n = 1, 2, \ldots);$$

б) функции $f_n(z)$ равномерно не принимают значений, составляющих некоторый континуум.

В дальнейшем И. И. Привалов распространил эту теорему (см. [30]) и на случай произвольной области D, ограниченной жордановой кривой, в следующем виде: если последовательность $\{f_n(z)\}$ сходится на счетном множестве точек $z_k \in D$ таких, что расходится ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} g(x_0, z_k),$$

и если

$$\int_{C_\lambda} \log^+ |f_n(\zeta)| \frac{\partial g(\zeta, x_0)}{\partial n} d\zeta < K \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

где K не зависит от λ и n, то она сходится равномерно внутри D. Здесь $g(x_0, z)$ — функция Грина области D с полюсом $x_0 \in D$, C_λ — линия уровня $g(x_0, \zeta) = \lambda$.

5. Гармонические, субгармонические и полигармонические функции. Уже в первоначальных своих исследованиях, связанных с проблемами сопряженных тригонометрических рядов, И. И. Привалов столкнулся с проблематикой теории гармонических функций, например, с проблемой представимости гармонической функции интегралом Пуассона и с др. задачами. Не возвращаясь к описанным в п. 1 исследованиям И. И. Привалова по сопряженным гармоническим функциям, укажем, что тематике гармонических и субгармонических функций посвящено наибольшее число его работ, по сравнению с другими, названными выше, разделами. За период 1925—1937 г. г. это были работы [27], [37], [39]—[42], [44], [47], [48] и этот цикл нашел определенное завершение в монографии [52], вышедшей в 1937 г. Две работы [50], [51] были посвящены полигармоническим функциям, в книгу [52] они не вошли. Затем последовали работы по различным вопросам теории субгармонических функций [53], [55], [57]—[59], [61], [62], [64], [66], [70]—[72], [74], [75]. В монографиях [71], [74] метод субгармонических функций применяется для исследования граничных свойств аналитических функций.

Как известно, гармонические функции u, понимаемые как регулярные (т. е. класса C^2) решения уравнения Лапласа $\Delta u = 0$, уже давно завоевали себе важное место в различных аналитических исследованиях. Понятие субгармонической функции введено в анализ Ф. Гартогсом в 1906 г. и Ф. Риссом в 1925 г., но идея субгармонических функций, по существу, уже заложена в известном «методе выметания», примененном А. Пуанкаре для решения задачи Дирихле в конце XIX в. И. И. Привалова, наряду с Ф. Риссом, соответствующие мемуары которого появились в 1925—1930 г.г., следует считать основоположником систематического изучения субгармонических функций.

Одна из основных работ И. И. Привалова в этой области [27] (см. также [52]) содержала новый подход к теории гармонических функций, основанный на обращении теоремы о среднем значении и связанный с введенным И. И. Приваловым «обобщенным оператором Лапласа», который ныне носит название «оператор Привалова». Здесь следует заметить, что все вопросы, относящиеся к гармоническим и субгармоническим функциям, излагались И. И. Приваловым, как правило, в общем случае в пространстве R^n, $n \geqslant 2$. Ради краткости, мы здесь ограничимся случаем плоскости R^2.

Пусть функция $u = u(z)$, $z = (x, y)$, локально суммируема в конечной области $D \subset R^2$, и пусть

$$\Delta_h u(z_0) = \frac{1}{\pi h^2} \int_{B(z_0, h)} [u(z) - u(z_0)]\, d\omega,$$

где интегрирование производится по площади круга $B(z_0, h)$ с центром z_0 радиуса h. Верхний и нижний пределы

$$
(12)\qquad \begin{cases} \overline{\Delta u}\,(z_0) = \limsup\limits_{h\to 0} \dfrac{8}{h^2}\,\Delta_h u\,(z_0), \\ \underline{\Delta u}\,(z_0) = \liminf\limits_{h\to 0} \dfrac{8}{h^2}\,\Delta_h u\,(z_0). \end{cases}
$$

И. И. Привалов называет соответственно верхним и нижним обобщенными операторами (или параметрами) Лапласа от функции $u(z)$ в точке z_0. Если значения пределов (12) совпадают и их общее значение равно $\Delta u(z_0)$, то $\Delta u(z_0)$ называется оператором Привалова от функции $u(z)$ в точке z_0. Новый подход к определению гармонической функции по Привалову состоит в том, что для того чтобы функция $u(z)$ была гармонической в D, необходимо и достаточно, чтобы она была непрерывной в D и $\Delta u(z_0) = 0\ \forall z_0 \in D$ (или даже $\underline{\Delta u}(z_0) \leqslant 0 \leqslant \overline{\Delta u}(z_0)\ \forall z_0 \in D$). Интегрирование по площади круга при $n = 2$ или по объему шара при $n \geqslant 3$ радиуса h в определении операторов Привалова можно заменить интегрированием соответственно по длине дуги окружности или по площади сферы. Использование операторов Привалова позволяет получить все качественные свойства гармонических функций простым и естественным путем.

Функция $u(z)$ называется субгармонической в области D, если она полунепрерывна сверху и если для любой области $G \subset \overline{G} \subset D$ всякая гармоническая функция $h(z)$, мажорирующая $u(z)$ на границе ∂G, является гармонической мажорантой $u(z)$ и всюду в G. И. И. Привалов, а также одновременно и независимо С. Сакс, доказали, что для субгармонической функции $u(z)$ оператор Привалова существует почти всюду в D и его значение совпадает с симметрической плотностью ρ ассоциированной меры μ функции $u(z)$, $\Delta u(z_0) = \rho(z_0) \geqslant 0$ (см. [71]; работа Сакса помещена в том же выпуске 9(51) : 2 Математического сборника за 1941 г.). Следует добавить, что применительно к потенциалам и уравнению Пуассона оператор Привалова был использован его автором еще в работе [27]. Дальнейшие применения операторов Привалова см. в работах [72], [74].

В дальнейшем идея оператора Привалова была применена им самим в работе [51] и в совместной с Б. К. Пчелиным работе [50] для установления нового опеределения полигармонических функций, т. е. достаточно гладких решений уравнения $\Delta^m\, u = 0$. Здесь также предварительное требование гладкости можно отбросить.

После выхода в свет работы [27] в 1925 г. и до появления монографии подытоживающего характера [52] в 1937 г. исследования И. И. Привалова, относящиеся к данному разделу, направлялись их автором по следующим линиям.

а) Получение обобщений и аналогов известной теоремы Адамара о трех кругах (согласно этой теореме максимум модуля $M(r) = \max\{|f(z)|: |z| = r\}$ аналитической функции $f(z)$ внутри круга есть неубывающая функция от r, выпуклая относительно $\log r$). Здесь получены теоремы о трех сферах, о трех плоскостях, о трех цилиндрах и др. (см. [39], [47], [52]).

б) Исследования, связанные с идеей подчиненности субгармонических функций и расширением известного в геометрической теории функций метода Линделёфа. Субгармоническая функция $u(z)$ называется подчиненной в круге $D : |z| < 1$ субгармонической функции $U(z)$, если $u(z) = U[\omega(z)]\ \forall z \in D$, где $\omega(z)$ — аналитическая функция в D, $\omega(0) = 0$, $|\omega(z)| < 1$; это понятие подчиненности является расширением понятия подчиненности аналитических функций. В работах [39], [44], [52] И. И. Привалов получил ряд результатов по обобщению и применениям понятия подчиненности и развитию геометрического метода Линделёфа.

в) В работах [41], [42], [52] аппарат теории распределения значений мероморфных функций, созданный Р. Неванлинна и основывающийся на формулах Иенсена, Пуассона — Иенсена и Неванлинна, распространен на функции $u(z)$, представимые в виде разности двух субгармонических функций — такие разности именно и являются обобщением логарифма модуля мероморфной функции ограниченного вида. Для таких функций $u(z)$ строится, как и в теории Неванлинна, характеристическая функция $T(r;\ u)$ и доказываются свойства $T(r,\ u)$, аналогичные тем, которые известны из теории Неванлинна. Например, имеет место обобщение теоремы Лиувилля: если функция $u(z)$ представима в виде разности двух субгармонических функций во всей плоскости R^2 и $T(r;\ u) = o(\log r)$, $r \to \infty$, то $u(z)$ есть константа.

г) В работах [37], [40], [52] рассмотрен вопрос о существовании у субгармонических функций граничных значений. Как известно, для аналитических функций ограниченного вида в единичном круге вопрос решается полностью положительно в том смысле, что они имеют почти всюду на единичной окружности угловые граничные значения. Аналогом этого класса в случае субгармонических функций в единичном круге являются функции класса A, удовлетворяющие условию

$$\int_0^{2\pi} u^+(re^{i\theta})\,d\theta < A(u), \quad 0<r<1, \tag{13}$$

где константа $A(u)$ не зависит от r. То, что функции класса A имеют почти всюду на единичной окружности радиальные граничные значения, было доказано Дж. Литтлвудом в 1927 г. Заметим, что гармонические функции класса A имеют, подобно аналитическим функциям ограниченного вида, радиальные и угловые граничные значения почти всюду на единичной окружности. По-видимому, исходя из всего этого, И. И. Привалов полагал, что аналогично обстоит дело и для угловых граничных значений субгармонических функций класса A, и приводил соответствующее доказательство. Однако, гораздо позже, уже после смерти И. И. Привалова была обнаружена неточность в доказательстве, и вскоре были построены соответствующие контрпримеры (А. Зигмунд, 1943 г.). Оказалось, что кроме условия (13) нужны еще дополнительные условия на распределение ассоциированных масс для того, чтобы функция $u(z) \in A$ имела почти всюду на единичной окружности угловые граничные значения, но радиальные граничные значения она имеет почти всюду при одном только условии $u(z) \in A$, причем, как доказал И. И. Привалов, не только в случае круга, но и в случае любой области со спрямляемой границей; в этом последнем случае нужно говорить вместо радиальных граничных значений о граничных значениях по нормали [1]).

В работах И. И. Привалова [53], [55], [57] — [59], [61], [62], [64], [66], [75], появившихся после выхода в свет монографии [52], теория субгармонических функций получила дальнейшее развитие.

Основное направление этих работ — исследование различных классов гармонических и субгармонических функций в связи с их аналитическими представлениями. Заметим, прежде всего, что субгармонические функции класса A в единичном круге D (или в единичном шаре пространства R^n, $n \geqslant 3$) имеют аналитическое представление

$$u(z) = h(z) - \int_D g(z,\ \zeta)\,d\mu(\zeta), \tag{14}$$

[1]) Подробнее см., например, работу Е. Д. Соломенцева, О граничных значениях субгармонических функций,— Чехосл. матем. ж., 1958, 8 (83):4, с. 520—536.

где $g(z, \zeta)$ — функция Грина для круга с полюсом ζ, интеграл справа есть *потенциал Грина*, в котором интегрирование производится по ассоциированной с функцией $u(z)$ неотрицательной мере μ, сосредоточенной на D, $h(z)$ — наименьшая гармоническая мажоранта функции $u(z)$ во всем единичном круге. При этом, наименьшая гармоническая мажоранта $h(z)$, в свою очередь, оказывается принадлежащей классу A, а следовательно, представимой в виде интеграла Пуассона — Стилтьеса

$$(15) \qquad h(z) = \int \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta-\varphi)+r^2}\, d\nu(\varphi), \qquad z = re^{i\theta},$$

где ν — соответствующая функции $h(z)$, и в конечном счете — функции $u(z)$, нормированная действительная граничная мера, сосредоточенная на единичной окружности L: $\zeta = e^{i\varphi}$, $\int d\nu(\varphi) = 1$. Другие, изучавшиеся И. И. Приваловым классы являются подклассами класса A, и речь шла об отыскании для них характеристических аналитических представлений типа (14) и (15) с соответствующими уточнениями свойств граничной меры ν. Построению такого рода полной теории классов субгармонических функций в круге (или в шаре) были посвящены работы [53], [57], [58], [61], [62]. При этом вопрос о наличии угловых граничных значений не играл существенной роли, ибо достаточно было существования радиальных граничных значений, с которыми именно и связана граничная мера ν. В работе [64], написанной совместно И. И. Приваловым и П. И. Кузнецовым, теория классов гармонических и субгармонических функций была распространена на произвольные области D на плоскости, ограниченные спрямляемой жордановой кривой L, и на произвольные области D в пространстве R^n, $n \geqslant 3$, ограниченные замкнутой поверхностью Ляпунова S. При этом использовались также только граничные значения по нормали, заведомо существующие почти всюду на границе S.

6. Различные работы. Кроме описанных выше основных направлений, И. И. Привалов опубликовал ряд работ по различным вопросам математического анализа, из которых мы здесь отметим в виде примера лишь некоторые.

а) Начиная с упоминавшейся уже работы [6] и, главным образом, в работе [33] И. И. Привалов совершенно элементарным путем исследовал свойства многочленов Чебышёва в комплексной области и построил теорию разложения по этим многочленам. Эти исследования проводились независимо от работ Г. Фабера и, притом, совершенно другим методом. В частности, И. И. Привалов установил ортогональность многочленов Чебышёва с весом на эллипсах с фокусами ± 1; лишь гораздо позднее это свойство было вторично обнаружено Дж. Уолшем.

б) К исследованиям сходимости ряда Тейлора относятся работы И. И. Привалова [16], [17], в которых изучается связь между сходимостью (суммируемостью) в точках единичной окружности действительной и мнимой частей ряда Тейлора, дается новый признак сходимости ряда Фурье, который и применяется к обобщению теоремы Фату о сходимости ряда Тейлора в правильной точке.

III. Учебно-педагогическая деятельность. Иван Иванович был блестящим лектором. По свидетельству проф. В. В. Степанова «В изложение математической науки он вносил подлинный энтузиазм. Наряду с университетскими курсами, вводившими слушателей в современное состояние науки, он много сил и энергии вкладывал в преподавание математики в высшей технической школе ... Наряду с этим И. И. Привалов энергично вел молодежь по пути самостоятельного научного исследования; он воспитал целый ряд аспирантов, которые продолжают его исследования, а также находят свои собственные пути в теории функции комплексного переменного» (Изв. АН, сер. матем., 1941, 6, с. 390).

По отзыву В. П. Внукова, директора Автомеханического института им. М. В. Ломоносова, написанному в 1932 г., «Учебные программы и руководство преподаванием было построено профессором Приваловым таким образом, что несмотря на подчас и малые количества часов, отведенные на математику, им не допускалось снижение научного уровня преподавания, давались четкие и ясные представления об основных понятиях высшей математики и одновременно с этим в курс включалось все необходимое для прохождения технических дисциплин и для практической деятельности инженера».

Наконец, нельзя не присоединиться к теплым словам из некролога 1941 г., подписанного многими учеными и педагогами, лично знавшими И. И. Привалова: «Выдающийся ученый, И. И. Привалов, в то же время был и замечательным учителем. Блестящие лекции его, богатые научным содержанием и замечательные по форме изложения, вспоминают его многочисленные ученики, математики и инженеры, ныне работающие на ответственных научных, военных и технических постах».

В результате интенсивной педагогической работы И. И. Привалов создал ряд первоклассных учебников для университетов и втузов. Его «Введение в теорию функций комплексного переменного» впервые было издано в 1927 г., при жизни И. И. Привалова вышло в 1940 г. 6-е издание, а последнее 12-е издание вышло в 1977 г. Перевод этой книги на немецкий язык издавался в ГДР четыре раза, 4-е издание вышло в 1970 г. На этом учебнике воспитались целые поколения математиков, специалистов по теории функций и по другим разделам математического анализа. И в настоящее время он остается одной из лучших книг для первоначального ознакомления с предметом.

Учебник «Ряды Фурье» выдержал 3 издания, «Интегральные уравнения»— 2 издания. Поистине поразительный пример долголетия являет собой учебник И. И. Привалова для втузов «Аналитическая геометрия»: 1-е издание вышло в 1927 г., при жизни автора вышло 12-е издание в 1939 г., а последнее 30-е издание вышло в 1966 г.

Все эти книги и к настоящему времени сохраняют свою ценность.

Вот как характеризуют И. И. Привалова его современники:

1) Академик П. С. Александров (Мир ученого.— Наука и жизнь, 1974, № 8, с. 7—8): «Всеобъемлющий характер как математических, так и общекультурных интересов придавал исключительный размах и редкую широту преподавательской деятельности Хаусдорфа в университете. Но, вероятно, именно поэтому у него не было собственных учеников: он слишком много требовал от них и сам слишком много знал. Этим свойством, между прочим, обладал и наш советский очень крупный математик И. И. Привалов, который по этой причине тоже имел очень немного учеников: не все могли выдержать его чрезвычайную требовательность. Знания самого ученого, видимо, подавляли начинающих молодых людей. Казалось, невозможно было ему подражать, а ученики не могут совсем не подражать своему учителю».

2) Академики С. А. Чаплыгин и Н. Н. Лузин (Архив АН СССР, фонд 411, опись 4б, № 18, с. 23): «Обозревая научную деятельность И. И. Привалова следует, прежде всего, отметить широту охвата вопросов Математического анализа, включая сюда теорию функций комплексного переменного, а также и силу его результатов.

И. И. Привалов никогда не преследовал какой-нибудь частной проблемы ради нее самой, он всегда ставил этот вопрос в связь с совокупностью имеющихся методов, выработанных математическим анализом, постоянно стремясь внести расширение в самые методы математического анализа, усовершенствовать их и предельно углубить их силу.

В этом отношении весьма характерна для И. И. Привалова созданная им в последнее время теория субгармонических функций, в которой он ищет объединить, усовершенствовать и углубить главнейшие методы теории функций комплексного переменного».

3) Академик С. И. Вавилов (Архив АН СССР, фонд 411, опись 4б, с. 3): «Профессор И. И. Привалов принадлежит к числу наиболее выдающихся математиков СССР. Ему принадлежат крупные исследования по теории функций. В этой области им получены глубокие результаты по теории тригонометрических рядов, по интегралам типа Коши, по граничным задачам, по исследованию свойств аналитических функций внутри областей и по теории субгармонических функций».

В самые первые годы возникновения Московской математической школы теории функций, основателями которой следует считать Д. Ф. Егорова и Н. Н. Лузина, были изданы отдельными монографиями выдающиеся диссертации по теории функций:

1) Н. Н. Лузин «Интеграл и тригонометрический ряд». (Москва, 1915),

2) В. В. Голубев «Однозначные аналитические функции с совершенным множеством особых точек» (Москва, 1916),

3) И. И. Привалов «Интеграл Коши» (Саратов, 1918).

Первые две диссертации были переизданы в серии «Библиотека русской науки» (соответственно, в 1951 и 1961 г.г.).

Назрела необходимость издания научных трудов И. И. Привалова, естественно при этом снабдив их необходимыми комментариями. Этим будут еще раз отмечены те большие заслуги, которые принадлежат И. И. Привалову в теории функций.

Основные результаты И. И. Привалова часто цитируются в современной математической литературе, они уже получили дальнейшее развитие в работах ряда выдающихся ученых и, несомненно, и в дальнейшем будут служить весьма ценным материалом для последующего развития теории функций.

П. И. Кузнецов, Е. Д. Соломенцев

СПИСОК ПЕЧАТНЫХ РАБОТ И. И. ПРИВАЛОВА

I. Статьи и монографии

1. Свойства рядов по ортогональным функциям.— Матем. сб., 1914, **29**:2, с. 182—184.
2. К теории интегральных уравнений с ядром «symmetricable».— Матем. сб., 1914, **29**:2, с. 186—189.
3. По поводу теоремы Vitali и одного результата проф. Стеклова.— Матем. сб., 1915, **29**:3, с. 295—298.
4. Интеграл Poisson'a.— Матем. сб., 1916, **30**:2, с. 314—319.
5. О дифференцировании рядов Фурье.— Матем. сб., 1916, **30**:2, с. 320—324.
6. О тригонометрических суммах, наименее уклоняющихся от нуля.— Матем. сб., 1916, **30**:3, с. 474—478.
7. О сходимости рядов Sturm'a — Liouville'я и Legendre'a.— Сообщ. Харьк. матем. общ., 1916, **15**, с. 148—160.
8. Sur la convergence des séries trigonométriques.— C.r. Acad. sci. (Paris), 1916, **162**, p. 123—126.
9. Sur les fonctions conjuguées.— Bull. Soc. Math. France, 1916, **44**, p. 100—103.
10. Sur la dérivation des séries de Fourier.— Rend. del Circolo mat. Palermo, 1916, **41**, p. 202—206.
11. О приближении суммами Fejer'a функций, удовлетворяющих условию Lipschitz'a.— Матем. сб., 1918, **30**:4, с. 521—526.

12. О суммировании ряда Legendre'a.— Матем. сб., 1918, 30:4, с. 527—534.
13. Интеграл Cauchy.— Изв. Саратовского ун-та, физ.-матем. ф-та, 1918, 11:1 (отд. оттиск вышел в 1919 г. в Саратове).
14. К теории сопряженных тригонометрических рядов.— Матем. сб., 1923, 31:2, с. 224—228.
15. Обобщение теоремы Paul du Bois — Reymond.— Матем. сб., 1923, 31:2, с. 229—231.
16. Обобщение теоремы Fatou.— Матем. сб., 1923, 31:2, с. 232—235.
17. О ряде Тейлора.— Матем. сб., 1924, 31:3—4, с. 345—349.
18. О функциях, дающих однолистное конформное отображение.— Матем. сб., 1924, 31:3—4, с. 350—365.
19. О последовательностях аналитических функций.— Матем. сб., 1924, 32:1, с. 46—49.
20. Über einen Mittelwertsatz in der Theorie der analytischen Funktionen.— Матем. сб., 1924, 32 : 1, с. 50—53.
21. Sur les suites des fonctions analytiques.— C. R. Acad. Sci. (Paris), 1924, 178, p. 178—180.
22. Sur certaines propriétés métriques des fonctions analytiques.—C. R. Acad. Sci. (Paris), 1924, 178, 611—614.
23. Sur l'unicité et la multiplicité des fonctions analytiques.— C.R. Acad. Sci. (Paris), 1924, 178, p. 456—459 (совм. с Н. Н. Лузиным).
24. Sur certaines propriétés metriques des fouctions analytiques.— J. l'École polytechn., 1924, 24, p. 77—112.
25. Eine Erweiterung des Satzes von Herrn Vitali über Folgen analytischer Funktionen.— Math. Ann., 1924, 93, S. 149—152.
26. О сходимости сопряженных тригонометрических рядов.— Матем. сб., 1925, 32 : 2, с. 357—363.
27. Sur les fonctions harmoniques.— Матем. сб., 1925, 32:3, с. 464—471.
28. Об одном новом процессе суммирования бесконечных рядов.— Матем. сб., 1925, 32 : 4, с. 711—722.
29. Sur l'unicité et la multiplicité des fonctions analytiques.— Ann. l'École norm. super., 1925, 42, p. 143—191 (совм. с Н. Н. Лузиным).
30. Sur les suites des fonctions analytiques.— Матем. сб., 1926, 33:1, с. 119—128.
31. По поводу предложения Bloch'a.— Матем. сб., 1928, 35:1, с. 111—121.
32. Общий очерк развития теории функций комплексного переменного в СССР за время 1917—1927 г. г.— Матем. сб., 1928, 35, дополн. вып., с. 5—20, (совм. с М. А. Лаврентьевым).
33. О полиномах Чебышёва.— Изв. асс. научно-иссл. институтов МГУ, 1928, 1 : 1—2, с. 23—36.
34. Современное состояние теории функций комплексного переменного.— Труды съезда матем. в Москве за 1927 г., М., 1928, с. 33—49.
35. Sur une propriété générale des fonctions analytiques.— C.R. Acad. Sci. (Paris), 1928, 187, p. 927—929.
36. Об областях, образованных из точек, изображающих общие значения пары аналитических функций.— Матем. сб., 1930, 37:1—2, с. 79—90.
37. Об одной граничной задаче субгармонических функций.— Матем. сб., 1934, 41: 1, с. 3—10.
38. Об одной граничной задаче в теории аналитических функций.— Матем. сб., 1934, 41:4, с. 519—526.
39. О некоторых вопросах теории субгармонических и аналитических функций.—Матем. сб., 1934, 41:4, С. 527—550.
40. Граничная задача теории функций.— Изв. АН, VII сер., 1935, № 2, с. 301—306.
41. Обобщение формулы Jensen'a. I.— Изв. АН, VII сер., 1935, № 6—7, с. 837—847.
42. Обобщение формулы Jensen'a. II.— Изв. АН, VII сер., 1935, № 6—7, с. 848—856.
43. Современные проблемы теории функций комплексного переменного.— Изв. НИИ матем. и мех. при Томском гос. унив., 1935, 1:2, с. 107—119.

44. Обобщение метода Линделёфа.— Изв. НИИ матем. и мех. при Томском гос. унив., 1935, 1:2, с. 126—143.
45. О некоторых вопросах теории субгармонических функций. I — ДАН, 1935, 1, с. 201—204.
46. О некоторых вопросах теории субгармонических функций. II — ДАН, 1935, 2, с. 183—186.
47. К общей теории гармонических и субгармонических функций.— Матем. сб., 1936, 1 (43):1, с. 103—123.
48. О некоторых экстремальных задачах теории субгармонических функций.— Матем. сб., 1936, 1(43):3, с. 297—302.
49. Некоторые замечания к теории нормальных семейств непрерывных функций.— Матем. сб., 1937, 2(44):4, с. 739—744.
50. К общей теории полигармонических функций. Матем. сб., 1937, 2(44):4, с. 745—758. (Совм. с Б. Пчелиным.)
51. Sur la théorie générale des fonctions polyharmoniques.—C.R. Acad. Sci. (Paris). 1937, 204: 5, p. 328—330.
52. Субгармонические функции.— М.—Л., ОНТИ, 1937.
53. Граничные задачи теории гармонических и субгармонических функций в пространстве.— Матем. сб., 1938, 3(45):1, с. 3—25.
54. Приложения понятия гармонической меры к некоторым проблемам теории функций.— Матем. сб., 1938, 3(45):3, с. 527—533.
55. Приложения понятия гармонической меры к некоторым задачам теории субгармонических функций.— Матем. сб., 1938, 3(45):3, с. 535—541.
56. Приложения понятия гармонической меры к некоторым проблемам теории функций. ДАН, 1938, 18 : 1, с. 3—7.
57. Граничные задачи теории гармонических и субгармонических функций в пространстве.— ДАН, 1938, 18:1, с. 7—8.
58. Различные классы субгармонических функций в связи с их аналитическими представлениями.— ДАН, 1938, 18:8, с. 507—510.
59. Обобщенный принцип максимума для субгармонических функций.— ДАН, 1938, 19, с. 27—29.
60. О предельных значениях аналитической функции.— ДАН, 1938, 19, с. 663—665.
61. Различные классы субгармонических функций в связи с их аналитическими представлениями.— Изв. АН, сер. матем., 1938, № 2, с. 191—220.
62. Об одном классе субгармонических функций в связи с его аналитическим представлением. Изв. АН, сер. матем., 1938, № 3, с. 303—312.
63. О предельных значениях интеграла типа Коши — Стильтьеса.— Изв. НИИ матем. и мех. при Томском гос. унив., 1938, 2:2, с. 43—52 (совм. с Г. А. Бродским.)
64. Граничные задачи и различные классы гармонических и субгармонических функций, определенных в произвольных областях.— Матем. сб., 1939, 6(48):3, с. 345—376 (совм. с П. И. Кузнецовым).
65. Об интегралах типа Коши.— ДАН, 1939, 23:9, с. 859—862.
66. Некоторые замечания к теории субгармонических функций.— Изв. АН, сер. матем., 1939, № 1, с. 7—12.
67. К проблеме Ватсона.— Изв. АН, сер. матем., 1939, № 1, с. 13—23.
68. Sur l'integrale du type de Cauchy — Stieltjes.— ДАН, 1940, 27:3, с. 195—198.
69. Об интеграле типа Коши — Стильтьеса.— Изв. АН, сер. матем., 1940, № 4, с. 261—276.
70. О потенциале двойного слоя в пространстве.— Матем сб., 1941, 9(51):2, с. 429—436.
71. On a theorem of S. Saks.— Матем. сб., 1941, 9(51):2, с. 457—460 (совм. с. В. В. Сагателяном).
72. К определению субгармонической функции.— Изв. АН, сер. матем., 1941, № 5, с. 281—284.
73. Граничные свойства однозначных аналитических функций.— М.: МГУ, 1941.

74. Некоторые приложения обобщенного оператора Лапласа.—Матем. сб., 1942, 11(53):3, с. 149—154.
75. Некоторые замечания к теории субгармонических функций.— Матем., сб., 1943, 12(54):1, с. 85—90.
76. Граничные свойства аналитических функций, изд. 2, знач. перераб. и дополн. Под ред. А. И. Маркушевича.— М.—Л.: ГИТТЛ, 1950. (Немецкий перевод: Randeigenschaften analytischer Funktionen, Berlin, 1956).

II. Учебная литература

77. Аналитическая геометрия на плоскости, конспект лекций.— Саратов: Касса взаимопомощи физ.-матем. фак. СУ, 1918 (литогр.).
78. Переработка для высших техн. учебн. заведений курса анализа П. Аппеля (И. И. Привалов, П. Аппель, Элементы математического анализа. ч. I, ч. II.— М.: ГТТИ, 1924.
79. Аналитическая геометрия (учебник).— М.: Макиз, 1927; изд. 12, М.—Л.: ГТТИ, 1939; изд. 30, М.: Наука, 1966.
80. Ряды Фурье.— М.— Л.: ГТТИ, 1930; изд. 3, М.—Л.: ГТТИ, 1934.
81. Введение в теорию функций комплексного переменного (учебник).— М.—Л.: ГТТИ, 1927; изд. 6, М.— Л.: ГТТИ, 1940; изд. 12, М.: Наука, 1977.
82. Курс дифференциального исчисления (переработка курса К. И. Поссе), учебн. пособие. М.—Л.: ГТТИ, 1934; изд. 5, М.—Л.: ГТТИ, 1939.
83. Курс интегрального исчисления (переработка курса К. И. Поссе), учебник.— М.—Л.: ГТТИ, 1934; изд. 4, М.— Л.: ГТТИ, 1939.
84. Основы анализа бесконечно малых, пособие для самообразования.— М.: Учпедгиз, 1935; изд. 4, М.: Наука, 1966.
85. Интегральные уравнения, учебник.— ГТТИ, М.—Л.: ГТТИ, 1935; изд. 2, М.—Л.: ГТТИ, 1937.
86. Элементы теории эллиптических функций.— М.: МГУ, 1939 (немецкий перевод в 3-х томах: Einführung in die Funktionentheorie. V. 1—3,— Teubner, Leipzig: 1958—1959. Изд. 4 вышло там же в 1970).