Доклады Академии наук
1992. Том 323, № 2

УДК 517.951+517.956 МАТЕМАТИКА

© Б.Ю. СТЕРНИН, В.Е. ШАТАЛОВ

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ НЕЛОКАЛЬНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

(Представлено академиком В.П. Масловым 6 I 1992)

В работе [1] построено расширение алгебры псевдодифференциальных операторов (п.д.о.) с помощью некоторого класса интегральных операторов Фурье, ассоциированных с гладким расслоением $E \xrightarrow{\pi} B$. Как было указано, мотивировкой введения такого специального расширения явилось изучение некоторого класса нелокальных задач для дифференциальных уравнений.

1. Приведем некоторые (модельные) примеры таких задач.

Пусть $T^2 = S^1 \times S^1$ – двумерный тор, а

$$\hat{L} = -\sum_{i,j=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x^i} a^{ij}(x^1, x^2) \frac{\partial}{\partial x^j} + q(x^1, x^2)$$

есть эллиптический дифференциальный оператор на T^2 (здесь x^1, x^2 – 2π-периодические координаты на торе). Рассмотрим следующие две задачи на торе:

$$(1) \qquad \hat{L}u(x^1, x^2) + u(x^1, 0) = f(x^1, x^2),$$

$$\hat{L}u(x^1, x^2) = f(x^1, x^2) \quad \text{при} \quad x^2 \neq 0,$$

$$(2) \qquad u(x^1, +0) - u(x^1, -0) = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x^2}(x^1, +0) - \frac{\partial u}{\partial x^2}(x^1, -0) = -\frac{1}{a^{22}(x^1, 0)} \int_0^{2\pi} u(x^1, x^2)\, dx^2.$$

Обозначим через $\pi\colon T^2 \to S^1$ естественную проекцию прямого произведения $T^2 = S^1 \times S^1$ на первый сомножитель S^1, а через $i\colon S^1 \to T^2$ – вложение, заданное формулой $x^1 \mapsto (x^1, 0)$. Легко видеть, что индуцированные отображения i^*, π^* определяют ограниченные операторы в шкале Соболева

$$(3) \qquad \begin{aligned} &i^*\colon\ H^s(T^2) \to H^{s-1/2}(S^1), \qquad s > 1/2, \\ &\pi^*\colon\ H^s(S^1) \to H^s(T^2). \end{aligned}$$

Обозначим через i_*, π_* сопряженные операторы к операторам (3). Эти операторы действуют по формулам

$$i_*[f(x^1)] = f(x^1) \otimes \delta(x^2),$$

$$\pi_*[f(x^1, x^2)] = \int_0^{2\pi} f(x^1, x^2)\, dx^2.$$

С помощью введенных операторов задачи (1), (2) могут быть переписаны в виде операторных уравнений

$$(4) \qquad (\hat{L} + \pi^* i^*) u(x^1, x^2) = f(x^1, x^2),$$

$$(5) \qquad (\hat{L} + i_* \pi_*) u(x^1, x^2) = f(x^1, x^2).$$

Преимущество записи задач (1), (2) в форме (4), (5) видно, например, из того, что становится очевидным факт (apriori не тривиальный), что эти задачи сопряжены друг к другу.

Общая теория операторов рассматриваемого типа была построена в [1]. Она представляет собой некоторое специальное расширение алгебры псевдодифференциальных операторов с помощью интегральных операторов Фурье, ассоциированных с гладким расслоением. Схема построения этого расширения следующая. Рассматривается расслоение $E \xrightarrow{\pi} B$ с фиксированным сечением $i\colon B \to E$. Такое расслоение называется отмеченным. Операторы $\pi^* i^*$, $i_* \pi_*$ (а также операторы $\pi^* \pi_*$ и $i_* i^*$, возникающие в композициях операторов типа (4), (5), являются интегральными операторами Фурье на четырех специальных лагранжевых многообразиях, определяемых с помощью проекции π и вложения i. В общем случае элемент расширения представляет собой сумму псевдодифференциального оператора и четырех интегральных операторов Фурье на упомянутых выше лагранжевых многообразиях (см. [1]).

Основная задача, которая здесь перед нами стоит, – дать условия, обеспечивающие фредгольмовость элемента расширения. Для решения ее заметим прежде всего, что, как хорошо известно, основным аппаратом для доказательства теорем конечности (фредгольмовости) для псевдодифференциальных операторов является исчисление символов этих операторов. В нашем случае символ элемента расширения представляет собой набор, состоящий из символа псевдодифференциальной компоненты этого элемента и символов четырех интегральных операторов Фурье. Однако простая формула для символа композиции (имеющая место для псевдодифференциальных операторов) здесь уже неверна. Символ (главный) композиции элементов расширения выражается уже не через произведение символов сомножителей, а через интегралы от таких произведений по слоям конормального расслоения к вложению i или и по слоям расслоения π (см. [1]).

Это приводит к тому, что условие, обеспечивающее фредгольмовость элемента расширения, формулируется как условие разрешимости некоторого семейства интегральных уравнений, параметризованного точками кокасательного пространства $T_0^* B$ базы расслоения $E \xrightarrow{\pi} B$.

В работе [1] описаны лагранжевы многообразия, индуцированные отмеченным расслоением, определены классы символов, используемых для построения интегральных операторов Фурье на этих многообразиях, и установлены для таких операторов теоремы об ограниченности и композиции. Используя этот аппарат, мы вводим понятие эллиптичности элемента алгебры $\mathbf{A}(m, l)$ (см. [1]) и доказываем, что любой эллиптический элемент расширения фредгольмов (теорема конечности).

Итак, рассматривается множество операторов вида

$$\mathcal{A} = A + \hat{\Phi}_{11} + \hat{\Phi}_{12} + \hat{\Phi}_{21} + \hat{\Phi}_{22},$$

где $\hat{\Phi}_{ij} \in \mathrm{Op}_{ij}(m, k_{ij}, l)$, A есть п.д.о. порядка r (см. [1]). Множество операторов $\mathcal{A}$ обозначим через $\mathbf{A}(m, l, r)$. Заметим, что оператор (6), принадлежащий множеству $\mathbf{A}(m, l, r)$, является ограниченным в пространстве

$$\mathcal{A}\ :\ H^s(E) \to H^{s-r}(E)$$

для любого $s \in (l + \nu/2,\ r - m - \nu/2)$. Подалгебра $\mathbf{A}(m, l, 0)$ этой алгебры будет обозначаться через $\mathbf{A}(m, l)$. Она есть полупрямая сумма алгебры п.д.о. порядка нуль и алгебры операторов вида (6) со скалярным оператором $\hat{A}$.

Очевидно, для исследования фредгольмовости элемента алгебры $\mathbf{A}(m, l)$ достаточно рассмотреть случай $\hat{A} = 1$. Более точно, мы введем следующее определение

Определение 1. Оператор $\mathcal{A} \in \mathbf{A}(m, l)$ называется эллиптическим,

если система уравнений

$$u_1(p'') + \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\nu} \int \Phi_{11}|_{q''=\xi''} \cdot u_1(\xi'') w_B(\xi'') + \int \Phi_{12}|_{y''=z''} \; u_2(z'') v_F(z'') = f(p''),$$

$$u_2(x'') + \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\nu} \int \Phi_{21}|_{q''=\xi''} \cdot u_1(\xi'') w_B(\xi'') + \int \Phi_{22}|_{y''=z''} \; u_2(z'') v_F(z'') = g(x'')$$

разрешима относительно $u_1(p'')$, $u_2(x'')$ для любых элементов $f(p'')$, $g(x'')$ в каждой точке $(x', p') \in T^*B$ вне нулевого сечения.

Определение 2. Элемент $\mathcal{A} \in \mathbf{A}(m, l, r)$ называется эллиптическим, если $\hat{A}$ и $1 + \hat{A}^{-1} \circ \hat{\Phi}_{11} + \hat{A}^{-1} \circ \hat{\Phi}_{12} + \hat{A}^{-1} \circ \hat{\Phi}_{21} + \hat{A}^{-1} \circ \hat{\Phi}_{22}$ эллиптичен (A^{-1} почти обратный для A).

Заметим, что для случая вырожденных символов система (7) может быть редуцирована к алгебраической системе уравнений и, таким образом, условие эллиптичности приобретает алгебраический характер.

Теорема. *Пусть $\mathcal{A}$ – эллиптический элемент множества $\mathbf{A}(m, l, r)$ и пусть $s \in (l + \nu/2,\ r - m - \nu/2)$. Тогда оператор* (6) *является оператором Фредгольма (т.е. имеет конечномерное ядро и коядро).*

Замечание. Рассматриваемый класс операторов естественным образом допускает интерпретацию как некоторый специальный класс п.д.о., действующих в сечениях бесконечномерных расслоений над базой B. Такого рода интерпретация не только проясняет смысл введенных выше условий эллиптичности, но и позволяет дать формулу индекса для рассматриваемого класса операторов. К сожалению, ввиду недостатка места мы не имеем возможности остановиться подробнее на этой концепции.

Рассмотрим теперь примеры применения разработанной техники к исследованию фредгольмовости нелокальных задач. Прежде всего отметим, что все примеры задач, приведенные во введении к данной статье, являются фредгольмовыми, так как порядки всех операторов $\hat{\Phi}_{ij}$ соответствующих элементов алгебры $\mathbf{A}(m, l)$ являются строго отрицательными. Ниже мы приводим три более содержательных примера.

Пример 1. Пусть

$$\hat{L} = -\sum_{i,j=1}^{3} a^{ij}(x) \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} + \sum_{i=1}^{3} b_i(x) \frac{\partial}{\partial x^i} + c(x)$$

есть эллиптический оператор второго порядка на торе $T^3 = S^1 \times S^1 \times S^1$; здесь $x = (x^1, x^2, x^3)$ – 2π-периодические координаты на T^3. Рассмотрим следующую задачу на T^3:

$$(8) \qquad \hat{L}u + a(x) \frac{\partial u}{\partial x^1}(0, 0, x^3) + b(x) \frac{\partial u}{\partial x^2}(0, 0, x^3) = f(x).$$

Задача (8) редуцируется, очевидно, к операторному уравнению

$$(9) \qquad \left[1 + \hat{L}^{-1}\left(a(x)\pi^* i^* \frac{\partial}{\partial x^1} + b(x)\pi^* i^* \frac{\partial}{\partial x^2}\right)\right] u = \hat{L}^{-1} f,$$

где $\hat{L}^{-1}$ – регуляризатор оператора $\hat{L}$, π: $T^3 \to S^1$ – естественная проекция на третий множитель, а вложение i: $S^1 \to T^3$ определено формулой $i(x^3) = (0, 0, x^3)$. Оператор, входящий в задачу (9), есть элемент алгебры $\mathbf{A}(-2, 1)$ вида $1 + \hat{\Phi}_{21}$, где $\hat{\Phi}_{21} \in \mathrm{Op}_{21}(-2, 1)$ – оператор порядка 0 с главным символом

$$\Phi_{21} = \frac{i}{a^{33}(x) p_3^2}(a(x) q_1 + b(x) q_2).$$

В силу предложения 3 работы [1], регуляризатор к оператору (9) имеет вид

$$1-\hat{L}^{-1}\left(a(x)\pi^* i^* \frac{\partial}{\partial x^1}+b(x)\pi^* i^* \frac{\partial}{\partial x^2}\right)\in \mathbf{A}(-2,1).$$

Следовательно, соответствующий элемент алгебры $\mathbf{A}(-2, 1)$ эллиптичен, а задача (8) является фредгольмовой.

Этот пример является частным случаем следующего утверждения.

Утверждение.

Каждый элемент $\mathcal{A}\in \mathbf{A}'(l, m)$, *имеющий вид* $1+\hat{\Phi}_{21}$ (*или* $1+\hat{\Phi}_{12}$), *является эллиптическим. Соответствующий регуляризатор есть* $1-\hat{\Phi}_{21}$ (*соответственно* $1-\hat{\Phi}_{12}$).

Пример 2. Рассмотрим задачу

$$(10)\quad \hat{L}u+\left(\frac{\partial}{\partial x^3}\right)^2\int K(x^1,x^2,x^3,y^1,y^2)u(y^1,y^2,x^3)dy^1dy^2=f(x).$$

Условие эллиптичности (а следовательно, фредгольмовости) задачи (10) есть условие разрешимости интегрального уравнения

$$\Phi'_{22}(x^1,x^2,x^3,y^1,y^2)+\int_{\mathbf{R}^2}\frac{K(x^1,x^2,x^3,z^1,z^2)}{a^{33}(x^1,x^2,x^3)}\Phi'_{22}(z^1,z^2,x^3,y^1,y^2)dz^1dz^2=$$
$$=-\frac{K(x^1,x^2,x^3,y^1,y^2)}{a^{33}(x^1,x^2,x^3)}.$$

В частности, если функция K не зависит от переменных x^1, x^2, то условие эллиптичности может быть записано в виде

$$\int_{\mathbf{R}^2}\frac{K(x^3,z^1,z^2)}{a^{33}(z^1,z^2,x^3)}dz^1dz^2\neq -1$$

для любого $x^3\in S^1$.

Пример 3. Пусть Δ – оператор Лапласа на торе T^2, а отображения π: $T^2\to S^1$ и i: $S^1\to T^2$ определены во введении к данной статье. Рассмотрим задачу

$$(11)\quad \begin{aligned}&-\Delta u(x^1,x^2)=f(x^1,x^2)\quad \text{для}\quad x^2\neq 0;\\ &u(x^1,+0)-u(x^1,-0)=0;\\ &\frac{\partial u}{\partial x^2}(x^1,+0)-\frac{\partial u}{\partial x^2}(x^1,-0)=-\frac{\lambda}{a^{22}(x^1,0)}\frac{\partial u}{\partial x^1}(x^1,0),\end{aligned}$$

где λ – произвольное комплексное число. Задача (11) может быть записана в виде операторного уравнения

$$(12)\quad \left(-\Delta+i_*\frac{\partial}{\partial x^1}i^*\right)u=f.$$

Условие эллиптичности оператора, входящего в задачу (12), есть условие разрешимости интегрального уравнения

$$\Phi'_{11}(x^1,q_1,p_2,q_2)-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{iq_1\lambda}{q_1^2+p_2^2}\Phi'_{11}(x^1,q_1,\xi,q_2)d\xi=+\frac{iq_1\lambda}{q_1^2+p_2^2}.$$

Нетрудно видеть, что последнее уравнение разрешимо при всех λ, кроме $\lambda=\pm i\sqrt{2/\pi}$.

Заметим в заключение, что построенная теория, в частности, включает интегро-

дифференциальные уравнения вида

$$\hat{L}u(x^1, x^2) + \int_0^{2\pi} k(x^1, x^2, y^2)u(x^1, y^2)dy^2 = f(x^1, x^2)$$

и некоторые другие классы нелокальных задач (см., например, А.В. Бицадзе, А.А.Самарский [2], А. Мак-Кралл [3] и др.).

Мы признательны В.П. Маслову за постоянную поддержку и внимание к нашей работе.

Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова

Поступило
9 I 1992

ЛИТЕРАТУРА

1. *Стернин Б.Ю., Шаталов В.Е.* – ДАН, 1992, т. 323, № 1, с. 25–29. 2. *Бицадзе А.В., Самарский А.А.* – ДАН, 1969, т. 185, № 4, с. 739–740. 3. *McKrall A.* – Proc. AMS, 1965, vol. 117, p. 352–361.