



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ж. Доу, Вопросы полноты для конечно порожденных
ф.с. $\langle P_{k,E_2}, \tilde{\Omega} \rangle$ и $\langle P_{k,E_2}, \hat{\Omega} \rangle$, *Дискрет. матем.*, 1990, том 2,
выпуск 3, 128–136

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.14.91

23 марта 2025 г., 17:25:55



УДК 519.716

ВОПРОСЫ ПОЛНОТЫ ДЛЯ КОНЕЧНО ПОРОЖДЕННЫХ Ф. С.

$\langle P_{k, E_2}, \tilde{\Omega} \rangle$ И $\langle P_{k, E_2}, \hat{\Omega} \rangle$

Ж. Доу

Исследуются конечно порожденные функциональные системы (ф. с.) $\langle P_{k, E_2}, \tilde{\Omega} \rangle$ и $\langle P_{k, E_2}, \hat{\Omega} \rangle$. Для этих ф. с. дается полное описание критерияльных систем $H_{e_1}, I_{e_1}, \Pi_{e_1, e_2}, P_{e_1, e_2}$.

§ 1. Введение

Функциональные системы (ф. с.) являются одним из важнейших объектов в математической кибернетике [1]. К числу важнейших задач для ф. с. относится задача о полноте.

Пусть \mathfrak{M} — некоторое непустое множество функций, Ω — некоторое множество операций. Назовем $\langle \mathfrak{M}, \Omega \rangle$ функциональной системой, если для $\mathfrak{M}', \mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2 \subseteq \mathfrak{M}$ выполнены следующие условия: 1) $\Omega(\mathfrak{M}') \subseteq \mathfrak{M}'$; 2) $\Omega(\Omega(\mathfrak{M}')) = \Omega(\mathfrak{M}')$; 3) если $\mathfrak{M}_1 \supseteq \mathfrak{M}_2$, то $\Omega(\mathfrak{M}_1) \supseteq \Omega(\mathfrak{M}_2)$.

Подмножество \mathfrak{M}' из \mathfrak{M} называется замкнутым в $\langle \mathfrak{M}, \Omega \rangle$, если $\Omega(\mathfrak{M}') = \mathfrak{M}'$; \mathfrak{M}' называется замкнутым относительно операции ω из Ω , если $\omega(\mathfrak{M}') = \mathfrak{M}'$; \mathfrak{M}' называется полным в $\langle \mathfrak{M}, \Omega \rangle$, если $\Omega(\mathfrak{M}') = \mathfrak{M}$. Назовем замкнутое множество \mathfrak{M}' предполным классом ф. с. $\langle \mathfrak{M}, \Omega \rangle$, если $\mathfrak{M}' \subset \mathfrak{M}$, $\Omega(\mathfrak{M}') \neq \mathfrak{M}$, и для любой функции f из $\mathfrak{M} \setminus \mathfrak{M}'$ имеет место равенство $\Omega(\mathfrak{M}' \cup \{f\}) = \mathfrak{M}$. Назовем ф. с. $\langle \mathfrak{M}, \Omega \rangle$ конечно порожденной, если $\Omega(\mathfrak{M}') = \mathfrak{M}$ и \mathfrak{M}' конечно.

Пусть $\Theta(\mathfrak{M})$ — система всех замкнутых подмножеств множества \mathfrak{M} . Подмножество θ , $\theta \subseteq \Theta(\mathfrak{M})$, называется критериальной системой (к. с.), если всякое множество \mathfrak{M}' , $\mathfrak{M}' \subseteq \mathfrak{M}$, является полным тогда и только тогда, когда для любого \mathfrak{M} из θ $\mathfrak{M}' \not\subseteq \mathfrak{M}$. Как известно, критериальной системой конечно порожденной ф. с. $\langle \mathfrak{M}, \Omega \rangle$, в которой $\Omega(\emptyset) = \mathfrak{M}$, является множество всех предполных классов данной ф. с.

Пусть Ω — заданный класс Поста [2, 3]. Рассмотрим ф. с. $\langle P_2, \tilde{\Omega} \rangle$, $\langle P_2, \hat{\Omega} \rangle$, $\langle P_{k, E_2}, \tilde{\Omega} \rangle$ и $\langle P_{k, E_2}, \hat{\Omega} \rangle$, где P_2 — все функции алгебры логики; P_{k, E_2} — все функции, определенные на декартовом произведении множества E_k и принимающие значение из E_2 ; $E_2 = \{0, 1\}$; $E_k = \{0, 1, \dots, k-1\}$, $k \geq 3$; $\tilde{\Omega}$ содержит операции g_+ , g_- , π_+ , π_- и все ω ; $\hat{\Omega} = \tilde{\Omega} \setminus \{\pi_-\}$; где g_+ — добавление конечного числа фиктивных переменных, g_- — изъятие конечного числа фиктивных переменных, π_+ — переименование без отождествления переменных, π_- — отождествленное переименование переменных, ω — такая операция, что существует такая функция f_ω из Ω , что для любого набора функций h_1, h_2, \dots, h_l из P_2 (или из P_{k, E_2})

$$\omega(h_1, h_2, \dots, h_l) = f_\omega(h_1, h_2, \dots, h_l), \quad l = 0, 1, \dots$$

Как известно [4], ф. с. $\langle P_{k, E_2}, \tilde{\Omega} \rangle$ (или $\langle P_{k, E_2}, \hat{\Omega} \rangle$, $\langle P_2, \tilde{\Omega} \rangle$, $\langle P_2, \hat{\Omega} \rangle$) конечно порождена тогда и только тогда, когда $\Omega \in \{C_i, A_i, D_j, F_s^\mu, F_s^\infty \mid i = 1, 2, 3, 4; j = 1, 2, 3; s = 1, \dots, 8; \mu = 2, 3, \dots\}$. В [5] найдены критерияльные системы всех конечно порожденных ф. с. $\langle P_2, \tilde{\Omega} \rangle$ и $\langle P_2, \hat{\Omega} \rangle$.

О понятии и обозначении ф. с. и классов Поста см. [1, 3].

§ 2. Гомоморфизм, кодирование и ограничение

Рассмотрим ф. с. $\langle P_{\{e_1, e_2\}, E_2}, \tilde{\Omega} \rangle$, где $P_{\{e_1, e_2\}, E_2}$ — все функции, определенные на декартовом произведении множества $\{e_1, e_2\}$ и принимающие значения из E_2 ; $e_1, e_2 \in E_k, e_1 \neq e_2$. Пусть Λ — отображение $P_{\{e_1, e_2\}, E_2}$ в P_2 . Назовем отображение Λ гомоморфизмом ф. с. $\langle P_{\{e_1, e_2\}, E_2}, \tilde{\Omega} \rangle$ в ф. с. $\langle P_2, \tilde{\Omega} \rangle$ [6], если для любой l -местной операции ω из $\tilde{\Omega}$, $\omega \notin \{g_+, g_-, \pi_+, \pi_-\}$, и произвольных функций f_1, f_2, \dots, f_l из $P_{\{e_1, e_2\}, E_2}$

$$\omega = (\Lambda(f_1), \Lambda(f_2), \dots, \Lambda(f_l)) = \Lambda(\omega(f_1, f_2, \dots, f_l)).$$

Пусть μ — отображение множества $\{e_1, e_2\}$ в E_2 : $\mu(e_1) = 0, \mu(e_2) = 1$; ψ — отображение $P_{\{e_1, e_2\}, E_2}$ в P_2 . Для любой n -местной функции f из $P_{\{e_1, e_2\}, E_2}$ и некоторой n -местной функции из P_2 говорят, что $\psi(f) = \varphi$, если для любого набора $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ из $\{e_1, e_2\}$

$$f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = \varphi(\mu(\alpha_1), \mu(\alpha_2), \dots, \mu(\alpha_n)).$$

Нетрудно видеть, что ψ является гомоморфизмом ф. с. $\langle P_{\{e_1, e_2\}, E_2}, \tilde{\Omega} \rangle$ в ф. с. $\langle P_2, \tilde{\Omega} \rangle$ (на основе отображения μ). Если $\psi(f) = \varphi$, то назовем φ образом функции f относительно ψ , f — прообразом функции φ относительно ψ . Обозначим через $\psi(\mathfrak{M})$ множество образов всех функций из \mathfrak{M} относительно ψ . Очевидно, что отображение ψ^{-1} на основе μ^{-1} также является гомоморфизмом ф. с. $\langle P_2, \tilde{\Omega} \rangle$ в ф. с. $\langle P_{\{e_1, e_2\}, E_2}, \tilde{\Omega} \rangle$, где $\mu^{-1}(0) = e_1, \mu^{-1}(1) = e_2$, т. е. ψ — изоморфизм между этими ф. с. В то же время ψ — изоморфизм между ф. с. $\langle P_2, \tilde{\Omega} \rangle$ и $\langle P_{\{e_1, e_2\}, E_2}, \tilde{\Omega} \rangle$.

Пусть $\tau = \lceil \log_2 k \rceil$, где $\lceil a \rceil$ — наименьшее целое число, не меньше a ; x_i^1 — переменные, принимающие значения из $E_k, i = 1, 2, \dots, n_1 < \infty$; x_j^2 — переменные, принимающие значения из $E_2, j = 1, 2, \dots, n_2 < \infty$; $\sigma = \{\sigma_i(x^1) \in E_2 \mid i = 1, 2, \dots, \tau\}$. Называем σ кодированием множества E_k в E_2 , если разным α из E_k соответствуют различные наборы $(\sigma_1(\alpha), \sigma_2(\alpha), \dots, \sigma_\tau(\alpha))$. Кодирование называется правильным, если существует множество $\{e_1, e_2 \mid e_1 \neq e_2\} \subseteq E_k$ такое, что для каждого $i (i = 1, 2, \dots, \tau)$ $\sigma_i(e_1) = 0, \sigma_i(e_2) = 1$.

Пусть $\varphi(x_1^2, x_2^2, \dots, x_{n_2}^2)$ — n_2 -местная функция из $P_2, n_2 = \tau n_1, \sigma$ — некоторое кодирование. Положим

$$\varphi(\sigma) = \varphi(\sigma_1(x_1^1), \dots, \sigma_\tau(x_1^1), \sigma_1(x_2^1), \dots, \sigma_\tau(x_2^1), \dots, \sigma_1(x_{n_1}^1), \dots, \sigma_\tau(x_{n_1}^1)).$$

Назовем $\varphi(\sigma)$ образом функции φ относительно σ , φ — прообразом функции $\varphi(\sigma)$ относительно σ . Если $\tau(n_1 - 1) < n_2 < \tau n_1$, то, дополнив функцию $\varphi(\tau n_1 - n_2)$ фиктивными переменными $x_{n_2+1}^2, x_{n_2+2}^2, \dots, x_{\tau n_1}^2$, получим функцию $\varphi' = g_+(\varphi)$. Тогда считаем $\varphi'(\sigma)$ образом функции φ относительно σ . Очевидно, что

$$\forall \varphi \in P_2 \exists f \in P_{k, E_2} (f = \varphi(\sigma)); \quad \forall f \in P_{k, E_2} \exists \varphi \in P_2 (\varphi(\sigma) = f),$$

где σ — любое заданное кодирование.

Через $\mathfrak{N}(\sigma)$ обозначим множество образов всех функций из \mathfrak{N} относительно σ .

Пусть $f(x_1^1, x_2^1, \dots, x_n^1) \in P_{k, E_2}$. Когда $x_i^1 (i = 1, \dots, n)$ принимают только значения из $\{e_1, e_2\}$, где $e_1, e_2 \in E_k, e_1 \neq e_2$, из функции f получаем

другую функцию, которую обозначим через $f|_{\{e_1, e_2\}}$. Назовем $f|_{\{e_1, e_2\}}$ *ограничением* функции f на $\{e_1, e_2\}$. Очевидно, что

$$\bigcup_{f \in P_{k, E_2}} \{f|_{\{e_1, e_2\}}\} = P_{\{e_1, e_2\}, E_2}.$$

Через $\mathfrak{M}|_{\{e_1, e_2\}}$ обозначим множество ограничений на $\{e_1, e_2\}$ всех функций из \mathfrak{M} .

Очевидно, что справедливо соотношение $\forall \varphi \in P_2 \exists f \in P_{k, E_2} (\varphi(f|_{\{e_1, e_2\}}) = \varphi)$.

§ 3. Вопросы полноты конечно порожденных ф. с. $\langle P_{k, E_2}, \tilde{\Omega} \rangle$

Пусть $\mathfrak{R} \subseteq P_2$. Обозначим \mathfrak{R} через A , если $\forall \varphi \in \mathfrak{R} (\varphi(x, x, \dots, x) = x)$; через B , если $\forall \varphi \in \mathfrak{R} (\varphi(x, x, \dots, x) = 1)$; через Γ , если $\forall \varphi \in \mathfrak{R} (\varphi(x, x, \dots, x) = 0)$; через Δ , если $\forall \varphi \in \mathfrak{R} (\varphi(x, x, \dots, x) = \bar{x})$.

Пусть $\mathfrak{M} \subseteq P_{k, E_2}$. Обозначим \mathfrak{M} через H_i , если $\forall f \in \mathfrak{M} (f(i, i, \dots, i) = 0)$; через I_i , если $\forall f \in \mathfrak{M} (f(i, i, \dots, i) = 1)$; через Π_{ij} , если $\forall f \in \mathfrak{M} (f(i, i, \dots, i) = f(j, j, \dots, j))$, где $i \neq j$; через P_{ij} , если $\forall f \in \mathfrak{M} ((f(i, i, \dots, i) \neq f(j, j, \dots, j)))$, где $i \neq j$; через Π'_{ij} , если $\forall f \in \mathfrak{M} ((f(i, i, \dots, i) = f(j, j, \dots, j)) \vee (f(i, i, \dots, i) = 0 \ \& \ f(j, j, \dots, j) = 1))$, где $i \neq j$; через P^+_{ij} , если $\forall f \in \mathfrak{M} ((f(i, i, \dots, i) \neq f(j, j, \dots, j)) \vee (f(i, i, \dots, i) = f(j, j, \dots, j) = 1))$, где $i \neq j$; через P^-_{ij} , если $\forall f \in \mathfrak{M} ((f(i, i, \dots, i) \neq f(j, j, \dots, j)) \vee (f(i, i, \dots, i) = f(j, j, \dots, j) = 0))$, где $i \neq j$.

Утверждение 3.1. 1) Все $H_i, I_i, \Pi_{ij}, P_{ij}, \Pi'_{ij}, P^+_{ij}, P^-_{ij} (i, j = 0, 1, \dots, k-1; i \neq j)$ замкнуты относительно g_+, g_-, π_+ и π_- .

2) Пусть σ — правильное кодирование E_k в E_2 , где $\sigma_i(e_1) = 0, \sigma_i(e_2) = 1, i = 1, 2, \dots, \tau$. Тогда

$$\begin{aligned} (A \cup \Gamma)(\sigma) &= H_{e_1}, & (\Delta \cup \Gamma)(\sigma) &= H_{e_2}, \\ (\Delta \cup B)(\sigma) &= I_{e_1}, & (A \cup B)(\sigma) &= I_{e_2}, \\ (B \cup \Gamma)(\sigma) &= \Pi_{e_1, e_2}, & (A \cup \Delta)(\sigma) &= P_{e_1, e_2}, \\ (A \cup B \cup \Gamma)(\sigma) &= \Pi'_{e_1, e_2}, & (\Delta \cup B \cup \Gamma)(\sigma) &= \Pi'_{e_2, e_1}, \\ (A \cup B \cup \Delta)(\sigma) &= P^+_{e_1, e_2}, & (A \cup \Gamma \cup \Delta)(\sigma) &= P^-_{e_1, e_2}. \end{aligned}$$

Утверждение 3.2. Пусть $\langle P_{k, E_2}, \tilde{\Omega} \rangle$ — конечно порожденная ф. с., \mathfrak{M} — множество всех одноместных функций из P_{k, E_2} . Тогда \mathfrak{M} является полной системой в ф. с. $\langle P_{k, E_2}, \tilde{\Omega} \rangle$.

Через $\Pi_k(\tilde{\Omega})$ и $\Pi'_k(\tilde{\Omega})$ обозначим множества всех предполных классов ф. с. $\langle P_2, \tilde{\Omega} \rangle$ и $\langle P_{k, E_2}, \tilde{\Omega} \rangle$ соответственно. Таким образом, доказано, что имеют место следующие утверждения.

Лемма 3.3. Пусть $\Omega \in \{C_i, A_i, D_j, F_s^2 | i = 1, 2, 3, 4; j = 1, 2, 3; s = 1, \dots, 8\}$. Тогда

$$\forall \mathfrak{M} \in \Pi'_k(\tilde{\Omega}) \exists e_1, e_2 \in E_k (\psi(\mathfrak{M}|_{\{e_1, e_2\}}) \in \Pi_k(\tilde{\Omega})).$$

Лемма 3.4. Пусть $\Omega \in \{F_s^\mu, F_s^\infty | s = 1, 2, 3, 4; \mu = 3, 4, \dots\}$. Тогда

$$\forall \mathfrak{M} \in \Pi'_k(\tilde{\Omega}) ((0 \in \mathfrak{M}) \rightarrow \exists e_1, e_2 \in E_k (\psi(\mathfrak{M}|_{\{e_1, e_2\}}) \in \Pi_k(\tilde{\Omega}))).$$

Лемма 3.5. Пусть $\Omega \in \{F_s^\mu, F_s^\infty | s = 5, 6, 7, 8; \mu = 3, 4, \dots\}$. Тогда

$$\forall \mathfrak{M} \in \Pi'_k(\tilde{\Omega}) ((I \in \mathfrak{M}) \rightarrow \exists e_1, e_2 \in E_k (\psi(\mathfrak{M}|_{\{e_1, e_2\}}) \in \Pi_k(\tilde{\Omega}))).$$

Лемма 3.6. Пусть $\Omega \in \{F_s^\mu, F_s^\infty | s = 1, 2, 3, 4; \mu = 3, 4, \dots\}$. Тогда $(P_{k, E_2} \setminus 0^- \in \Pi'_k(\tilde{\Omega})) \ \& \ (\forall \mathfrak{M} \subseteq P_{k, E_2}, \mathfrak{M} \neq P_{k, E_2} \setminus 0^-, 0 \notin \mathfrak{M} (\mathfrak{M} \notin \Pi'_k(\tilde{\Omega})))$,

где 0^- — множество всех функций из P_{k, E_2} , из которых путем операции π_- можно получить 0.

Лемма 3.7. Пусть $\Omega \in \{F_s^\mu, F_s^\infty \mid s=5, 6, 7, 8; \mu=3, 4, \dots\}$. Тогда имеет место

$$(P_{k, E_2} \setminus 0^+ \in \Pi'_k(\tilde{\Omega})) \ \& \ (\forall \mathfrak{M} \subseteq P_{k, E_2}, \mathfrak{M} \neq P_{k, E_2} \setminus 0^+, 1 \notin \mathfrak{M} (\mathfrak{M} \notin \Pi'_k(\tilde{\Omega}))),$$

где 0^+ — множество всех функций из P_{k, E_2} , из которых путем операции π_- можно получить 1.

Пусть σ — правильное кодирование. Тогда справедливы следующие утверждения.

Лемма 3.8. Пусть $\Omega \in \{C_i, A_i, D_j, F_s^2 \mid i=1, 2, 3, 4; j=1, 2, 3; s=1, \dots, 8\}$. Тогда

$$\forall \mathfrak{N} \in \Pi_k(\tilde{\Omega}) \ \forall \sigma (\mathfrak{N}(\sigma) \in \Pi'_k(\tilde{\Omega})).$$

Лемма 3.9. Пусть $\Omega \in \{F_s^\mu, F_s^\infty \mid s=1, 2, 3, 4; \mu=3, 4, \dots\}$. Тогда

$$\forall \mathfrak{N} \in \Pi_k(\tilde{\Omega}) \ \forall \sigma ((0 \in \mathfrak{N}) \rightarrow (\mathfrak{N}(\sigma) \in \Pi'_k(\tilde{\Omega}))).$$

Лемма 3.10. Пусть $\Omega \in \{F_s^\mu, F_s^\infty \mid s=5, 6, 7, 8; \mu=3, 4, \dots\}$. Тогда

$$\forall \mathfrak{N} \in \Pi_k(\tilde{\Omega}) \ \forall \sigma ((1 \in \mathfrak{N}) \rightarrow (\mathfrak{N}(\sigma) \in \Pi'_k(\tilde{\Omega}))).$$

Лемма 3.11. Пусть ф. с. $\langle P_{k, E_2}, \tilde{\Omega} \rangle$ конечно порожденная. Тогда

$$\forall \mathfrak{M} \in \Pi'_k(\tilde{\Omega}) (\psi(\mathfrak{M}|_{\{e_1, e_2\}}) \in \Pi_k(\tilde{\Omega}) \rightarrow \exists \sigma (\mathfrak{M} = (\psi(\mathfrak{M}|_{\{e_1, e_2\}})(\sigma))).$$

С учетом результатов [5], утверждения 3.1 и леммы 3.8 справедлива

Лемма 3.12. Пусть $e, e_1, e_2 \in E_k, e_1 \neq e_2$. Тогда

- 1) $\Pi_{e_1, e_2} \in \Pi'_k(\tilde{C}_1) \cap \Pi'_k(F_4^2) \cap \Pi'_k(F_8^2)$;
- 2) $I_e, \Pi_{e_1, e_2} \in \Pi'_k(\tilde{C}_2) \cap \Pi'_k(\tilde{F}_3^2)$;
- 3) $H_e, \Pi_{e_1, e_2} \in \Pi'_k(\tilde{C}_3) \cap \Pi'_k(\tilde{F}_1^2)$;
- 4) $H_e, I_e, \Pi_{e_1, e_2} \in \Pi'_k(\tilde{C}_4)$;
- 5) $\Pi'_{e_1, e_2} \in \Pi'_k(A_i) \cap \Pi'_k(\tilde{F}_j^2)$, где $i=1, 2, 3, 4; j=2, 3, 4$;
- 6) $\Pi_{e_1, e_2}, P_{e_1, e_2} \in \Pi'_k(\tilde{D}_3)$;
- 7) $H_e, I_e, \Pi_{e_1, e_2}, P_{e_1, e_2} \in \Pi'_k(\tilde{D}_1)$;
- 8) $\Pi'_{e_1, e_2}, P_{e_1, e_2}^+, P_{e_1, e_2}^- \in \Pi'_k(\tilde{D}_2)$;
- 9) $P_{e_1, e_2}^+ \in \Pi'_k(\tilde{F}_i^2)$, где $i=1, 2, 3, 4$;
- 10) $P_{e_1, e_2}^- \in \Pi'_k(\tilde{F}_i^2)$, где $i=5, 6, 7, 8$.

С учетом результатов [5], утверждения 3.1, лемм 3.6—3.7, 3.9—3.10 справедлива

Лемма 3.13. Пусть $e, e_1, e_2 \in E_k, e_1 \neq e_2, \mu=3, 4, \dots$. Тогда

- 1) $H_e, \Pi_{e_1, e_2} \in \Pi'_k(\tilde{F}_1^\mu) \cap \Pi'_k(\tilde{F}_1^\infty)$;
- 2) $\Pi_{e_1, e_2} \in \Pi'_k(\tilde{F}_i^\mu) \cap \Pi'_k(\tilde{F}_j^\infty)$, где $i, j=4, 8$;
- 3) $I_e, \Pi_{e_1, e_2} \in \Pi'_k(\tilde{F}_5^\mu) \cap \Pi'_k(F_5^\infty)$;
- 4) $\Pi'_{e_1, e_2} \in \Pi'_k(\tilde{F}_i^\mu) \cap \Pi'_k(\tilde{F}_j^\infty)$, где $i, j=2, 3, 6, 7$;
- 5) $P_{k, E_2} \setminus 0^- \in \Pi'_k(\tilde{F}_i^\mu) \cap \Pi'_k(\tilde{F}_j^\infty)$, где $i, j=1, 2, 3, 4$;
- 6) $P_{k, E_2} \setminus 0^+ \in \Pi'_k(\tilde{F}_i^\mu) \cap \Pi'_k(\tilde{F}_j^\infty)$, где $i, j=5, 6, 7, 8$.

Согласно леммам 3.3—3.7, 3.11 кроме вышеуказанных классов никаких других предполных классов в ф. с. $\langle P_{k, E_2}, \tilde{\Omega} \rangle$ нет, т. е. имеет место

Теорема 3.14. Пусть $\Omega \in \{C_i, A_i, D_j, F_s^2, F_s^\mu, F_s^\infty \mid i=1, 2, 3, 4; j=1, 2, 3; s=1, \dots, 8; \mu=3, 4, \dots\}$. Тогда критериальная система в ф. с. $\langle P_{k, E_2}, \tilde{\Omega} \rangle$ состоит из всех множеств в таблице 1, лежащих на таких строчках, где есть знак « \circ », соответствующий классу Ω .

Таблица I

	C_1	C_2	C_3	C_4	A_1, A_2 A_3, A_4	D_3	D_1	D_2	F_1^2	E_2^2 F_3^2
H_e			○	○			○		○	
I_e		○		○			○			
Π_{e_1, e_2}	○	○	○	○		○	○		○	
P_{e_1, e_2}						○	○			
Π'_{e_1, e_2}					○			○		○
P_{e_1, e_2}^+								○	○	○
P_{e_1, e_2}^-								○		
$P_{k, E_2} \setminus 0^-$										
$P_{k, E_2} \setminus 0^+$										
	F_4^2	F_5^2	F_6^2 F_7^2	F_8^2	F_1^{μ} F_1^{∞}	$F_{2,3}^{\mu}$ $F_{2,3}^{\infty}$	F_4^{μ} F_4^{∞}	F_5^{μ} F_5^{∞}	$F_{6,7}^{\mu}$ $F_{6,7}^{\infty}$	F_8^{μ} F_8^{∞}
H_e					○					
I_e		○						○		
Π_{e_1, e_2}	○	○		○	○		○	○		○
P_{e_1, e_2}										
Π'_{e_1, e_2}			○			○			○	
P_{e_1, e_2}^+	○									
P_{e_1, e_2}^-		○	○	○						
$P_{k, E_2} \setminus 0^-$					○	○	○			
$P_{k, E_2} \setminus 0^+$								○	○	○

§ 4. Вопросы полноты конечно порожденных ф. с. $\langle P_{k, E_2}, \hat{\Omega} \rangle$

Пусть $\tilde{a} = (a_1, \dots, a_n)$ — набор значений переменных функции из P_2 . Обозначим $|\tilde{a}|_1 = \sum_{i=1}^n a_i$, $|\tilde{a}|_0 = \sum_{i=1}^n \bar{a}_i$. Пусть I^2 — множество всех таких функций из P_2 , которые удовлетворяют условию: для любых двух наборов \tilde{a} и \tilde{b} таких, что $|\tilde{a}|_1 < 2$, $|\tilde{b}|_1 < 2$, выполнено равенство $f(\tilde{a}) = f(\tilde{b})$. Обозначим через O^2 множество всех таких функций из P_2 , которые удовлетворяют условию: для любых двух наборов \tilde{a} и \tilde{b} таких, что $|\tilde{a}|_0 < 2$ и $|\tilde{b}|_0 < 2$, выполнено равенство $f(\tilde{a}) = f(\tilde{b})$.

Обозначим через \tilde{a}_e такой набор значений переменных функции из P_{k, E_2} , который состоит только из e , $e \in E_k$. Обозначим через \tilde{a}_{e, e_j} любой набор, который состоит только из e и только одного e_j^1 ($e, e_j \in E_k, e \neq e_j$).

Пусть $\tau =] \log_2 k [, J = \{1, 2, \dots, t\}, \{e_1, e_2, \dots, e_t\} \subseteq E_k, e \in E_k, e \notin \{e_1, e_2, \dots, e_t\}$. Назовем J рациональным, если $t = \tau$.

Пусть $\mathfrak{M} \subseteq P_{k, E_2}$. Обозначим \mathfrak{M} через $F_{e, J}$, если

$$\forall f \in \mathfrak{M} \forall j \in J (f(\tilde{a}_e) = f(\tilde{a}_{e, j})).$$

Называем σ кодированием 1-типа на основе e и J , если существуют e и рациональное J такие, что 1) $\sigma_i(e) = 0, i = 1, \dots, \tau$; 2) $j \in J$ тогда и только тогда, когда $\sigma_i(e_j) = \begin{cases} 1 & \text{при } i = j, \\ 0 & \text{при } i \neq j. \end{cases}$

Называем σ кодированием 0-типа на основе e и J , если существуют e и рациональное J такие, что: 1) $\sigma_i(e) = 1, i = 1, \dots, \tau$; 2) $j \in J$ тогда и только тогда, когда $\sigma_i(e_j) = \begin{cases} 1 & \text{при } i \neq j, \\ 0 & \text{при } i = j. \end{cases}$

Утверждение 4.1. 1) Множества $F_{e, J}$ замкнуты относительно операций g_+, g_-, π_+ .

2) Пусть σ — кодирование 1-типа на основе e и J . Тогда

$$\begin{aligned} I^2(\sigma) &= F_{e, J}; (A \cup \Gamma \cup I^2)(\sigma) = H_e \cup F_{e, J}; \\ (\Delta \cup B \cup I^2)(\sigma) &= I_e \cup F_{e, J}. \end{aligned}$$

3) Пусть σ — кодирование 0-типа на основе e и J . Тогда

$$\begin{aligned} 0^2(\sigma) &= F_{e, J}; (\Delta \cup \Gamma \cup 0^2)(\sigma) = H_e \cup F_{e, J}; \\ (A \cup B \cup 0^2)(\sigma) &= I_e \cup F_{e, J}. \end{aligned}$$

Через $\Pi_k(\hat{\Omega})$ и $\Pi'_k(\hat{\Omega})$ обозначим множества всех предполных классов ф. с. $\langle P_2, \hat{\Omega} \rangle$ и $\langle P_{k, E_2}, \hat{\Omega} \rangle$ соответственно. Через $\Pi_k^1(\hat{\Omega})$ и $\Pi_k^{1'}(\hat{\Omega})$ обозначим множества всех предполных классов ф. с. $\langle P_2, \hat{\Omega} \rangle$ и $\langle P_{k, E_2}, \hat{\Omega} \rangle$, замкнутых относительно операции π_- , соответственно. Через $\Pi_k^2(\hat{\Omega})$ и $\Pi_k^{2'}(\hat{\Omega})$ обозначим множества всех предполных классов ф. с. $\langle P_2, \hat{\Omega} \rangle$ и $\langle P_{k, E_2}, \hat{\Omega} \rangle$, не замкнутых относительно π_- , соответственно. Очевидно, что

$$\Pi_k(\hat{\Omega}) = \Pi_k^1(\hat{\Omega}) \cup \Pi_k^2(\hat{\Omega}), \quad \Pi'_k(\hat{\Omega}) = \Pi_k^{1'}(\hat{\Omega}) \cup \Pi_k^{2'}(\hat{\Omega}).$$

Соотношение между $\Pi_k(\hat{\Omega})$ и $\Pi'_k(\hat{\Omega})$ похоже на соотношение между $\Pi_k(\tilde{\Omega})$ и $\Pi'_k(\tilde{\Omega})$, т. е. справедливы следующие утверждения.

Лемма 4.2. Пусть $\Omega \in \{C_i, A_i, D_j, F_s^2 \mid i = 1, 2, 3, 4; j = 1, 2, 3; s = 1, \dots, 8\}$. Тогда

$$\forall \mathfrak{M} \in \Pi'_k(\hat{\Omega}) \exists e_1, e_2 \in E_k (\psi(\mathfrak{M}|_{\{e_1, e_2\}}) \in \Pi_k(\hat{\Omega})).$$

Лемма 4.3. Пусть $\Omega \in \{F_s^\mu, F_s^\infty \mid s = 1, 2, 3, 4; \mu = 3, 4, \dots\}$. Тогда

$$\forall \mathfrak{M} \in \Pi'_k(\hat{\Omega}) ((0 \in \mathfrak{M}) \rightarrow \exists e_1, e_2 \in E_k (\psi(\mathfrak{M}|_{\{e_1, e_2\}}) \in \Pi_k(\hat{\Omega}))).$$

Лемма 4.4. Пусть $\Omega \in \{F_s^\mu, F_s^\infty \mid s = 5, 6, 7, 8; \mu = 3, 4, \dots\}$. Тогда $\forall \mathfrak{M} \in \Pi'_k(\hat{\Omega}) ((I \in \mathfrak{M}) \rightarrow \exists e_1, e_2 \in E_k (\psi(\mathfrak{M}|_{\{e_1, e_2\}}) \in \Pi_k(\hat{\Omega})))$.

В следующих 4 леммах σ будет правильным кодированием.

Лемма 4.5. Пусть $\Omega \in \{C_i, A_i, D_j, F_s^2 \mid i = 1, 2, 3, 4; j = 1, 2, 3; s = 1, \dots, 8\}$. Тогда

$$\forall \mathfrak{M} \in \Pi_k^1(\hat{\Omega}) \forall \sigma (\mathfrak{M}(\sigma) \in \Pi_k^{1'}(\hat{\Omega})).$$

Лемма 4.6. Пусть $\Omega \in \{F_s^\mu, F_s^\infty \mid s = 1, 2, 3, 4; \mu = 3, 4, \dots\}$. Тогда

$$\forall \mathfrak{M} \in \Pi_k^1(\hat{\Omega}) \forall \sigma ((0 \in \mathfrak{M}) \rightarrow (\mathfrak{M}(\sigma) \in \Pi_k^{1'}(\hat{\Omega}))).$$

Лемма 4.7. Пусть $\Omega \in \{F_s^\mu, F_s^\infty \mid s = 5, 6, 7, 8; \mu = 3, 4, \dots\}$. Тогда

$$\forall \mathfrak{M} \in \Pi_k^1(\hat{\Omega}) \forall \sigma ((I \in \mathfrak{M}) \rightarrow (\mathfrak{M}(\sigma) \in \Pi_k^{1'}(\hat{\Omega}))).$$

Лемма 4.8. Пусть ф.с. $\langle P_{k, E_2}, \hat{\Omega} \rangle$ конечно порожденная. Тогда

$$\forall \mathfrak{M} \in \Pi_k'(\hat{\Omega}) (\psi(\mathfrak{M}|_{\{e_1, e_2\}}) \in \Pi_k(\hat{\Omega}) \rightarrow \exists \sigma (\mathfrak{M} = (\psi(\mathfrak{M}|_{\{e_1, e_2\}})(\sigma))).$$

Теперь рассмотрим $\Pi_k'(\hat{\Omega})$. Пусть $0_3'$ — множество всех функций из P_{k, E_2} , равных 0; $0_2'$ — множество всех функций из P_{k, E_2} , равных 1.

Лемма 4.9. Пусть $\Omega \in \{F_s^\mu, F_s^\infty \mid s=1, 2, 3, 4; \mu=3, 4, \dots\}$. Тогда $P_{k, E_2} \setminus 0_3'$ является единственным предполным классом ф.с. $\langle P_{k, E_2}, \hat{\Omega} \rangle$, не содержащим константу 0.

Лемма 4.10. Пусть $\Omega \in \{F_s^\mu, F_s^\infty \mid s=5, 6, 7, 8; \mu=3, 4, \dots\}$. Тогда $P_{k, E_2} \setminus 0_2'$ является единственным предполным классом ф.с. $\langle P_{k, E_2}, \hat{\Omega} \rangle$, не содержащим константу 1.

Лемма 4.11. Пусть $\Omega \in \{C_i, D_j, F_s^\mu, F_s^\infty \mid i=1, 2, 3, 4; j=1, 3; s=1, 4, 5, 8, \mu=2, 3, \dots\}$, σ — любое кодирование 1-типа на основе e и J . Тогда

$$I^2(\sigma) = F_{e, J} \in \Pi_k'(\hat{\Omega}).$$

Лемма 4.12. Пусть $\Omega \in \{C_i, D_j, F_s^\mu, F_s^\infty \mid i=1, 2, 3, 4; j=1, 3; s=1, 4, 5, 8; \mu=2, 3, \dots\}$. σ — любое кодирование 0-типа на основе e и J . Тогда

$$0^2(\sigma) = F_{e, J} \in \Pi_k'(\hat{\Omega}).$$

Лемма 4.13. Пусть $\Omega \in \{A_i, D_2, F_s^\mu, F_s^\infty \mid i=1, 2, 3, 4; s=2, 3, 6, 7; \mu=2, 3, \dots\}$; σ — любое кодирование 1-типа на основе e и J . Тогда

$$(A \cup \Gamma \cup I^2)(\sigma) = H_e \cup F_{e, J} \in \Pi_k'(\hat{\Omega}),$$

$$(\Delta \cup B \cup I^2)(\sigma) = I_e \cup F_{e, J} \in \Pi_k'(\hat{\Omega}).$$

Лемма 4.14. Пусть $\Omega \in \{A_i, D_i, F_s^\mu, F_s^\infty \mid i=1, 2, 3, 4; s=2, 3, 6, 7; \mu=2, 3, \dots\}$; σ — любое кодирование 0-типа на основе e и J . Тогда

$$(\Delta \cup \Gamma \cup 0^2)(\sigma) = H_e \cup F_{e, J} \in \Pi_k'(\hat{\Omega}),$$

$$(A \cup B \cup 0^2)(\sigma) = I_e \cup F_{e, J} \in \Pi_k'(\hat{\Omega}).$$

Лемма 4.15. Пусть $\mathfrak{M} \in \Pi_k'(\hat{\Omega})$, $\mathfrak{R} = \psi(\mathfrak{M}|_{\{e, e_j\}}) \in \{I^2, A \cup \Gamma \cup I^2, \Delta \cup B \cup I^2\}$. Тогда существует кодирование σ 1-типа на основе e и J такое, что $\mathfrak{M} = \mathfrak{R}(\sigma)$, где $j \in J$.

Лемма 4.16. Пусть $\mathfrak{M} \in \Pi_k'(\hat{\Omega})$, $\mathfrak{R} = \psi(\mathfrak{M}|_{\{e, e_j\}}) \in \{0^2, A \cup B \cup 0^2, \Delta \cup \Gamma \cup 0^2\}$. Тогда существует кодирование σ 0-типа на основе e и J такое, что $\mathfrak{M} = \mathfrak{R}(\sigma)$, где $j \in J$.

С учетом результатов [5], утверждений 3.1, 4.1 и лемм 4.5—4.7, 4.9—4.14 справедлива

Лемма 4.17. Пусть $e, e_1, e_2 \in E_k$, $e_1 \neq e_2$, J рационально, $e \neq e_j$, $j \in J$. Тогда:

- 1) $\Pi_{e_1, e_2}, F_{e, J} \in \Pi_k'(\hat{C}_1) \cap \Pi_k'(\hat{F}_i^\mu) \cap \Pi_k'(\hat{F}_j^\infty)$, где $i, j=4, 8; \mu=2, 3, 4, \dots$;
- 2) $I_e, \Pi_{e_1, e_2}, F_{e, J} \in \Pi_k'(\hat{C}_2) \cap \Pi_k'(\hat{F}_5^\mu) \cap \Pi_k'(\hat{F}_5^\infty)$, где $\mu=2, 3, 4, \dots$;
- 3) $H_e, \Pi_{e_1, e_2}, F_{e, J} \in \Pi_k'(\hat{C}_3) \cap \Pi_k'(\hat{F}_1^\mu) \cap \Pi_k'(\hat{F}_1^\infty)$, где $\mu=2, 3, 4, \dots$;
- 4) $H_e, I_e, \Pi_{e_1, e_2}, F_{e, J} \in \Pi_k'(\hat{C}_4)$;
- 5) $\Pi_{e_1, e_2}, H_e \cup F_{e, J}, I_e \cup F_{e, J} \in \Pi_k'(\hat{A}_i) \cap \Pi_k'(\hat{F}_j^\mu) \cap \Pi_k'(\hat{F}_h^\infty)$, где $i=1, 2, 3, 4; j, h=2, 3, 6, 7; \mu=2, 3, 4, \dots$;
- 6) $\Pi_{e_1, e_2}, P_{e_1, e_2}, F_{e, J} \in \Pi_k'(\hat{D}_3)$;
- 7) $H_e, I_e, \Pi_{e_1, e_2}, P_{e_1, e_2}, F_{e, J} \in \Pi_k'(\hat{D}_1)$;
- 8) $\Pi_{e_1, e_2}, P_{e_1, e_2}^+, P_{e_1, e_2}^-, H_e \cup F_{e, J}, I_e \cup F_{e, J} \in \Pi_k'(\hat{D}_2)$;

Таблица 2

	C_1	C_2	C_3	C_4	A_1, A_2 A_3, A_4	D_3	D_1	D_2	F_1^2	F_2^2 F_3^2
H_e			○	○			○		○	
I_e		○		○			○			
Π_{e_1, e_2}	○	○	○	○		○	○		○	
P_{e_1, e_2}						○	○			
Π_{e_1, e_2}					○			○		○
P_{e_1, e_2}^+								○	○	○
P_{e_1, e_2}^-								○		
$F_{e, J}$	○	○	○	○		○	○		○	
$H_e \cup F_{e, J}$					○			○		○
$I_e \cup F_{e, J}$					○			○		○
$P_{k, E_2} \setminus 0'_3$										
$P_{k, E_2} \setminus 0'_2$										
	F_4^2	F_5^2	F_6^2 F_7^2	F_8^2	F_1^μ F_1^∞	$F_{2,3}^\mu$ $F_{2,3}^\infty$	F_4^μ F_4^∞	F_5^μ F_5^∞	$F_{6,7}^\mu$ $F_{6,7}^\infty$	F_8^μ F_8^∞
H_e					○					
I_e		○						○		
Π_{e_1, e_2}	○	○		○	○		○	○		○
P_{e_1, e_2}										
Π_{e_1, e_2}			○			○			○	
P_{e_1, e_2}^+	○									
P_{e_1, e_2}^-		○	○	○						
$F_{e, J}$	○	○		○	○		○	○		○
$H_e \cup F_{e, J}$			○			○			○	
$I_e \cup F_{e, J}$			○			○			○	
$P_{k, E_2} \setminus 0'_3$					○	○	○			
$P_{k, E_2} \setminus 0'_2$								○	○	○

- 9) $P_{e_1, e_2}^+ \in \Pi'_k(\hat{F}_i^2)$, где $i=1, 2, 3, 4$;
- 10) $P_{e_1, e_2}^- \in \Pi'_k(\hat{F}_i^2)$, где $i=5, 6, 7, 8$;
- 11) $P_{k, E_2} \setminus 0'_3 \in \Pi'_k(\hat{F}_i^\mu) \cap \Pi'_k(\hat{F}_j^\infty)$, где $i, j=1, 2, 3, 4$; $\mu=3, 4, \dots$;
- 12) $P_{k, E_2} \setminus 0'_2 \in \Pi'_k(\hat{F}_i^\mu) \cap \Pi'_k(\hat{F}_j^\infty)$, где $i, j=5, 6, 7, 8$; $\mu=3, 4, \dots$

Согласно леммам 4.2—4.4, 4.8—4.10, 4.15—4.16 кроме вышеуказанных классов никаких других предполных классов в ф. с. $\langle P_{k, E_2}, \hat{\Omega} \rangle$ нет, т. е. имеет место

Теорема 4.18. Пусть $\Omega \in \{C_i, A_i, D_j, F_s^2, F_s^\mu, F_s^\infty \mid i=1, 2, 3, 4; j=1, 2, 3; s=1, \dots, 8; \mu=3, 4, \dots\}$. Тогда критериальная система в ф.с. $\langle P_k, E_2, \hat{\Omega} \rangle$ состоит из всех множеств в таблице 2, лежащих на таких строчках, где есть знак «о», соответствующий классу Ω .

Автор выражает свою глубокую признательность В. Б. Кудрявцеву за научную помощь и руководство.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кудрявцев В. Б. Функциональные системы.— М.: Изд-во МГУ, 1982.
2. Post E. Two-valued iterative systems of mathematical logic.— Princeton, 1941.
3. Яблонский С. В., Гаврилов Г. П., Кудрявцев В. Б. Функции алгебры логики и классы Поста.— М.: Наука, 1966.
4. Доу Ж. Конечно порожденность функциональных систем типа алгебр Поста // Методы и системы технической диагностики.— Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1988.
5. Доу Ж. Вопросы полноты конечно порожденных ф.с. $\langle P_2, \hat{\Omega} \rangle$ и $\langle P_2, \hat{\Omega} \rangle$ // Комбинаторно-алгебраические методы в прикладной математике.— Горький: Изд-во Горьковского ун-та, 1989.
6. Кон П. Универсальная алгебра.— М.: Мир, 1968.
7. Яблонский С. В. Введение в дискретную математику.— М.: Наука, 1986.

Статья поступила 22.12.89