

Общероссийский математический портал

О. Н. Гадомский, Т. Т. Идиатуллов, Атом парапозитрония в поле аннигиляционных и оптических фотонов как нелинейная квантовая система, *ТМФ*, 2000, том 124, номер 1, 148–168

DOI: 10.4213/tmf631

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.14.86

16 марта 2025 г., 22:52:53



АТОМ ПАРАПОЗИТРОНИЯ В ПОЛЕ АННИГИЛЯЦИОННЫХ И ОПТИЧЕСКИХ ФОТОНОВ КАК НЕЛИНЕЙНАЯ КВАНТОВАЯ СИСТЕМА

Рассматривается атом парапозитрония в поле оптического лазера без теории возмущений на основе замкнутой системы гейзенберговских уравнений для атомных и фотонных операторов, а также аннигиляция атома парапозитрония из одного либо двух квантовых состояний, между которыми возбуждаются оптические квантовые переходы под действием одного либо двух оптических фотонов. Выведена система двух нелинейных уравнений для средних чисел заполнения рассматриваемых состояний. Исследованы стационарное и нестационарное частные решения этих уравнений и отмечена значительная роль обратного влияния аннигиляционных фотонов на процесс аннигиляции. Показано, что при определенных условиях облучения оптического лазера возможно долгоживущее состояние атома парапозитрония с временем жизни, в сотни раз большим времени жизни свободного атома парапозитрония в $1s$ -состоянии.

1. ВВЕДЕНИЕ

Атом позитрония (Ps) составлен из двух дираковских частиц и поэтому является идеальной водородоподобной системой для осуществления прецизионных оптических и радиоизмерений с использованием методов квантовой электродинамики [1, 2]. Более того, система атомов Ps может быть рассмотрена как материал для создания аннигиляционного гамма-лазера [3–7]. В связи с этим можно выделить целое направление исследований – квантовую позитронику. Значительное место в ней отводится процессам целенаправленного управления кинетическими и спектроскопическими свойствами атома Ps , например с помощью оптического лазера.

Известно также, что время жизни атомов Ps существенно увеличивается с увеличением главного квантового числа [8], поэтому в ряде работ [2, 4, 9] было предложено использовать оптическую накачку для изменения населенности состояний атома Ps , которые образуются в веществе преимущественно в $1s$ -состояниях [1]. В связи с этим возникает принципиальная необходимость в теоретическом и экспериментальном исследованиях квантово-электродинамического взаимодействия атомов Ps с полем собственных и

*Ульяновский государственный университет, Ульяновск, Россия. E-mail: ged_group@mail.ru

внешних оптических и жестких фотонов. Решению этой проблемы для атомов парапозитрония (p-Ps) были посвящены работы [10–12]. В работе [10] рассмотрена без теории возмущений двухфотонная аннигиляция атома p-Ps в $1s$ -состоянии в поле собственных аннигиляционных фотонов на основе совместной системы гейзенберговских уравнений движения для фотонных и атомных операторов. Была получена формула для времени жизни $\tau_{2\gamma}$ атома p-Ps, которое отличается от времени жизни $\tau_{2\gamma}^{(0)}$ свободного атома p-Ps. В работе [10] исследовано также изменение энергии атома p-Ps, обусловленное радиационным взаимодействием атома с собственным полем аннигиляционных фотонов и зависящее от времени жизни $\tau_{2\gamma}$. В работе [11] получена совместная система уравнений для атомных и фотонных операторов при однофотонном возбуждении какого-либо квантового перехода в спектре атома Ps. На основе полученного в [11] решения для чисел заполнения атомных состояний был сделан вывод о возможности существенного изменения кинетики аннигиляционного распада за счет обратного влияния фотонов. При этом были отброшены нелинейные члены в уравнениях движения для чисел заполнения n_1 и n_2 каких-либо двух состояний атома p-Ps при учете того, что величины n_1 и n_2 изменяются в пределах $(1, -1)$ и их произведение дает меньший вклад по сравнению с линейными по n_1 и n_2 членами.

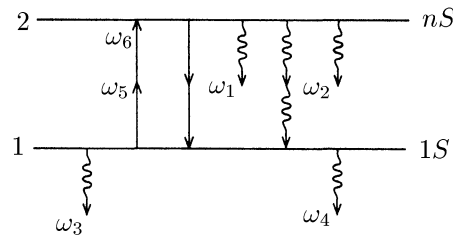


Рис. 1

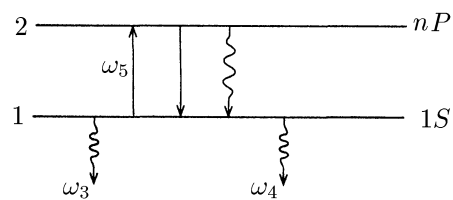


Рис. 2

В данной работе будут учтены нелинейные по n_1 и n_2 члены в уравнениях движения и показано, что их роль в кинетике аннигиляционного распада при определенных условиях является значительной. Более того, в отличие от статьи [11], будут учтены двухфотонные оптические переходы, которые переводят атом p-Ps в квантовое состояние, не запрещенное по отношению к двухфотонной аннигиляции (рис. 1 и 2, где изображены схемы квантовых переходов в атоме p-Ps с участием оптических и аннигиляционных фотонов, волнистые стрелки обозначают спонтанные и аннигиляционные процессы

с излучением оптических и гамма-фотонов, прямые стрелки соответствуют вынужденным оптическим переходам). Рассмотрение ведется на основе замкнутой системы гейзенберговских уравнений для атомных и фотонных операторов без привлечения теории возмущений. Получены два частных решения, стационарное и нестационарное, на основе которых сделан вывод о возможности получения долгоживущего состояния атома p -Ps в поле оптического лазера со временем жизни, в сотни раз большим временем жизни свободного атома p -Ps. Проблеме стабилизации атома Ps с помощью оптического излучения посвящена также теоретическая статья [13], где показано, что при определенных условиях время жизни атома p -Ps может быть увеличено приблизительно в два раза. Этот результат соответствует отсутствию обратного влияния аннигиляционных фотонов на процесс аннигиляции.

В работе [13] взаимодействие атома Ps с полем оптических фотонов рассмотрено на основе двухуровневого приближения, применяемого в нелинейной резонансной оптике [14]. При этом аннигиляция атома учтена путем введения экспоненциальных факторов. В работах [15, 16] на основе пертурбативного метода вычисляются релятивистские поправки к временам жизни атомов орто- и парапозитрония, находящихся в $1s$ - и $2p$ -состояниях. При этом учитываются релятивистские поправки к волновым функциям атома Ps с точностью до $\alpha^3 \ln^2(1/\alpha)$, где α – постоянная тонкой структуры. В работах Никишова и Ритуса [17] разработан метод, основанный на точном учете взаимодействия релятивистского электрона с полем сильной электромагнитной волны с помощью решения уравнения Дирака, найденного Волковым [17]. При этом, однако, взаимодействие электрона с новыми испускаемыми фотонами рассматривается как малое возмущение. В данной статье разработана непertурбативная теория атома p -Ps, в которой взаимодействие с полем аннигиляционных и оптических фотонов рассматривается без какого-либо ограничения по степеням постоянных взаимодействия. Атом p -Ps в нашем рассмотрении не является двухуровневой системой, как это предполагается в работе [13]. На основе разработанной в данной статье теории удастся не только вычислить спектроскопические величины (смещение энергии, время фазовой релаксации, время жизни) атома p -Ps, но также исследовать кинетику аннигиляционного распада с учетом переходных и стационарных процессов.

2. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ДЛЯ ФОТОННЫХ И АТОМНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Рассмотрим в атоме Ps какие-либо два (1 и 2) состояния, например состояния $1s$ и ns (n – главное квантовое число), между которыми разрешены двухфотонные оптические переходы (рис. 1). При этом разрешены также и двухфотонные процессы аннигиляции атома p -Ps из состояний 1 и 2. Такая ситуация является более общей, чем та, которая была рассмотрена ранее в статье [11] при однофотонном возбуждении в атоме p -Ps некоторого состояния 2, запрещенного по отношению к двухфотонной аннигиляции (рис. 2).

Эффективный гамильтониан электрон-позитронной системы в поле аннигиляцион-

ных и оптических фотонов запишем следующим образом:

$$\begin{aligned}
 H = & \sum_{\alpha=1}^2 \hbar\omega_{\alpha}^{(+)} \hat{a}_{\alpha}^{\dagger} \hat{a}_{\alpha} + \sum_{\alpha=1}^2 \hbar\omega_{\alpha}^{(-)} \hat{b}_{\alpha}^{\dagger} \hat{b}_{\alpha} + \sum_{\mu=1}^6 \hbar\omega_{\mu} c_{\mu}^{\dagger} c_{\mu} + \sum_{\alpha=1}^2 U_{\alpha} \hat{b}_{\alpha}^{\dagger} \hat{a}_{\alpha}^{\dagger} \hat{a}_{\alpha} \hat{b}_{\alpha} + \\
 & + G \hat{b}_2^{\dagger} \hat{a}_2^{\dagger} \hat{a}_1 \hat{b}_1 c_5 c_6 + G^* \hat{b}_1^{\dagger} \hat{a}_1^{\dagger} \hat{a}_2 \hat{b}_2 c_5^{\dagger} c_6^{\dagger} + S_2 c_1^{\dagger} c_2^{\dagger} \hat{a}_2 \hat{b}_2 + S_2^* \hat{b}_2^{\dagger} \hat{a}_2^{\dagger} c_1 c_2 + \\
 & + S_1 c_3^{\dagger} c_4^{\dagger} \hat{a}_1 \hat{b}_1 + S_1^* \hat{b}_1^{\dagger} \hat{a}_1^{\dagger} c_3 c_4, \tag{2.1}
 \end{aligned}$$

где $\hbar\omega_1^{(\pm)} > 0$, $\hbar\omega_2^{(\pm)} > 0$ – энергии электрона (позитрона) в состояниях 1 и 2 атома Ps, c_5 , c_6 и c_5^{\dagger} , c_6^{\dagger} – операторы уничтожения и рождения оптических фотонов, $\hbar\omega_{\mu}$ – энергии фотонов мод 1, 2, 3, 4, 5, 6, соответствующие аннигиляционным и оптическим фотонам. Энергии электрона и позитрона в атоме Ps вычислены в работе [12], где атом Ps рассмотрен как двухчастичная система с кулоновским взаимодействием электрона и позитрона. Величины U_1 и U_2 в гамильтониане (2.1) определяют релятивистскую энергию взаимодействия электрона и позитрона в атоме p-Ps в состояниях 1 и 2 как эффект второго порядка квантовой электродинамики. Величины S_1 и S_2 характеризуют вероятности $W_{2\gamma}(1)$ и $W_{2\gamma}(2)$ свободного двухфотонного распада атома p-Ps в состояниях 1 и 2 соответственно. Эти вероятности рассматриваются как эффекты 2-го порядка квантовой электродинамики [18], и, как будет показано ниже, вероятности свободного аннигиляционного распада будут отличаться от вероятностей $W_{2\gamma}^{(0)}(1)$ и $W_{2\gamma}^{(0)}(2)$ аннигиляционного распада атома p-Ps в состояниях 1 и 2 при учете обратного влияния аннигиляционных фотонов. Величины G и G^* определяют вероятности в единицу времени спонтанного либо вынужденного излучения оптических фотонов при квантовых переходах $1 \Leftrightarrow 2$ в атоме p-Ps. Ниже величины S_1 , S_2 и G будут определены в явном виде. Суммирование по различным частотам и направлениям вылета фотонов будет проведено в конечных формулах.

Применим бозонные и фермионные соотношения коммутации для фотонных и электрон-позитронных операторов [18], взятых в одинаковые моменты времени, для вывода гейзенберговских операторных уравнений. После необходимых вычислений получим следующие уравнения для фотонных операторов:

$$\begin{aligned}
 \dot{c}_1 = & -i\omega_1 c_1 + \frac{i}{\hbar} S_2 c_2^{\dagger} P_2, & \dot{c}_2 = & -i\omega_2 c_2 + \frac{i}{\hbar} S_2 c_1^{\dagger} P_2, \\
 \dot{c}_3 = & -i\omega_3 c_3 + \frac{i}{\hbar} S_1 c_4^{\dagger} P_1, & \dot{c}_4 = & -i\omega_4 c_4 + \frac{i}{\hbar} S_1 c_3^{\dagger} P_1, \\
 \dot{c}_5 = & -i\omega_5 c_5 + \frac{i}{\hbar} G^* P_1^{\dagger} P_2 c_6^{\dagger}, & \dot{c}_6 = & -i\omega_6 c_6 + \frac{i}{\hbar} G^* P_1^{\dagger} P_2 c_5^{\dagger},
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

где $P_1 = \hat{a}_1 \hat{b}_1$, $P_2 = \hat{a}_2 \hat{b}_2$ – атомные операторы состояний 1 и 2 атома Ps. Эти уравнения необходимо дополнить соответствующими уравнениями для атомных операторов

$$\dot{P}_1 = -i\Omega_{01} P_1 - \frac{i}{\hbar} U_1 P_1 + \frac{i}{\hbar} S_1^* n_1 c_3 c_4 + \frac{i}{\hbar} G^* n_1 P_2 c_6^{\dagger} c_5^{\dagger}, \tag{2.3a}$$

$$\dot{n}_1 = \frac{2i}{\hbar} S_1 c_3^{\dagger} c_4^{\dagger} P_1 - \frac{2i}{\hbar} S_1^* c_3 c_4 P_1^{\dagger} + \frac{2i}{\hbar} G P_2^{\dagger} c_5 c_6 P_1 - \frac{2i}{\hbar} G^* P_2 c_6^{\dagger} c_5^{\dagger} P_1^{\dagger}, \tag{2.3b}$$

где $\Omega_{01} = \omega_1^+ + \omega_1^{(-)}$, $n_1 = \hat{a}_1^+ \hat{a}_1 + \hat{b}_1^+ \hat{b}_1 - 1$. Аналогичным образом получим и остальные уравнения

$$\dot{P}_2 = -i\Omega_{02}P_2 - \frac{i}{\hbar}U_2P_2 + \frac{i}{\hbar}S_2^*n_2c_1c_2 + \frac{i}{\hbar}GP_1c_5c_6n_2, \quad (2.4a)$$

$$\dot{n}_2 = \frac{2i}{\hbar}S_2c_1^+c_2^+P_2 - \frac{2i}{\hbar}S_2^*c_1c_2P_2^+ - \frac{2i}{\hbar}GP_2^+c_5c_6P_1 + \frac{2i}{\hbar}G^*P_1^+c_6^+c_5^+P_2, \quad (2.4б)$$

где $\Omega_{02} = \omega_2^+ + \omega_2^{(-)}$, $n_2 = \hat{a}_2^+ \hat{a}_2 + \hat{b}_2^+ \hat{b}_2 - 1$. Уравнения (2.2), (2.3а), (2.3б), (2.4а) и (2.4б) образуют замкнутую систему, которая будет использована ниже для описания различных свойств атома Рs в поле оптических и аннигиляционных фотонов.

2.1. Законы сохранения. Из уравнений (2.3б), (2.4б) можно вывести законы сохранения

$$\frac{d}{dt} \left(P_\alpha^+ P_\alpha + P_\alpha P_\alpha^+ + \frac{1}{2}n_\alpha^2 \right) = 0, \quad \alpha = 1, 2. \quad (2.5)$$

Поэтому имеем следующие интегралы движения:

$$P_\alpha^+ P_\alpha + P_\alpha P_\alpha^+ + \frac{1}{2}n_\alpha^2 = n_{0\alpha}, \quad \alpha = 1, 2, \quad (2.6)$$

где n_{01} , n_{02} – некоторые постоянные величины. Аналогичным образом из уравнений (2.2), (2.3б) и (2.4б) получим закон сохранения

$$\frac{d}{dt} (c_3^+ c_3 + c_4^+ c_4 + n_1 + n_2 + c_1^+ c_1 + c_2^+ c_2) = 0. \quad (2.7)$$

Величины n_{01} и n_{02} могут быть найдены из соотношений (2.6) и коммутационных соотношений

$$[P_\alpha, P_\beta^+] = -\delta_{\alpha\beta}n_\alpha, \quad [P_\alpha, n_\beta] = 2P_\alpha\delta_{\alpha\beta}, \quad [P_\alpha^+, n_\beta] = -2P_\alpha^+\delta_{\alpha\beta}, \quad \alpha, \beta = 1, 2. \quad (2.8)$$

Ниже мы подробно обсудим проблему начальных условий, получив решения уравнений движения для атомных и фотонных переменных.

2.2. Адиабатическое приближение. Применим адиабатическое приближение, когда

$$P_\alpha(t) = P_{0\alpha}(t)e^{-i\Omega_\alpha t}, \quad c_\mu(t) = c_\mu^{(0)}(t)e^{-i\omega_\mu t}, \quad (2.9)$$

где $P_{0\alpha}$, $c_\mu^{(0)}$ – медленные амплитуды, Ω_α – частота атома Рs в состояниях $\alpha = 1, 2$ ($\Omega_\alpha = \Omega_{0\alpha} + U_\alpha/\hbar$), μ – индекс, нумерующий моды аннигиляционных и оптических фотонов. Тогда из первого уравнения системы (2.2) получим

$$c_1(t) = c_{1V}(t) + c_2^+(t)d_2(t), \quad (2.10)$$

где $c_{1V} = c_{1V}(0)e^{-i\omega_1 t}$ представляет собой оператор вакуумного поля моды 1,

$$d_2(t) = d_{02}P_2(t), \quad d_{02} = -\frac{1}{\hbar}S_2\zeta^*(-\Omega_2 + \omega_1 + \omega_2), \quad (2.11)$$

$\zeta(x)$ есть ζ -функция Гайтлера [19, 20]:

$$\zeta(x) = \frac{P}{x} - i\pi\delta(x) \equiv \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1 - \exp(-ixt)}{x}, \quad (2.12)$$

$\delta(x)$ – δ -функция Дирака, символ P/x означает интегрирование в смысле главного значения.

Аналогичным образом получим следующие операторные уравнения:

$$\begin{aligned} c_2(t) &= c_{2V}(t) + d_2(t)c_1^+(t), \\ c_1^+(t) &= c_{1V}^+(t) + d_2^+(t)c_2(t), \\ c_2^+(t) &= c_{2V}^+(t) + d_2^+(t)c_1(t), \end{aligned} \quad (2.13)$$

где c_{2V} – оператор вакуумного поля моды 2.

Из уравнений (2.10), (2.13) получим следующие операторы:

$$c_1 = \frac{c_{1V} + c_{2V}^+d_2}{1 - d_2^+d_2}, \quad c_2 = \frac{c_{2V} + c_{1V}^+d_2}{1 - d_2^+d_2}, \quad c_1^+ = c_1^*, \quad c_2^+ = c_2^*. \quad (2.14)$$

В операторе (2.10), а также в операторах (2.13) использовалось нормальное упорядочение операторов, согласно которому операторы рождения стоят слева от операторов уничтожения в соответствующих произведениях. Ниже мы также будем использовать это правило.

Преобразуем оператор $(1 - d_2^+d_2)^{-1}$, прежде определив действие оператора $P_2^+P_2$. Используя перестановочные соотношения (2.8) и законы сохранения (2.6), получим, что

$$P_2^+P_2 = \frac{n_{02}}{3} + \frac{n_2}{3}.$$

Это означает, что оператор $P_2^+P_2$ может быть как положительно-определенным, так и отрицательно-определенным в зависимости от выбора начальных условий. Это свойство оператора $P_2^+P_2$ играет важную роль в разложении оператора $(1 - d_2^+d_2)^{-1}$ в степенной ряд. Для положительно-определенного оператора $P_2^+P_2$ получим, что

$$\frac{1}{1 - d_2^+d_2} = 1 + d_2^+d_2 + (d_2^+d_2)^2 + \dots = 1 + p_{02}^+P_2^+P_2, \quad (2.15)$$

где $p_{02}^+ = |d_{02}|^2/(1 - |d_{02}|^2)$. Аналогично для отрицательно-определенного оператора $P_2^+P_2$ имеем разложение

$$\frac{1}{1 + d_2^+d_2} = 1 - d_2^+d_2 + (d_2^+d_2)^2 - \dots = 1 + p_{02}^{(-)}P_2^+P_2, \quad (2.16)$$

где $p_{02}^{(-)} = -|d_{02}|^2/(1 + |d_{02}|^2)$. Введем для удобства обозначение p_{02} вместо $p_{02}^{(\pm)}$, учитывая свойства преобразований (2.15) и (2.16) в конечных формулах. Операторы $(1 + p_{02}P_2^+P_2)$ являются операторами, обратными операторам $(1 \mp |d_{02}|^2P_2^+P_2)$, что видно из соотношений (2.15) и (2.16). Это свойство операторов выполняется при различных значениях $|d_{02}|^2$, как меньших, так и больших единицы.

Подставляя операторы (2.15), (2.16) в выражения (2.14), получим следующие фотонные операторы:

$$\begin{aligned} c_1 &= (c_{1V} + c_{2V}^+ d_{02} P_2)(1 + p_{02} P_2^+ P_2), \\ c_1^+ &= (1 + p_{02} P_2^+ P_2)(c_{1V}^+ + d_{02}^* P_2^+ c_{2V}), \\ c_2 &= (c_{2V} + c_{1V}^+ d_{02} P_2)(1 + p_{02} P_2^+ P_2), \\ c_2^+ &= (1 + p_{02} P_2^+ P_2)(c_{2V}^+ + d_{02}^* P_2^+ c_{1V}). \end{aligned} \quad (2.17)$$

Вводя также оператор

$$d_1(t) = d_{01} P_1(t), \quad d_{01} = -\frac{1}{\hbar} S_1 \zeta^*(-\Omega_1 + \omega_3 + \omega_4), \quad (2.18)$$

получим из уравнений (2.2) следующие операторы:

$$\begin{aligned} c_3 &= (c_{3V} + c_{4V}^+ d_{01} P_1)(1 + p_{01} P_1^+ P_1), \\ c_3^+ &= (1 + p_{01} P_1^+ P_1)(c_{3V}^+ + d_{01}^* P_1^+ c_{4V}), \\ c_4 &= (c_{4V} + c_{3V}^+ d_{01} P_1)(1 + p_{01} P_1^+ P_1), \\ c_4^+ &= (1 + p_{01} P_1^+ P_1)(c_{4V}^+ + d_{01}^* P_1^+ c_{3V}), \end{aligned} \quad (2.19a)$$

где

$$p_{01} = \frac{\pm |d_0|^2}{1 \mp |d_0|^2}. \quad (2.19b)$$

Аналогичным образом решим уравнения для фотонных операторов c_5 и c_6 оптического поля (2.2), применяя адиабатическое приближение. Согласно выражениям (2.9) имеем

$$c_5 = c_{5V} + \frac{i}{\hbar} G^* P_{10}^+ P_{20} c_{60}^+ \int_0^\infty dt' e^{i\Omega_1 t'} e^{-i\Omega_2 t'} G_5(t-t') e^{i\omega_6 t'}, \quad (2.20a)$$

где $G_5(t-t')$ – запаздывающая функция Грина [17]:

$$G_5(t-t') = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \begin{cases} 0, & \text{если } t < t', \\ e^{-i(\omega_5 - i\varepsilon)(t-t')}, & \text{если } t > t'. \end{cases} \quad (2.20b)$$

После выполнения интегрирования по времени получим из (2.20a) следующее операторное выражение:

$$c_5 = c_{5V} + \ell_0 P_1^+ P_2 c_6^+, \quad (2.21a)$$

где

$$\ell_0 = -\frac{1}{\hbar} G^* \zeta^* (\Omega_1 - \Omega_2 + \omega_5 + \omega_6). \quad (2.21б)$$

Следуя вышеприведенной процедуре преобразования фотонных операторов, получим окончательно следующие операторы оптических фотонов:

$$\begin{aligned} c_5 &= (c_{5V} + c_{6V}^+ \ell_0 P_1^+ P_2) (1 + p_{03} P_2 P_2^+ P_1^+ P_1), \\ c_6 &= (c_{6V} + c_{5V}^+ \ell_0 P_1^+ P_2) (1 + p_{03} P_2 P_2^+ P_1^+ P_1), \end{aligned} \quad (2.22а)$$

где

$$p_{03} = \frac{\pm |\ell_0|^2}{1 \mp |\ell_0|^2}. \quad (2.22б)$$

Верхний знак в формуле (2.22б) соответствует положительно-определенному оператору $P_1^+ P_1 P_2 P_2^+$, а нижний – отрицательно-определенному оператору $P_1^+ P_1 P_2 P_2^+$, который согласно законам сохранения (2.6) и перестановочным соотношениям (2.8) может быть представлен как

$$\left(\frac{1}{3} n_{01} + \frac{1}{2} n_1 \right) \left(\frac{1}{3} n_{02} - \frac{1}{2} n_2 \right).$$

2.3. Учет вкладов в полевые уравнения, связанных с интенсивным воздействием оптических фотонов. Формулы (2.22а) получены в адиабатическом приближении при выполнении соотношений (2.20а) для операторов оптических фотонов. Покажем, что это справедливо лишь для слабых оптических полей. Скорость вынужденных оптических переходов между состояниями 1 и 2 атома Ps определяется следующей формулой [14]:

$$R = \frac{T_2'}{2} \left(\frac{2d}{\hbar} \right)^2 E_0^2, \quad (2.23)$$

где T_2' – время однородной фазовой релаксации для разрешенного дипольного перехода $1 \leftrightarrow 2$, d – дипольный момент перехода, E_0 – амплитуда напряженности электрического поля возбуждающего оптического излучения. Для запрещенных дипольных переходов, например для переходов $1s \rightarrow ns$, в (2.23) необходимо подставить соответствующий эффективный дипольный момент перехода. В интенсивных оптических полях согласно (2.23) вклад оптических процессов значительно больше аннигиляционных процессов, поэтому уравнения для c_5 и c_6 из (2.2) должны быть решены с большей, чем в (2.22а), точностью.

Гейзенберговские уравнения движения для фотонных операторов $c_5 c_6$, $c_5^+ c_6^+$, $N_5 = c_5^+ c_5$, $N_6 = c_6^+ c_6$ имеют вид

$$i\hbar \frac{d}{dt} (c_5^+ c_6^+) = -\hbar(\omega_5 + \omega_6) c_5^+ c_6^+ - G P_2^+ P_1 (1 + N_5 + N_6), \quad (2.24а)$$

$$i\hbar \frac{d}{dt} (1 + N_5 + N_6) = -2G P_2^+ P_1 c_5 c_6 + 2G^* P_1^+ P_2 c_6^+ c_5^+, \quad (2.24б)$$

где оператор $P_2^+ P_1$ имеет смысл оператора перехода $1 \rightarrow 2$. Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} b &= GP_2^+ P_1, & b^+ &= G^* P_1^+ P_2, & 1 + N_5 + N_6 &= Y, & b_0 &= GP_{02}^+ P_{01}, \\ Y &= Y_0, & c_5 c_6 &= X, & c_5^+ c_6^+ &= X^+, & X &= X_0 e^{-i(\omega_5 + \omega_6)t}. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Тогда, отбрасывая быстроосциллирующие множители в уравнениях (2.24), получим следующие уравнения:

$$\begin{aligned} -i\hbar \dot{X}_0 &= -b_0^+ e^{-i\Delta t} Y_0, \\ i\hbar \dot{Y}_0 &= -2b_0 e^{i\Delta t} X_0 + 2b_0^+ e^{-i\Delta t} X_0^+, \\ i\hbar \dot{X}_0 &= -b_0 e^{i\Delta t} Y_0, \end{aligned} \quad (2.26)$$

где $\Delta = \Omega_2 - \Omega_1 - \omega_5 - \omega_6$ – отстройка от резонанса для перехода $1 \Leftrightarrow 2$. Выделим в операторах (2.25) вещественные части. Тогда, сохраняя прежние обозначения, получим вместо (2.25) следующие уравнения:

$$\dot{X}_0 = b'_0 Y_0, \quad \dot{Y}_0 = -b'_0 X_0, \quad (2.27a)$$

где

$$b'_0 = \operatorname{Re} \left(\frac{b_0}{\hbar} e^{i\Delta t} \right). \quad (2.27b)$$

Решение уравнений (2.27a) имеет вид

$$\begin{aligned} X_0(t) &= Y_0(0) \sin \Theta(t) + X_0(0) \cos \Theta(t), \\ Y_0(t) &= -X_0(0) \sin \Theta(t) + Y_0(0) \cos \Theta(t), \end{aligned} \quad (2.28a)$$

где

$$\Theta(t) = \int_{-\infty}^t \operatorname{Re} \left(\frac{b_0}{\hbar} e^{i\Delta t'} \right) dt', \quad (2.28b)$$

$X_0(0), Y_0(0)$ – операторы X_0, Y_0 , определенные в начальный момент времени $t = 0$.

При выполнении начального условия $X_0(0) = 0$ и при $\Theta \rightarrow 0$ результаты (2.22a) и (2.28a) совпадают. Для интенсивных полей оператор площади импульса (2.28a) отличен от нуля и может быть учтен в конечных формулах с помощью решения (2.28a). При этом учитывается, что при $G^* = G$ и $\Delta = 0$

$$\sin \Theta = P_1^+ P_2 \sin \frac{|G| \tau_{2\gamma}}{\hbar}, \quad (2.29)$$

где $\tau_{2\gamma}$ – интервал времени, в течение которого на атом Ps воздействует оптическое излучение.

При получении операторов (2.17), (2.19a), (2.22a) и (2.28a) использовались бозонные и фермионные соотношения коммутации для фотонных и электрон-позитронных операторов. Вывод операторов (2.17), (2.19a), (2.22a) и (2.28a) производился с учетом

произвольных степеней постоянных взаимодействий $|S_1|$, G и $|S_2|$, т.е., как видно из (2.15), (2.16), какое-либо ограничение ряда теории возмущений в нашем рассмотрении не используется. Подставляя операторы (2.17), (2.19а), (2.22а) и (2.28а) в уравнения движения (2.3б), (2.4б) для атомных операторов, можно преобразовать эти уравнения. При этом, как видно из (2.17) и (2.19а), связь фотонных и атомных операторов состояний 1 и 2 в нашем рассмотрении обусловлена операторами (2.22а) и (2.28а) оптических фотонов.

3. ЧИСЛА ЗАПОЛНЕНИЯ СОСТОЯНИЙ АТОМА ПОЗИТРОНИЯ В ПОЛЕ ОПТИЧЕСКИХ И АННИГИЛЯЦИОННЫХ ФОТОНОВ

Так же как и в квантовой оптике (см. [14], а также [10, 11]), примем нормальное упорядочение операторов, согласно которому фотонные операторы уничтожения расположены в правой части произведения операторов, а все фотонные операторы рождения – в левой. Тогда из уравнений (2.3б) и (2.4б) получим следующее уравнение:

$$\frac{d}{dt}(n_1 + n_2) = -\frac{2i}{\hbar}S_1c_3^+c_4^+P_1 + \frac{2i}{\hbar}S_1^*P_1^+c_3c_4 - \frac{2i}{\hbar}S_2c_1^+c_2^+P_2 + \frac{2i}{\hbar}S_2^*P_2^+c_1c_2. \quad (3.1)$$

Как следует из операторных уравнений (2.22а), атомные операторы зависят от оптического поля фотонов, поэтому в уравнении (3.1) роль оптических фотонов учтена неявно.

Подставим в (3.1) операторы аннигиляционных фотонов (2.17) и (2.19а). В качестве параметров, оценивающих вклад различных членов, выберем параметры d_{01} , d_{02} и p_{01} , p_{02} , которые содержат константы взаимодействия S_1 и S_2 в различных степенях.

Будем предполагать, что затравочных аннигиляционных фотонов мод 1, 2 и 3, 4 в свободном (вакуумном) поле нет. Это означает, что выполняются следующие равенства:

$$c_{\mu V}|\text{vacuum}\rangle = 0, \quad c_{\mu V}^+c_{\mu V}|\text{vacuum}\rangle = 0, \quad \langle c_{\mu V}^+c_{\mu V} \rangle = 0, \quad (3.2)$$

где $|\text{vacuum}\rangle$ – волновая функция вакуумного поля в представлении чисел заполнения фотонных состояний, $\langle \dots \rangle$ – среднее значение, вычисленное с помощью этой волновой функции. Усреднение атомных операторов в конечных выражениях после перемножения операторов в (3.1) будем производить с помощью некоторой волновой функции $|\Phi\rangle$ в представлении чисел заполнения электрон-позитронных состояний.

Применив законы сохранения (2.6), а также коммутационные соотношения (2.8), получим следующие операторные тождества:

$$\begin{aligned} n_\alpha^2 &= 2P_\alpha^+P_\alpha - n_\alpha, & P_\alpha n_\alpha &= P_\alpha, & P_\alpha^+ n_\alpha &= -P_\alpha^+, & P_\alpha^+ P_\alpha &= \frac{1}{3}n_{0\alpha} + \frac{1}{2}n_\alpha, \\ P_\alpha P_\alpha^+ &= \frac{1}{3}n_{0\alpha} - \frac{1}{2}n_\alpha, & \alpha &= 1, 2. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Суммируя все члены в операторном уравнении (3.1), получим уравнение для средних значений (символ $\langle \dots \rangle$ опустим)

$$\frac{d}{dt}(n_1 + n_2) = B_1 n_1 + B_0 + C_1 n_1 + C_0, \quad (3.4)$$

где

$$\begin{aligned}
B_1 &= A_{21}(1 + p_{01}), & B_0 &= \frac{2}{3}B_1n_{01}, & C_1 &= A_{22}(1 + p_{02}), & C_0 &= \frac{2}{3}n_{02}C_1, \\
A_{21} &= -\frac{i}{\hbar}S_1^*d_{01} + \frac{i}{\hbar}S_1d_{01}^* = -2\left(\frac{|S_1|}{\hbar}\right)^2 \pi\delta(-\Omega_1 + \omega_3 + \omega_4), \\
A_{22} &= -\frac{i}{\hbar}S_2^*d_{02} + \frac{i}{\hbar}S_2d_{02}^* = -2\left(\frac{|S_2|}{\hbar}\right)^2 \pi\delta(-\Omega_2 + \omega_1 + \omega_2).
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Чтобы решить уравнение (3.4), необходимо определить в явном виде зависимость чисел заполнения n_1 и n_2 от времени. Для этого обратимся снова к уравнениям (2.3б) и (2.4б). Следуя приведенной выше процедуре вычислений, после вакуумного усреднения получим из (2.3б)

$$\dot{n}_1 = B_1n_1 + B_0 + L_2\left(\frac{1}{3}n_{02} + \frac{1}{2}n_2\right)\left(\frac{1}{3}n_{01} + \frac{1}{2}n_1\right), \tag{3.6a}$$

где

$$L_2 = \frac{2i}{\hbar}(G\ell_0 - G^*\ell_0^*)\langle 1 + c_5^+c_5 + c_6^+c_6 \rangle \tag{3.6б}$$

— величина, определяющая роль оптических фотонов в процессе аннигиляции. При этом часть L_2 , пропорциональная $\langle c_5^+c_5 + c_6^+c_6 \rangle$, соответствует вынужденным переходам в атоме Рs между состояниями 1 и 2 (рис. 1 и 2) под действием оптических фотонов.

Аналогичным образом получим из (2.4б) следующее уравнение:

$$\dot{n}_2 = C_1n_2 + C_0 - L_2\left(\frac{1}{3}n_{02} + \frac{1}{2}n_2\right)\left(\frac{1}{3}n_{01} + \frac{1}{2}n_1\right). \tag{3.7}$$

Выделим в уравнениях (3.6а) и (3.7) в явном виде нелинейные члены, т.е.

$$\dot{n}_1 = a_1n_1 + a_2 + n_2a_3 + n_2n_1a_4, \tag{3.8a}$$

$$\dot{n}_2 = b_1n_2 + b_2 + n_1b_3 - n_2n_1a_4, \tag{3.8б}$$

где коэффициенты a_μ, b_μ ($\mu = 1, 2, 3, 4$) имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
a_1 &= B_1 + \frac{1}{6}L_2n_{02}, & a_2 &= B_0 + \frac{1}{9}L_2n_{01}n_{02}, & a_3 &= \frac{1}{6}L_2n_{01}, & a_4 &= \frac{1}{4}L_2, \\
b_1 &= C_1 - \frac{1}{6}L_2n_{01}, & b_2 &= C_0 - \frac{1}{9}L_2n_{01}n_{02}, & b_3 &= \frac{1}{6}L_2n_{02}.
\end{aligned} \tag{3.8в}$$

Обсудим физический смысл нелинейных членов в уравнениях (3.8). Для этого рассмотрим слагаемое $(2i/\hbar)GP_2^+c_5c_6P_1$ в уравнении (2.3б). Это слагаемое в уравнении для числа заполнения состояния 1 приобретает наиболее простой смысл, если поле c_5c_6 является заданным внешним полем. В этом случае это слагаемое аналогично соответствующему слагаемому в классических уравнениях для населенностей атомных состояний [14]. Заданное внешнее поле в нашем рассмотрении соответствует операторам c_5c_6

и c_{6V} . Как видно из (2.22а) и (2.26) поля c_5 и c_6 отличаются от заданного внешнего поля. Это отличие обусловлено обратным влиянием атома Ps на поле фотонов и определяется константой взаимодействия G в эффективном гамильтониане (2.1). Учитывая (2.2), получим, что оператор $(2i/\hbar)GP_2^+c_5c_6P_1$ трансформируется в оператор

$$\frac{2i}{\hbar}GP_2^+P_1P_2P_1\ell_0(c_{5V}c_{5V}^+ + c_{6V}c_{6V}^+),$$

который после вакуумного усреднения даст нелинейные по n_1 и n_2 члены в уравнении (3.8а). Таким образом, происхождение нелинейности в уравнениях для средних чисел заполнения атомных состояний 1 и 2 атома Ps обусловлено самосогласованным взаимодействием оптических фотонов с атомом Ps. Атом Ps может существенно изменять поле оптических фотонов, и, как показано в п. 2.3, это изменение зависит от числа оптических фотонов, действующих на атом Ps.

4. ЧАСТНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ДЛЯ ЧИСЕЛ ЗАПОЛНЕНИЯ АТОМНЫХ СОСТОЯНИЙ С УЧЕТОМ МНОГОМОДОВОСТИ ФОТОННЫХ ПОЛЕЙ

Решим теперь уравнения (3.4), (3.6а) и (3.7), сделав предварительно несколько замечаний. Учтем многомодовость аннигиляционного распада при δ -образном характере величин a_μ, b_μ (3.8в). Для этого необходимо умножить эти величины на плотность числа состояний фотонов

$$\frac{V_R}{(2\pi c)^3}d\Omega_A\omega^2 d\omega \quad (4.1)$$

и проинтегрировать по частотам ω , полагая для простоты, что в случае неподвижного атома Ps $\omega_1 = \omega_2$ и $\omega_3 = \omega_4$ в соответствии с законом сохранения энергии-импульса при распаде Ps из состояний 1 и 2. Здесь V_R – объем квантования электромагнитного поля, $d\Omega_A$ – элемент телесного угла, в направлении которого вылетают аннигиляционные фотоны. При этом вследствие δ -образной частотной зависимости величин L_2, B_1, B_0, C_1 и C_0 , входящих линейным образом в уравнения движения (3.4), (3.6а) и (3.7), можно заменить сингулярные функции $|\zeta|^2$ в величинах p_{01}, p_{02} и p_{03} их максимальным значением, равным $\tau_{2\gamma}^2$ [20], где $\tau_{2\gamma}$ – время наблюдения аннигиляционного процесса, в течение которого на атом Ps действует оптическое излучение.

Обозначим через $\bar{B}_1, \bar{B}_0, \bar{C}_1$ и \bar{C}_0 соответствующие постоянные величины в правой части уравнения (3.4), в которых проведена процедура учета многомодовости процесса. Аналогичным образом обозначим через \bar{a}_μ и \bar{b}_μ ($\mu = 1, 2, 3, 4$) величины a_μ и b_μ в уравнениях (3.8), где также может быть учтена многомодовость. Тогда в решения этих уравнений будут входить постоянные величины $\bar{a}_\mu, \bar{b}_\mu, \bar{B}_1, \bar{B}_0, \bar{C}_1$ и \bar{C}_0 .

В соответствии со смыслом эффективного гамильтониана (2.1) величины $|S_1|$ и $|S_2|$ отвечают свободному аннигиляционному распаду атома Ps в состояниях 1 и 2 без учета

обратного влияния поля аннигиляционных фотонов и поля оптических фотонов с вероятностями в единицу времени $\Delta W_{2\gamma}^{(0)}(1)$ и $\Delta W_{2\gamma}^{(0)}(2)$ вылета аннигиляционных фотонов в элемент телесного угла $\Delta\Omega_A$. Тогда

$$|S_1| = \left(\frac{\Delta W_{2\gamma}^{(0)}(1) \hbar^2 (2\pi c)^3}{2\pi V_R \omega^2 \Delta\Omega_A} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad |S_2| = \left(\frac{\Delta W_{2\gamma}^{(0)}(2) \hbar^2 (2\pi c)^3}{2\pi V_R \omega^2 \Delta\Omega_A} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (4.2)$$

Для изотропного распада

$$\Delta W_{2\gamma}^{(0)}(1) = \frac{1}{4\pi} W_{2\gamma}^{(0)}(1) \Delta\Omega_A, \quad \Delta W_{2\gamma}^{(0)}(2) = \frac{1}{4\pi} W_{2\gamma}^{(0)}(2) \Delta\Omega_A, \quad (4.3)$$

и в этом случае величины $|S_1|$ и $|S_2|$ не зависят от элемента телесного угла. При этом $|S_1|$ и $|S_2|$ представляют собой энергии взаимодействия атома Ps с полем свободных (вакуумных) фотонов.

Поясним величину V_R . Она является эффективным объемом взаимодействия атома Ps с полем фотонов и определяется характерной длиной волны в спектре атома Ps в состоянии 1 (или 2). Для состояния $1s$ атома Ps имеем

$$V_R = A^{-2} \left(\frac{4\pi \hbar^3}{me^4} \right)^3, \quad (4.4)$$

где m – масса электрона, e – его заряд. Объем V_R выбран таким образом, чтобы разрешить характерную частоту атома p-Ps в состоянии $1s$. Для состояния $1s$ имеем $\Delta W_{2\gamma}^{(0)}(1s) = (\alpha^5 mc^2 / 2\hbar)$ [2], где α – постоянная тонкой структуры. Постоянная A может быть вычислена с использованием экспериментальных данных. Таким образом, характерная частота эффективного взаимодействия атома p-Ps в этом состоянии с полем аннигиляционных фотонов есть

$$\frac{|S_1|}{\hbar} = A \left(\alpha^5 \sqrt{\alpha} c^2 \frac{m}{\hbar} \right). \quad (4.5)$$

В уравнение (3.4) входят постоянные величины p_{01} и p_{02} , определяемые формулами (2.15), (2.16) и (2.19б). При интегрировании по частотам аннигиляционных фотонов учтем свойство ζ -функции Гайтлера, согласно которому величина $|\zeta|^2$ в максимуме равна $\tau_{2\gamma}^2$. Тогда

$$p_{01} = \frac{\pm \left(\frac{|S_1|}{\hbar} \right)^2 \tau_{2\gamma}^2}{1 \mp \left(\frac{|S_1|}{\hbar} \right)^2 \tau_{2\gamma}^2}, \quad p_{02} = \frac{\pm \left(\frac{|S_2|}{\hbar} \right)^2 \tau_{2\gamma}^2}{1 \mp \left(\frac{|S_2|}{\hbar} \right)^2 \tau_{2\gamma}^2}, \quad (4.6)$$

где $\tau_{2\gamma}$ – характерное время наблюдения рассматриваемого процесса взаимодействия атома Ps с полем аннигиляционных и оптических фотонов, т.е. время жизни атома Ps с учетом обратного влияния фотонов и оптических переходов атома Ps между состояниями 1 и 2.

Учитывая вышеприведенные замечания, получим следующие выражения для коэффициентов в уравнениях движения (3.8):

$$\begin{aligned}
 \bar{B}_1 &= -W_{2\gamma}^{(0)}(1)[1 + p_{01}], & \bar{B}_0 &= \frac{2}{3}n_{01}\bar{B}_1, \\
 \bar{C}_1 &= -W_{2\gamma}^{(0)}(2)[1 + p_{02}], & \bar{C}_0 &= \frac{2}{3}n_{02}\bar{C}_1, \\
 \bar{a}_1 &= \bar{B}_1 + \frac{1}{6}n_{02}\bar{L}_2, & \bar{a}_2 &= \bar{B}_0 + \frac{1}{9}n_{01}n_{02}\bar{L}_2, \\
 \bar{a}_3 &= \frac{1}{6}n_{01}\bar{L}_2, & \bar{a}_4 &= \frac{1}{4}\bar{L}_2, \\
 \bar{b}_1 &= \bar{C}_1 + \frac{1}{6}n_{01}\bar{L}_2, & \bar{b}_2 &= \bar{C}_0 - \frac{1}{9}n_{01}n_{02}\bar{L}_2, & \bar{b}_3 &= -\frac{1}{6}n_{02}\bar{L}_2.
 \end{aligned} \tag{4.7}$$

Рассмотрим частные решения уравнений (3.8), учитывая выражения (4.7). При этом рассмотрим вначале нестационарные решения, для которых $\dot{n}_1 \neq 0$ и $\dot{n}_2 \neq 0$. В разделе 5 мы исследуем специальный случай, при котором $\dot{n}_1 = \dot{n}_2 = 0$, что соответствует стационарному решению уравнений (3.8).

Аннигиляция атома р-Рs в основном состоянии. Рассмотрим вначале случай аннигиляционного распада атома Рs из состояния $1s$ без воздействия оптической накачки. В этом случае уравнение (3.4) принимает вид

$$\dot{n}_1 = \bar{B}_1 n_1 + \bar{B}_0 \tag{4.8}$$

и имеет решение

$$n_1(t) = \left[n_1(0) + \frac{\bar{B}_0}{\bar{B}_1} \right] \exp(\bar{B}_1 t) - \frac{\bar{B}_0}{\bar{B}_1}. \tag{4.9}$$

Это решение означает, что атом Рs, находящийся в фиксированном состоянии, распадается на аннигиляционные фотоны по экспоненциальному закону с характерным временем $\tau_{2\gamma} = 1/|\bar{B}_1|$. Тогда имеем для времени $\tau_{2\gamma}$ следующее выражение:

$$\tau_{2\gamma} = \frac{1}{2\left(\frac{|S_1|}{\hbar}\right)^2} \left\{ \frac{1}{\tau_{2\gamma}^{(0)}} - \sqrt{\left(\frac{1}{\tau_{2\gamma}^{(0)}}\right)^2 - 4\left(\frac{|S_1|}{\hbar}\right)^2} \right\}. \tag{4.10}$$

В работе [21] получено экспериментальное значение $\tau_{2\gamma} = 1.2514234 \cdot 10^{-10}$ с, т.е. время жизни атома р-Рs в основном состоянии увеличивается по сравнению со временем жизни $\tau_{2\gamma}^{(0)} = 125$ пс благодаря радиационному взаимодействию атома р-Рs с полем аннигиляционных фотонов. Используя экспериментальное значение $\tau_{2\gamma}$, найдем $A = 7.0112675$. В формуле (4.10) использованы нижние знаки в определении p_{01} из (4.6), что соответствует отрицательно-определенному оператору $P_1^+ P_1$ при начальных условиях

$$(P_1^+ P_1)_0 = 0, \quad n_1(0) = 1, \quad n_{01} = \frac{3}{2}, \tag{4.11}$$

где $n_1(0)$ – среднее значение положительно-определенного оператора n_1 в (2.35) в начальный момент времени $t = 0$. Значение n_{01} определено с помощью закона сохранения (2.5) и соотношений коммутации (2.8).

Радиационное взаимодействие атома р-Рs в $1s$ -состоянии учтено в нашем рассмотрении без теории возмущений. Как видно из (4.6), постоянная взаимодействия S_1/\hbar входит в формулу (4.10) в произвольной степени. Это означает, что формула (4.10) может быть использована при объяснении прецизионных измерений времени жизни атома р-Рs в $1s$ -состоянии. Дальнейшее уточнение времени жизни атома $\tau_{2\gamma}$ по сравнению с данным в [21] приведет лишь к уточнению постоянной A , определяющей объем V_R области радиационного взаимодействия атома р-Рs с полем аннигиляционных фотонов, т.е. области, в которой проявляется обратное влияние аннигиляционных фотонов.

5. КОГЕРЕНТНЫЕ СОСТОЯНИЯ АТОМА ПОЗИТРОНИЯ

Рассмотрим теперь уравнения движения (2.3а), (2.4а), используя вышеприведенную процедуру преобразования фотонных операторов. После вакуумного усреднения получим с помощью (2.3а) следующее уравнение:

$$\begin{aligned} \dot{P}_1 = & -i \left(\Omega_{01} + \frac{1}{\hbar} U_1 \right) P_1 + \frac{i}{\hbar} S_1^* d_{01} \left[1 + p_{01} \left(\frac{1}{3} n_{01} + \frac{1}{2} \right) \right] P_1 + \\ & + \frac{i}{\hbar} G^* \ell_0^* P_1 \left(\frac{1}{3} n_{02} + \frac{1}{2} n_2 \right). \end{aligned} \quad (5.1)$$

Аналогично получим из уравнения (2.4а), что

$$\begin{aligned} \dot{P}_2 = & -i \left(\Omega_{02} + \frac{1}{\hbar} U_2 \right) P_2 + \frac{i}{\hbar} S_2^* d_{02} \left[1 + p_{02} \left(\frac{1}{3} n_{02} + \frac{1}{2} \right) \right] P_2 + \\ & + \frac{i}{\hbar} G \ell_0 \left(\frac{1}{3} n_{01} - \frac{1}{2} n_1 \right) P_2. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Величины d_{01} , d_{02} и ℓ_0 согласно выражениям (2.11), (2.18) и (2.21б) являются комплексными. Поэтому в правых частях уравнений (5.1) и (5.2) можно выделить два члена, определяющих энергию атома Рs и время релаксации. Запишем уравнение (5.1) следующим образом:

$$\dot{P}_1 = \left(-i\varepsilon_1 - \frac{1}{T_{2\gamma}(1)} + g_1 n_2 \right) P_1, \quad (5.3)$$

где полная энергия атома Рs в состоянии 1 с учетом его радиационного взаимодействия с полем аннигиляционных и оптических фотонов есть

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 = & \Omega_1 + \frac{1}{\hbar} U_1 - \left[1 + p_{01} \left(\frac{1}{3} n_{01} + \frac{1}{2} \right) \right] \frac{|S_1|^2}{\hbar^2} \frac{P}{-\Omega_1 + \omega_3 + \omega_4} + \\ & + \frac{|G|^2}{\hbar^2} \frac{P}{\Omega_1 - \Omega_2 + \omega} \left(\frac{1}{3} n_{02} + \frac{1}{2} n_2 \right). \end{aligned} \quad (5.4)$$

Время фазовой релаксации состояния 1 атома Ps $T_{2\gamma}(1)$ определяется с помощью равенства

$$\begin{aligned} \frac{1}{T_{2\gamma}(1)} = & \left[1 + p_{01} \left(\frac{1}{3}n_{01} + \frac{1}{2} \right) \right] \frac{|S_1|^2}{\hbar^2} \pi \delta(-\Omega_1 + \omega_3 + \omega_4) + \\ & + \frac{|G|^2}{\hbar^2} \frac{1}{3} n_{02} \pi \delta(\Omega_1 - \Omega_2 + \omega). \end{aligned} \quad (5.5)$$

Величина g_1 , определяющая влияние поля оптических фотонов на состояние 1 атома Ps, имеет вид

$$g_1 = -\frac{1}{2} \frac{|G|^2}{\hbar^2} \pi \delta(\Omega_1 - \Omega_2 + \omega). \quad (5.6)$$

Аналогичным образом можно представить уравнение (5.2), вводя полную энергию ε_2 и время фазовой релаксации $T_{2\gamma}(2)$ атома Ps в состоянии 2.

Как следует из формулы (5.4), полная энергия атома Ps в различных состояниях зависит от скорости протекания аннигиляционного процесса и процесса его взаимодействия с полем аннигиляционных и оптических фотонов. В зависимости от типа решения уравнений (3.8) изменяется и энергия состояний. Таким образом, с помощью уравнений (5.1) и (5.2) может быть получена информация о смещении уровней энергии состояний атома Ps, взаимодействующего с полем оптических и аннигиляционных фотонов, а также о времени фазовой релаксации состояний 1 и 2. Значение $T_{2\gamma}(2)$ вместе со значением T'_{20} , определяемым спонтанным излучением оптических фотонов из состояния 2, определяет полное время фазовой релаксации, которое, в свою очередь, определяет скорость вынужденных переходов (2.23).

5.1. Интенсивность аннигиляционного процесса. Введем операторы интенсивности

$$I_1 = P_1^+ P_1, \quad I_2 = P_2^+ P_2, \quad (5.7)$$

входящие в законы сохранения (2.6). Применяя перестановочные соотношения (2.8), получим следующие операторные равенства:

$$2I_1 - n_1 = \frac{2}{3}n_{01}, \quad 2I_2 - n_2 = \frac{2}{3}n_{02}. \quad (5.8)$$

Усредняя операторы (5.8), можно определить величины n_{01} и n_{02} , характеризующие начальные условия протекания аннигиляционного процесса в поле оптических фотонов в зависимости от чисел заполнения состояний 1 и 2, а также от когерентности этих состояний, которую будем определять с помощью отличных от нуля величин I_1 и I_2 .

Выведем уравнения движения для интенсивностей I_1 и I_2 , применяя уравнения движения (2.3б) и (2.4б). Продифференцируем по времени операторы (5.7) и применим явные выражения для фотонных операторов (2.22а), (2.19а) и (2.17). Предположим, что затравочные аннигиляционные фотоны в начальный момент $t = 0$ отсутствуют. Тогда, переходя к вакуумным средним и используя равенства (3.2), получим уравнение

$$\frac{d}{dt} I_1 = B_1 I_1 + \frac{1}{2} L_2 I_1 I_2, \quad (5.9)$$

где величина B_1 определяется выражением (3.5). Многомодовость фотонных полей приводит к заменам $B_1 \rightarrow \bar{B}_1$, $L_2 \rightarrow \bar{L}_2$ с учетом δ -образного характера величин B_1 и L_2 .

Аналогичным образом выведем уравнение для интенсивности I_2 :

$$\frac{d}{dt}I_2 = \bar{C}_1 I_2 - \frac{1}{2}I_1 I_2 \bar{L}_2, \quad (5.10)$$

где постоянная величина \bar{C}_1 определена в (4.7).

Уравнения (5.9), (5.10) переходят в уравнения (3.8), если принять во внимание соотношения (5.8). Отличительной особенностью уравнений (3.8) по сравнению с уравнениями (5.9), (5.10) является то, что в уравнениях (3.8) существует связь между числами заполнения n_1 и n_2 состояний 1 и 2 даже в случае слабой нелинейности этих уравнений, когда можно формально положить $a_4 = 0$. В этом случае уравнения (3.8) переходят в линейные кинетические уравнения, которые могут быть решены известными методами. В уравнениях (5.9) и (5.10) отсутствие нелинейности означает, что состояния 1 и 2 аннигилируют независимо друг от друга.

5.2. Стационарное решение уравнений движения. Поведение со временем аннигиляционного распада атома р-Рs обусловлено влиянием оптического возбуждения и обратным влиянием поля аннигиляционных фотонов. Предположим, что влияние этих воздействий может быть скомпенсировано и числа заполнения n_1 и n_2 состояний атома Рs перестанут изменяться со временем. Это означает, что в уравнениях (3.8) можно положить $\dot{n}_1 = \dot{n}_2 = 0$. Такое состояние атома Рs является долгоживущим состоянием, и время $\tau_{2\gamma}$ наблюдения аннигиляционного процесса будет удовлетворять условию

$$\left(\frac{|S_1|}{\hbar}\right)^2 \tau_{2\gamma}^2 = M_1 \gg 1,$$

где согласно формуле (4.5) $|S_1|/\hbar = 0.269649 \cdot 10^9 \text{ с}^{-1}$.

Пусть в уравнениях (5.9) и (5.10)

$$\dot{I}_1 = \frac{1}{2}\delta_1, \quad \dot{I}_2 = \frac{1}{2}\delta_2, \quad (5.11)$$

где δ_1 и δ_2 – некоторые малые постоянные величины. Согласно выражениям (5.8) имеем $\delta_1 = \dot{n}_1$, $\delta_2 = \dot{n}_2$. Более того, предположим, что

$$I_1 = \frac{1}{2}\delta \tau_{2\gamma} = I_2. \quad (5.12)$$

Тогда из уравнений (5.9), (5.10) получим следующую систему уравнений:

$$-\frac{1}{2\tau_{2\gamma}^{(0)}} \frac{\delta}{1 + M_1} \frac{\sqrt{M_1}}{\left(\frac{|S_1|}{\hbar}\right)} + \frac{1}{8} \bar{L}_2 \delta^2 \frac{M_1}{\left(\frac{|S_1|}{\hbar}\right)^2} = \frac{1}{2}\delta_1, \quad (5.13a)$$

$$-\frac{1}{2n^3 \tau_{2\gamma}^{(0)}} \frac{\delta}{1 - \frac{M_1}{n^3}} \frac{\sqrt{M_1}}{\left(\frac{|S_1|}{\hbar}\right)} - \frac{1}{8} \bar{L}_2 \delta^2 \frac{M_1}{\left(\frac{|S_1|}{\hbar}\right)^2} = \frac{1}{2}\delta_2, \quad (5.13b)$$

где n – главное квантовое число состояния 2. Мы учли в этих уравнениях известное соотношение $W_{2\gamma}^{(0)}(2) = W_{2\gamma}^{(0)}(1s)/n^3$ [8], а также следующие начальные условия. Для состояния 1 в уравнении (5.13а) начальные условия имеют вид (4.11), а для состояния 2 –

$$(P_2^+ P_2)_0 = 0, \quad n_2(0) = -1, \quad n_{02} = \frac{3}{2}, \quad (5.14)$$

что соответствует отсутствию атома Ps в состоянии 2 в начальный момент времени $t = 0$. Складывая уравнения (5.13а) и (5.13б), получим следующее выражение для определения величины M_1 :

$$\frac{\sqrt{M_1}(1+n^3)}{(1+M_1)(M_1-n^3)} = 2A\sqrt{\alpha} \frac{\delta_1 + \delta_2}{\delta}. \quad (5.15)$$

Для выполнения этого равенства необходимо, чтобы имело место условие $M_1 > n^3$.

Рассмотрим также другой случай, когда начальные условия соответствуют значениям n_{01} и n_{02} , равным $3/2$. Сложим уравнения (5.13а) и (5.13б). Это позволит определить величину M_1 , которая при $\delta_1 = 0$, $\delta_2 = 0$ есть

$$M_1 = \frac{1}{2}(1+n^3), \quad (5.16)$$

т.е. значительное увеличение продолжительности аннигиляционного процесса возможно, если состояние 2 соответствует ридбергеровскому состоянию атома р-Ps. Более того, полученное значение M_1 соответствует выбору верхнего знака в величинах (4.6), определяющих роль обратного влияния аннигиляционных фотонов. Отметим при этом, что в нестационарном решении (4.9) для объяснения эксперимента работы [21] выбран нижний знак в p_{01} (4.6). Таким образом, переход атома р-Ps в долгоживущее состояние может носить пороговый характер, если в результате переходного процесса атом Ps перейдет из состояния, определяемого значениями физических величин (4.11) и (5.14), в состояние с $n_{01} = n_{02} = 3/2$. При этом согласно (5.12) время $\tau_{2\gamma}$ задает продолжительность оптического возбуждения атома Ps, при котором величины I_1 и I_2 принимают постоянные значения, т.е. переходные процессы в атоме Ps прекращаются и наступает стационарный режим.

Подставляя значение $M_1 \gg 1$ из (5.15) и (5.16) в уравнение (5.13), найдем значение параметра

$$\delta = 2 \frac{|S_1|}{\hbar} \sqrt{\frac{\delta_1}{\bar{L}_2 M_1}}. \quad (5.17)$$

Это равенство при $\delta \ll 1$ выполняется тем лучше, чем больше величина \bar{L}_2 . В соответствии с формулами (3.6б) и (2.29) величина \bar{L}_2 может быть представлена как

$$\bar{L}_2 = \left(\frac{N_5 N_6}{\tau} \right) \sin \left[\left(\frac{2d}{\hbar} \right) E_0 \tau_{2\gamma} \right],$$

где $N_5 N_6 = N$, N_5, N_6 – числа фотонов оптической накачки для двухфотонного возбуждения перехода $1 \leftrightarrow 2$, τ – время жизни метастабильного состояния ns по отношению к двухфотонному высвечиванию оптических фотонов, d – эффективный дипольный момент перехода [22], E_0 – напряженность эффективного электрического поля, действующего на атом Ps, $E_0 = (E_{05} E_{06})^{1/2}$, где E_{05}, E_{06} – соответствующие напряженности поля фотонов мод 5 и 6. Число фотонов N_5, N_6 можно определить из равенства

$$\frac{E_5^2}{4\pi} = \frac{N_5 \hbar \omega_5}{V_R},$$

где согласно формуле (4.4) $V_R = 1.599617 \cdot 10^{-17} \text{ см}^3$.

Значительный интерес представляет исследование перехода атома p-Ps в долгоживущее состояние. Для этого необходимо решить уравнения (5.9), (5.10) и последовательно учесть переходные и стационарные процессы взаимодействия атома p-Ps с полем оптических и аннигиляционных фотонов. Этой важной проблеме будет посвящена наша следующая статья.

6. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

В данной статье выведены гейзенберговские уравнения движения для фотонных (2.2) и атомных (2.3б), (2.4б) операторов на основе эффективного гамильтониана электрон-позитронной системы (2.1). Эти уравнения образуют замкнутую систему уравнений и применены для описания временного поведения процесса двухфотонной аннигиляции атома p-Ps при однофотонном или двухфотонном возбуждении некоторого состояния с помощью оптического лазера. В качестве исходного состояния рассматривается $1s$ -состояние атома p-Ps. Основным результатом данной статьи являются вывод нелинейных уравнений (3.8), (5.9), (5.10) и доказательство существования долгоживущего состояния атома p-Ps, время жизни которого может быть в сотни раз больше времени жизни свободного атома p-Ps, аннигилирующего на два гамма-фотона из чистого $1s$ -состояния.

Долгоживущее состояние атома Ps является связанным состоянием фотонных и электрон-позитронных полей, операторы которых подчиняются системе уравнений (2.2)–(2.4) при выполнении законов сохранения (2.6) и (2.7).

Решение операторных уравнений движений проведено в рамках адиабатического приближения, основанного на выделении в фотонных и атомных операторах медленной части в соответствии с выражениями (2.9). Важное значение имеет преобразование (2.15), (2.16), которое позволяет полностью учесть влияние аннигиляционных фотонов в образовании связанного фотон-атомного состояния. Аналогичное преобразование имеет место и для оптических фотонов, поэтому в величинах p_{01}, p_{02} (4.6) и p_{03} (2.22б) содержатся произвольные степени постоянных взаимодействия S_1, S_2 и G атома p-Ps с полем аннигиляционных и оптических фотонов. Фотонные операторы (2.17), (2.19а) и (2.22а) содержат вакуумную часть и индуцирующую часть, связанную с операторами интенсивности $P_1^+ P_1$ и $P_2^+ P_2$ атома Ps в состояниях 1 и 2 соответственно.

В операторах (2.22а) оптических фотонов также можно выделить три составные части с различными физическими свойствами, которые определяются параметрами ℓ_0 и p_{03} . При $p_{03} \rightarrow 0$ и совпадении оператора $P_1^+ P_2$ с оператором переворачивания эффективного спина [14] операторы (2.22а) совпадают с соответствующими фотонными операторами, описывающими спонтанное излучение двухуровневого атома [14]. Полученные свойства фотонных операторов являются следствием применения бозонных и фотонных соотношений коммутации, взятых в одинаковые моменты времени, и решения операторных уравнений (2.2).

С помощью фотонных операторов (2.17), (2.19а), (2.22а) и (2.28а) после необходимых вычислений, включающих нормальное упорядочение операторов, учет многомодовости фотонных полей и вакуумное усреднение, выведена система нелинейных дифференциальных уравнений (3.8) для средних чисел заполнения состояний 1 и 2 атома Ps. При этом предполагается, что затравочных аннигиляционных фотонов нет, а вакуумные средние операторов чисел заполнения оптических фотонов отличны от нуля. Нелинейность уравнений (3.8) обусловлена квантовыми переходами между состояниями 1 и 2 атома Ps при воздействии оптических фотонов.

Величины p_{01} и p_{02} из (4.6) определяют взаимное влияние аннигиляционных фотонов при распаде соответствующих состояний 1 и 2 атома Ps. При малых временах $\tau_{2\gamma}$, когда $\tau_{2\gamma}$ приблизительно совпадает со временем жизни свободного атома позитрония $\tau_{2\gamma}^{(0)} = [W_{2\gamma}^{(0)}(1)]^{-1}$, роль величин p_{01} и p_{02} в аннигиляционном распаде атома Ps незначительна. Наибольшее значение взаимное влияние аннигиляционных фотонов друг на друга будет проявляться при больших временах наблюдения $\tau_{2\gamma}$, когда $\tau_{2\gamma} \gg \tau_{2\gamma}^{(0)}$. В этом случае величина $M_1 = (|S_1|/\hbar)^2 \tau_{2\gamma}^2$ может быть больше единицы. Возникает процесс, обратный аннигиляционному распаду, когда под действием гамма-фотонов возможно рождение атома Ps в состоянии 1. Таким образом, в уравнениях движения (3.8) присутствует пороговое условие, связанное с переходом величины M_1 через единицу при изменении длительности $\tau_{2\gamma}$ рассматриваемого процесса взаимодействия атома Ps с полем аннигиляционных и оптических фотонов.

Величина M_1 , характеризующая обратное влияние аннигиляционных фотонов на атом Ps в состояниях 1 и 2, зависит от времени $\tau_{2\gamma}$ наблюдения аннигиляционного процесса. При исследовании временного поведения аннигиляционного процесса время $\tau_{2\gamma}$ играет роль параметра, связанного с процессом аннигиляции.

В нестационарном решении уравнений (3.8) получено выражение для $\tau_{2\gamma}$ (4.10). В стационарном решении уравнений (5.9) и (5.10) величина $\tau_{2\gamma}$ вычисляется с помощью условия (5.14). Таким образом, в рассматриваемой теории атома Ps время $\tau_{2\gamma}$ наблюдения процесса приобретает конкретный физический смысл, в отличие от теории свободного атома Ps, где описание проводится на основе теории возмущений и невозможно проследить кинетику распада.

Действие оптических фотонов на атом Ps изменяет числа заполнения состояний 1 и 2. Наряду с этим происходит взаимодействие атома Ps с полем аннигиляционных фотонов, которое включает в себя взаимное влияние фотонов и обычный аннигиляционный

распад. Конкуренция этих процессов может привести к неэкспоненциальной временной зависимости величины $n_1 + n_2$. В данной статье рассмотрен наиболее интересный случай, когда происходит компенсация всех указанных процессов и возникает стационарное решение уравнений движения (5.9), (5.10), которое позволяет оценить значение числа оптических фотонов N , необходимого для реализации долгоживущего состояния атома Ps.

Благодарности. Работа поддержана грантом в системе Министерства образования Российской Федерации по итогам конкурса 1997 г., грантом Федеральной целевой программы “Государственная поддержка интеграции высшего образования и фундаментальной науки на 1997–2000 г.”, а также частично грантом Российского фонда фундаментальных исследований.

Список литературы

- [1] В. И. Гольданский. Физическая химия позитрона и позитрония. М.: Наука, 1968.
- [2] A. Rich. Rev. Mod. Phys. 1981. V. 53. P. 127.
- [3] Л. А. Ривлин. Квантовая электроника. 1974. Т. 1. С. 2066.
- [4] E. P. Liang, C. D. Dermer. Opt. Commun. 1988. V. 65. P. 419.
- [5] О. Н. ГадоМСкий, Р. А. Власов. ДАН СССР. 1990. Т. 311. С. 1115.
- [6] О. Н. ГадоМСкий, К. В. Крутицкий. Laser Phys. 1995. V. 5. P. 379.
- [7] Р. А. Власов, О. Н. ГадоМСкий, В. В. Самарцев. ТМФ. 1989. Т. 79. С. 423.
- [8] J. Pirenne. Arch. Sci. Phys. Natur. 1946. V. 28. P. 233.
- [9] K. P. Ziock, C. D. Dermer, R. H. Howell. J. Phys. B. 1990. V. 23. P. 329.
- [10] О. Н. ГадоМСкий. ЖЭТФ. 1994. Т. 106. С. 57.
- [11] О. Н. ГадоМСкий. ЖЭТФ. 1996. Т. 110. С. 1228.
- [12] О. Н. ГадоМСкий, С. Г. Мусеев. ЖЭТФ. 1998. Т. 113. С. 471.
- [13] A. Karlson, M. H. Mittleman. J. Phys. B. 1996. V. 29. P. 4609.
- [14] Л. Аллен, Дж. Эберли. Оптический резонанс и двухуровневые атомы. М.: Мир, 1978.
- [15] С. Г. Каршенбойм. ЖЭТФ. 1993. Т. 103. С. 1105.
- [16] А. С. Елтовский, А. И. Мильштейн, И. Б. Хрипович. ЖЭТФ. 1994. Т. 105. С. 299.
- [17] В. Б. Берестецкий, Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский. Квантовая электродинамика. М.: Наука, 1989.
- [18] А. И. Ахиезер, В. Б. Берестецкий. Квантовая электродинамика. М.: Физматгиз, 1959.
- [19] В. Гайтлер. Квантовая теория излучения. М.: ИЛ, 1956.
- [20] А. С. Давыдов. Квантовая механика. М.: Физматгиз, 1963.
- [21] A. H. Al-Ramadhan, D. W. Gidley. Phys. Rev. Lett. 1994. V. 72. P. 1632.
- [22] Т. Хэни. Нелинейная спектроскопия высокого разрешения атомов и молекул. В сб.: Нелинейная спектроскопия. Ред. Н. Бломберген. М.: Мир, 1979. С. 41–118.

Поступила в редакцию 17.VIII.1999 г.,
после доработки 14.XII.1999 г.