A. N. Aver'yanov, Averaging of the solution of the Dirichlet problem for the Navier-Stokes system with a rapidly oscillating right-hand side,
Vestnik Moskov. Univ. Ser. 1. Mat. Mekh., 1996, Number 5, 89–94

https://www.mathnet.ru/eng/vmumm2060

УДК 517.954

А. Н. Аверьянов

УСРЕДНЕНИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ СИСТЕМЫ НАВЬЕ—СТОКСА С БЫСТРООСЦИЛЛИРУЮЩЕЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ

Рассмотрим стационарное течение вязкой несжимаемой жидкости в ограниченной области Q под действием векторного поля быстроосциллирующих массовых сил:

$$\begin{cases} -\nu\nabla u_\varepsilon + (u_\varepsilon)_k \dfrac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_k} + \nabla p_\varepsilon = f(x,\ x/\varepsilon), \\ \operatorname{div} u_\varepsilon = 0, \\ u_\varepsilon|_{\partial Q} = 0, \end{cases} \tag{1}$$

$$Q \subset \mathbf{R}^n,\ \partial Q \in C^\infty,\ \varepsilon \in (0,\ \varepsilon_0],\ x \in Q,\ \xi = x/\varepsilon,$$

$$\Pi \equiv (0,\ 1)^n,\ f(x,\ \xi) \in \mathbf{C}^\infty(\bar{Q} \times \mathbf{R}^n),$$

вектор-функция f 1-периодична по ξ.

Следуя [1], введем следующие объекты:

$$H(Q) \equiv \{u \in (H_0^1(Q))^n,\ \operatorname{div} u = 0\},$$

$$\|u\|_{H(Q)} \equiv \|\nabla u\|_{L_2(Q)};$$

$H^*(Q)$ — пространство, сопряженное к $H(Q)$;

μ — наименьшее собственное значение оператора Лапласа в области Q с нулевым условием Дирихле.

Согласно [1], если ν, f и Q таковы, что выполнены следующие условия:

$$\begin{cases} (4/3)^{3/4}\mu^{-1/4}\nu^{-2}\|f(x,\ x/\varepsilon)\|_{H^*(Q)} < 1,\ n = 3; \\ (2/\mu)^{1/2}\nu^{-2}\|f(x,\ x/\varepsilon)\|_{H^*(Q)} < 1,\ n = 2, \end{cases} \tag{2}$$

то задача (1) имеет единственное решение

$$u_\varepsilon \in \mathbf{C}^\infty(\bar{Q}),\ p_\varepsilon \in C^\infty(\bar{Q}) \cap L_2(Q)/\mathbf{R}.$$

Кроме того, справедлива оценка

$$\|u_\varepsilon\|_{H(Q)} \leqslant \nu^{-1}\|f(x,\ x/\varepsilon)\|_{H^*(Q)}. \tag{3}$$

Далее рассматриваются следующие задачи:

усредненная

$$\begin{cases} -\nu\Delta u_0 + (u_0)_k \dfrac{\partial u_0}{\partial x_k} + \nabla p_0 = \langle f\rangle \equiv \displaystyle\int_\Pi f(x,\ \xi)\,d\xi, \\ \operatorname{div} u_0 = 0, \\ u_0|_{\partial Q} = 0; \end{cases} \tag{4}$$

периодическая (на ячейке П)

$$\begin{cases} -\nu\Delta_\xi B(x,\ \xi) + \nabla_\xi A(x,\ \xi) = \tilde{f}(x,\ \xi) \equiv f(x,\ \xi) - \langle f\rangle, \\ \operatorname{div}_\xi B(x,\ \xi) = 0, \\ B(x,\ \xi),\ A(x,\ \xi)\ \text{1-периодичны по переменной}\ \xi, \\ \langle B(x,\ \xi)\rangle = 0,\ \langle A(x,\ \xi)\rangle = 0; \end{cases} \tag{5}$$

задача, корректирующая граничное условие

$$\begin{cases} -\nu\Delta_\xi \widetilde{B}(x, \xi) + \nabla_\xi \widetilde{A}(x, \xi) = 0 & \\ \operatorname{div}_\xi \widetilde{B}(x, \xi) = 0 & \xi \in \varepsilon^{-1} Q, \\ \widetilde{B}(x, \xi)|_{\xi\in\varepsilon^{-1}\partial Q} = B(x, \xi)|_{\xi\in\varepsilon^{-1}\partial Q}. & \end{cases} \tag{6}$$

Задачи (5), (6) параметрически зависят от $x \in \bar{Q}$.

Введем обозначения:

$$\tilde{u}_0(x) \equiv u_\varepsilon(x) - u_0(x), \quad \tilde{p}_0(x) \equiv p_\varepsilon(x) - p_0(x),$$

$$\tilde{u}_2(x, \xi) \equiv \tilde{u}_0(x) + \varepsilon^2 (\widetilde{B}(x, \xi) - B(x, \xi)),$$

$$\tilde{p}_2(x, \xi) \equiv \tilde{p}_0(x) + \varepsilon (\widetilde{A}(x, \xi) - A(x, \xi)),$$

$$\widehat{B}(x, \xi) \equiv B(x, \xi) - \widetilde{B}(x, \xi),$$

$$\widehat{A}(x, \xi) \equiv A(x, \xi) - \widetilde{A}(x, \xi).$$

Основным результатом данной работы является

Теорема 1. *Пусть для* $f(x, x/\varepsilon)$ *и* $\langle f \rangle$ *выполнено условие* (2), *тогда*

$$\begin{gathered} \|\tilde{u}_0(x)\|_{H_1(Q)} + \|\tilde{p}_0(x)\|_{L_2(Q)/\mathbf{R}} = O(\varepsilon), \\ \|\tilde{u}_2(x, x/\varepsilon)\|_{H_2(Q)} + \|\tilde{p}_2(x, x/\varepsilon)\|_{H_1(Q)/\mathbf{R}} = O(\varepsilon). \end{gathered} \tag{7}$$

В процессе доказательства нам понадобится теорема, доказательство которой изложено в [2].

Теорема 2. *Пусть ограниченная область* Q, *функция* $g(x)$ *и вектор-функции* $f(x)$, $\varphi(x)$ *удовлетворяют следующим условиям*:

$$Q \subset \mathbf{R}^n, \ \partial Q \in \mathbf{C}^\infty, \ m \geqslant -1, \ f \in (H_m(Q))^n, \ \varphi(x) \in (H_{m+3/2}(\partial Q))^n,$$

$$g \in H_{m+1}(Q), \ \int_Q g\,dx = \int_{\partial Q} (\varphi, n)\,ds.$$

Тогда существует единственное обобщенное решение задачи Стокса

$$\begin{cases} -\nu\Delta u + \nabla p = f & \\ \operatorname{div} u = g & \text{в } Q, \\ u|_{\partial Q} = \varphi, & \end{cases}$$

при этом $u \in (H_{m+2}(Q))^n$, $p \in H_{m+1}(Q) \cap L_2(Q)/\mathbf{R}$ *и выполнена оценка*

$$\begin{gathered} \|u\|_{H_{m+2}(Q)} + \|p\|_{H_{m+1}(Q)/\mathbf{R}} \leqslant c(\nu, m, Q)(\|f\|_{H_m(Q)} + \\ + \|g\|_{H_{m+1}(Q)} + \|\varphi\|_{H_{m+3/2}(\partial Q)}). \end{gathered} \tag{8}$$

Для доказательства теоремы 1 нам понадобятся технические леммы.

Лемма 1. *Периодическое подпространство вектор-функций с нулевым средним из* $(L_2(\mathbf{R}^n))^n$ *представимо в виде прямой суммы двух периодических подпространств* $(L_2(\mathbf{R}^n))^n$, *содержащих соответственно потенциальные и соленоидальные компоненты, обладающие нулевым средним.*

Доказательство леммы 1 непосредственно следует из утверждения теоремы Вейля—Гельмгольца о разложении векторного поля на потенциальную и соленоидальную составляющие.

Замечание 1. Вектор-функция $\tilde{f}(x, \xi)$ естественным образом представима в виде ряда Фурье по элементам системы

$$X_\alpha(\xi) \equiv \exp(2\pi i \langle \alpha, \xi \rangle),$$

здесь $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ — мультииндекс, $\langle \alpha, \xi \rangle \equiv \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \xi_k$, $\alpha_k \in \mathbf{Z}$, $i^2 = -1$.

При этом коэффициенты разложения суть гладкие (по x) функции, которые вместе со всеми своими производными мажорируются по модулю любой отрицательной степенью собственного мультииндекса, тем самым обеспечивается равномерная сходимость соответствующих рядов в $\bar{Q} \times \mathbf{R}^n$.

Лемма 2. *Существует единственное решение задачи* (5) *и выполнены условия*:

$$1)\ |D_x^\beta B(x, x/\varepsilon)| + |D_x^\beta A(x, x/\varepsilon)| = O(\varepsilon^{-k}), \tag{9}$$

где β — *мультииндекс*, $|\beta| = k$;

$$2)\ \|B(x, x/\varepsilon)\|_{H_{k-1/2}(\partial Q)} = O(\varepsilon^{-k+1/2}),\quad k \in \mathbf{N}.$$

Доказательство. Согласно замечанию 1 утверждение леммы достаточно доказать для решения задачи (5) с правой частью вида $f_{\alpha j}(\xi) = X_\alpha(\xi) \bar{e}_j$, где $\bar{e}_j$ — единичный вектор вдоль оси x_j.

В результате имеем вспомогательную задачу

$$\begin{cases} -\nu \Delta_\xi B + \nabla_\xi A = f_{\alpha j}(\xi), \\ \operatorname{div}_\xi B = 0, \\ B(\xi),\ A(\xi) \text{ 1-периодичны; } \langle B(\xi) \rangle = 0 \text{ и } \langle A(\xi) \rangle = 0. \end{cases} \tag{10}$$

Далее, в соответствии с утверждением леммы 1 $f_{\alpha j}(\xi) = \nabla_\xi \varphi + h(\xi)$, где функция $\varphi(\xi)$ и вектор-функция $h(\xi)$ 1-периодичны, $\operatorname{div}_\xi h = 0$, $\langle h(\xi) \rangle = 0$.

Легко видеть, что задача (10) расщепляется на две периодические задачи для скорости и давления:

$$\begin{cases} -\nu \Delta_\xi B = h(\xi), \\ \langle B(\xi) \rangle = 0; \end{cases} \tag{11}$$

$$\begin{cases} \nabla_\xi A(\xi) = \nabla_\xi \varphi(\xi), \\ \langle A(\xi) \rangle = 0. \end{cases} \tag{12}$$

Существует единственное периодическое решение $B(\xi)$, $A(\xi)$ задач (11) и (12), и для него справедлива оценка (9_1).

Для доказательства оценки (9_2) в области Q рассмотрим гладкую функцию $\tau(x)$, удовлетворяющую следующим условиям: $\tau(x)$ равна нулю вне ε-окрестности границы ∂Q, $\tau|_{\partial Q} = 1$, $|\tau(x)| \leqslant 1$, $|D^\beta \tau| \leqslant c \varepsilon^{-|\beta|}$ для любого мультииндекса $\beta : |\beta| \leqslant k$.

Введем функцию $v(x) = B(x/\varepsilon)\tau(x)$, для нее выполнены условия $v|_{\partial Q} = B(x/\varepsilon)|_{\partial Q}$, $|D_x^\beta v| \leqslant c\varepsilon^{-|\beta|}$, $\|v\|_{H_k(Q)} = O(\varepsilon^{-k+1/2})$. В результате имеем

$$\|B(x/\varepsilon)\|_{H_{k-1/2}(\partial Q)} \equiv \inf_{h = B|_{x \in \partial Q}} \|h\|_{H_k(Q)} \leqslant \|v\|_{H_k(Q)} = O(\varepsilon^{-k+1/2}).$$

Лемма 3. *Существует единственное решение задачи* (6), *причем*

$$\|\tilde{B}(x, x/\varepsilon)\|_{H_k(Q)} + \varepsilon^{-1} \|\tilde{A}(x, x/\varepsilon)\|_{H_{k-1}(Q)} = O(\varepsilon^{-k+1/2}). \tag{13}$$

Доказательство. Рассмотрим вспомогательную задачу

$$\begin{cases} -\nu\Delta_\xi \widetilde{B}(\xi) + \nabla_\xi \widetilde{A}(\xi) = 0 & \text{в } \varepsilon^{-1}Q, \\ \operatorname{div}_\xi \widetilde{B}(\xi) = 0 & \\ \widetilde{B}|_{\xi\in\varepsilon^{-1}\partial Q} = B|_{\xi\in\varepsilon^{-1}\partial Q}, & \end{cases} \tag{14}$$

где $B(\xi)$ — решение задачи (10).

Из утверждения теоремы 2 непосредственно следует как существование и единственность решения этой задачи, так и интегральная оценка

$$\varepsilon^2 \|\widetilde{B}(x/\varepsilon)\|_{H_k(Q)} + \varepsilon \|\widetilde{A}(x/\varepsilon)\|_{H_{k-1}(Q)/\mathbf{R}} \leqslant$$

$$\leqslant c(k,\ \nu,\ Q)\,\varepsilon^2 \|B(x/\varepsilon)\|_{H_{k-1/2}(\partial Q)},\ k\in\mathbf{N},$$

откуда (с учетом (9_2)) получаем оценку (13) для решения задачи (14) и, следовательно, для (6).

Лемма 4. *Пусть* $f(x,\xi)\in\mathbf{C}^\infty(\bar{Q}\times\mathbf{R}^n)$, f *1-периодична по* ξ *и* $\langle f(x,\xi)\rangle=0$. *Тогда имеет место оценка*

$$\|f(x,\ x/\varepsilon)\|_{H_{-1}(Q)} = O(\varepsilon). \tag{15}$$

Доказательство. По определению

$$\|f(x,\ x/\varepsilon)\|_{H_{-1}(Q)} = \sup_w \left| \int_Q (f(x,\ x/\varepsilon),\ w(x))\,dx \right|, \tag{16}$$

$$w\in(H_0^1(Q))^n,\ \|w\|_{H_1(Q)}=1.$$

С учетом замечания 1 о гладкости коэффициентов Фурье функции $\widetilde{f}(x,\xi)$ и тождества $X_\alpha(x/\varepsilon) = (2\pi i\alpha_j)^{-1}\varepsilon D_{x_j}\exp(2\pi i\langle\alpha,\ x/\varepsilon\rangle)$ по формуле Грина в (16) для каждого слагаемого ряда Фурье дифференцирование перебрасывается на пробную функцию $w(x)$, и полученный интеграл по неравенству Коши—Буняковского оценивается некоторой постоянной, не зависящей от ε. В результате имеем

$$\left| \int_Q (f(x,\ x/\varepsilon),\ w(x))\,dx \right| \leqslant c\varepsilon.$$

В [1] доказана следующая

Лемма 5. *Для любой функции* $u(x)$ *из* $H_0^1(Q)$, $Q\subset\mathbf{R}^n$, *выполнено условие*

$$\begin{cases} \|u\|_{L_4(Q)} \leqslant (4/3)^{3/8}\mu^{-1/8}\|\nabla u\|_{L_2(Q)},\ n=3; \\ \|u\|_{L_4(Q)} \leqslant (2/\mu)^{1/4}\|\nabla u\|_{L_2(Q)},\ n=2. \end{cases} \tag{17}$$

Доказательство теоремы 1. Из системы (1) вычтем (4) и, учитывая равенство

$$(u_\varepsilon)_k \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_k} - (u_0)_k \frac{\partial u_0}{\partial x_k} = (\widetilde{u}_0)_k \frac{\partial \widetilde{u}_0}{\partial x_k} + (\widetilde{u}_0)_k \frac{\partial u_0}{\partial x_k} + (u_0)_k \frac{\partial \widetilde{u}_0}{\partial x_k},$$

получим следующую задачу:

$$\begin{cases} -\nu\Delta\widetilde{u}_0 + \nabla\widetilde{p}_0 + (\widetilde{u}_0)_k \dfrac{\partial \widetilde{u}_0}{\partial x_k} + (u_0)_k \dfrac{\partial \widetilde{u}_0}{\partial x_k} + (\widetilde{u}_0)_k \dfrac{\partial u_0}{\partial x_k} = \widetilde{f}(x,\ x/\varepsilon), \\ \operatorname{div}\widetilde{u}_0 = 0, \\ \widetilde{u}_0|_{\partial Q} = 0. \end{cases} \tag{18}$$

Умножим первое уравнение в (18) скалярно на $\tilde{u}_0$ и проинтегрируем по области Q. Применяя формулу Грина к левой части первого равенства, имеем

$$-\int_Q (\Delta\tilde{u}_0,\ \tilde{u}_0)\,dx = \|\tilde{u}_0\|^2_{H(Q)}, \tag{19}$$

$$\int_Q (\tilde{u}_0, \nabla\tilde{p}_0)\,dx = \int_Q (\tilde{u}_0)_k \left(\frac{\partial\tilde{u}_0}{\partial x_k},\ \tilde{u}_0\right) dx = \int_Q (u_0)_k \left(\frac{\partial\tilde{u}_0}{\partial x_k},\ \tilde{u}_0\right) dx \equiv 0. \tag{20}$$

При оценке $\left|\int_Q (\tilde{u}_0)_k \left(\frac{\partial u_0}{\partial x_k},\ \tilde{u}_0\right) dx\right|$ последовательно воспользуемся неравенством Гельдера, утверждением леммы 5 и оценкой (3):

$$\left|\int_Q (\tilde{u}_0)_k \left(\frac{\partial u_0}{\partial x_k},\ \tilde{u}_0\right) dx\right| \leqslant \|\tilde{u}_0\|^2_{L_4(Q)} \|u_0\|_{H(Q)} \leqslant c_n^2 \nu^{-1} \|\langle f\rangle\|_{H^*(Q)} \|\tilde{u}_0\|^2_{H(Q)}. \tag{21}$$

Здесь c_n — константы в оценках (17), причем

$$c_n^2 \nu^{-1} \|\langle f\rangle\|_{H^*(Q)} = \begin{cases} (4/3)^{3/4} \mu^{1/4} \nu^{-1} \|\langle f\rangle\|_{H^*(Q)}, & n=3; \\ (2/\mu)^{1/2} \nu^{-1} \|\langle f\rangle\|_{H^*(Q)}, & n=2. \end{cases} \tag{22}$$

Из (18)—(21) следует, что

$$\nu \|\tilde{u}_0\|^2_{H(Q)} \leqslant \|\tilde{f}(x,\ x/\varepsilon)\|_{H^*(Q)} \|\tilde{u}_0\|_{H(Q)} + c_n^2 \nu^{-1} \|\langle f\rangle\|_{H^*(Q)} \|\tilde{u}_0\|^2_{H(Q)}. \tag{23}$$

Учитывая оценки (2) для $\langle f\rangle$ и (22), из (23) получаем

$$\|\tilde{u}_0\|_{H(Q)} \leqslant c\, \|\tilde{f}(x,\ x/\varepsilon)\|_{H^*(Q)}.$$

В силу оценки (15) для $\tilde{f}$ (по лемме 4) находим

$$\|u_0\|_{H(Q)} = O(\varepsilon). \tag{24}$$

Далее, применяя к решению системы (18) интегральную оценку (8) при $m=-1$, устанавливаем

$$\|\tilde{p}_0\|_{L_2(Q)/\mathbf{R}} \leqslant c(\nu,\ Q) \Bigg(\|\tilde{f}(x,\ x/\varepsilon)\|_{H_{-1}(Q)} +$$

$$+ \left\|(\tilde{u}_0)_k \frac{\partial\tilde{u}_0}{\partial x_k} + (\tilde{u}_0)_k \frac{\partial u_0}{\partial x_k} + (u_0)_k \frac{\partial\tilde{u}_0}{\partial x_k}\right\|_{H_{-1}(Q)}\Bigg). \tag{25}$$

Легко видеть, что норма второго слагаемого в правой части (25) в силу (24) есть $O(\varepsilon)$. В результате согласно (24) и неравенству Фридрихса для $\tilde{u}_0$ получаем оценку (7_1):

$$\|\tilde{u}_0(x)\|_{H_1(Q)} + \|\tilde{p}_0(x)\|_{L_2(Q)/\mathbf{R}} = O(\varepsilon).$$

Из системы (18) вычтем (5) и прибавим (6), в результате имеем

$$\begin{cases} -\nu\Delta\tilde{u}_2(x,\ x/\varepsilon) + \nabla\tilde{p}_2(x,\ x/\varepsilon) = f_2(x,\ \varepsilon) \\ \operatorname{div}\tilde{u}_2(x,\ x/\varepsilon) = g_2(x,\ \varepsilon) \end{cases} \text{ в } Q, \tag{26}$$
$$\tilde{u}_2(x,\ x/\varepsilon)|_{x\in\partial Q} = 0,$$

где

$$f_2(x, \varepsilon) \equiv (\widetilde{u}_0)_k \frac{\partial \widetilde{u}_0}{\partial x_k} + (\widetilde{u}_0)_k \frac{\partial u_0}{\partial x_k} + (u_0)_k \frac{\partial \widetilde{u}_0}{\partial x_k} +$$

$$+ (\nu\varepsilon^2 \Delta_x \widehat{B}(x, \xi) + 2\nu\varepsilon (\nabla_x, \nabla_\xi) \widehat{B}(x, \xi) - \varepsilon \nabla_x \widehat{A}(x, \xi))|_{\xi=x/\varepsilon},$$

$$g_2(x, \varepsilon) \equiv -\varepsilon^2 (\operatorname{div}_x \widehat{B}(x, \xi))|_{\xi=x/\varepsilon}.$$

Используя для системы (26) оценку (8) в случае $m=0$, получаем

$$\|\widetilde{u}_2(x, x/\varepsilon)\|_{H_2(Q)} + \|\widetilde{p}_2(x, x/\varepsilon)\|_{H_1(Q)/\mathbf{R}} \leqslant$$

$$\leqslant c(\nu, Q)(\|f_2(x, \varepsilon)\|_{L_2(Q)} + \|g_2(x, \varepsilon)\|_{H_1(Q)}). \qquad (27)$$

Учитывая оценки (9), (13) для $\hat{B}$ и $\hat{A}$, тривиальным образом можно показать, что

$$\|g_2(x, \varepsilon)\|_{H_1(Q)} + \left\| f_2(x, \varepsilon) - (\widetilde{u}_0)_k \frac{\partial \widetilde{u}_0}{\partial x_k} \right\|_{L_2(Q)} = O(\varepsilon). \qquad (28)$$

Остается только оценить $\left\| (\widetilde{u}_0)_k \frac{\partial \widetilde{u}_0}{\partial x_k} \right\|_{L_2(Q)}$ и воспользоваться оценкой (27). С помощью неравенства

$$\max_{x \in \bar{Q}} |\widetilde{u}_0|^2 \leqslant c \|\widetilde{u}_0\|^2_{H_2(Q)}$$

находим

$$\left\| (\widetilde{u}_0)_k \frac{\partial \widetilde{u}_0}{\partial x_k} \right\|^2_{L_2(Q)} \leqslant c \int_Q |\widetilde{u}_0|^2 |\nabla \widetilde{u}_0|^2 dx \leqslant c \|\widetilde{u}_0\|^2_{H_2(Q)} \|\widetilde{u}_0\|^2_{H(Q)} \leqslant$$

$$\leqslant c\varepsilon^2 \|\widetilde{u}_0\|^2_{H_2(Q)} \leqslant c\varepsilon^2 (\|\widetilde{u}_2(x, x/\varepsilon)\|^2_{H_2(Q)} + \varepsilon^4 \|\widehat{B}(x, x/\varepsilon)\|^2_{H_2(Q)}) \leqslant$$

$$\leqslant c\varepsilon^2 (1 + \|\widetilde{u}_2(x, x/\varepsilon)\|^2_{H_2(Q)}). \qquad (29)$$

Подставляя (28), (29) в оценку (27), заключаем, что

$$\|\widetilde{u}_2(x, x/\varepsilon)\|_{H_2(Q)} + \|\widetilde{p}_2(x, x/\varepsilon)\|_{H_1(Q)/\mathbf{R}} \leqslant c\varepsilon (1 + \|\widetilde{u}_2(x, x/\varepsilon)\|_{H_2(Q)}),$$

откуда и следует оценка (7_2).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ладыженская О. А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М., 1970.
2. Темам Р. Уравнения Навье—Стокса. М., 1981.

Поступила в редакцию
04.07.95