I. V. Skrypnik,
Solvability of boundary-value problems for nondivergent nonlinear elliptic equations, *Zap. Nauchn. Sem. LOMI*, 1979, Volume 84, 243–251

И.В.Скрыпник

РАЗРЕШИМОСТЬ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ НЕДИВЕРГЕНТНЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Применение топологических методов Лере-Шаудера [I] к исследованию разрешимости нелинейных эллиптических задач требует предварительного сведения граничных задач к операторному уравнению вида $u+Tu=0$ с вполне непрерывным оператором T. Подобное сведение затруднительно в случае задачи Дирихле для общего нелинейного уравнения (см. [2]) и особенно сложно в случае задач с нелинейными граничными условиями. В монографии [3] показано, что стандартное сведение в случае нелинейной задачи Неймана приводит к операторному уравнению $u+Fu=0$ с непрерывным, но, вообще говоря, некомпактным оператором F. И поэтому для сведения задач к уравнению с вполне непрерывным оператором требуются дополнительные построения, связанные с изучением некоторых вспомогательных задач.

В данной работе вводятся топологические характеристики общих нелинейных эллиптических граничных задач, основанные на введенном в монографии автора [4] вращении векторных полей. Введение этих характеристик не требует никаких дополнительных построений и не требует предварительного сведения граничных задач к операторному уравнению вида $u+Tu=0$ с вполне непрерывным оператором T. Введенные характеристики позволяют исследовать разрешимость граничных задач и ветвление решений задач с параметром.

I. Далее Ω - ограниченная область в R^n с бесконечно дифференцируемой границей $\partial\Omega$, $n_0=[\frac{n}{2}]+1$, $m, m_1, \dots m_m$ - неотрицательные целые числа, $m>0$, $m_j<2m$, $M(q)$ - число различных мультииндексов с n компонентами длины не большей, чем q.

Пусть функции $\mathcal{F}:\bar\Omega\times R^{M(2m)}\to R^1, G_j:\bar\Omega\times R^{M(m_j)}\to R^1$, $j=1,\dots,m$ принадлежат соответственно пространствам $C^{\ell+1}, C^{\ell+2m-m_j+1}$, $\ell\geqslant n_0$ и удовлетворяют при некотором δ, $0<\delta<\frac{1}{2}$ условиям:

I) для произвольной функции $v(x)\in C^{2m,\delta}(\bar\Omega)$ оператор

$$\mathfrak{U}_v: H^{2m}(\Omega)\to H^{2m}(\Omega,\partial\Omega)=L_2(\Omega)\times H^{2m-m_1-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)\times\dots\times H^{2m-m_m-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$$

$$\mathcal{U}_v(u)=(L_v u,\ B_{1,v}u,\dots,B_{m,v}u),$$

$$L_v u=\sum_{|\alpha|\le 2m}\mathcal{F}_\alpha(x,v,\dots,\mathcal{D}^{2m}v)\mathcal{D}^\alpha u,\quad B_{j,v}u=\sum_{|\beta|\le m_j}G_{j,\beta}(x,v,\dots,\mathcal{D}^{m_j}v)\mathcal{D}^\beta u\Big|_{x\in\partial\Omega} \tag{I}$$

эллиптичен и фредгольмов (см. [5]);

2) существует функция $H:\bar\Omega\times R^{M(2m-1)}\to R^1$ класса C^ℓ такая, что при произвольной функции $v\in C^{2m,\delta}(\bar\Omega)$ задача

$$L_v u+M_v u=0,\ x\in\Omega,\ B_{j,v}u=0,\ j=1,\dots,m,\ x\in\partial\Omega \tag{2}$$

имеет только нулевое решение в $C^{2m,\delta}(\bar\Omega)$. Здесь

$$M_v u=\sum_{|\gamma|\le 2m-1}H_\gamma(x,v,\dots,\mathcal{D}^{2m-1}v)\mathcal{D}^\gamma u.$$

В I),2) использованы следующие обозначения:

$$\mathcal{F}_\alpha(x,\xi)=\frac{\partial\mathcal{F}(x,\xi)}{\partial\xi_\alpha},\quad G_{j,\beta}(x,\eta_j)=\frac{\partial G_j(x,\eta_j)}{\partial\eta_\beta},\quad H_\gamma(x,\xi)=\frac{\partial H(x,\xi)}{\partial\xi_\gamma},$$

$H^s(\Omega)=W_2^s(\Omega)$ – пространство Соболева, $\mathcal{D}^k u=\{\mathcal{D}^\alpha u:|\alpha|=k\}$,

$$\mathcal{D}^\alpha u=\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1}\cdots\left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n}u\quad,\ \text{если}\ \alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_n).$$

Пусть $\mathcal{D}$ – произвольная ограниченная область в пространстве $H^{\ell+2m}(\Omega)$ с границей $\partial\mathcal{D}$; $f(x)$, $g_j(x)$ – фиксированные элементы пространств $H^\ell(\Omega)$, $H^{\ell+2m-m_j-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ и предположим, что граничная задача

$$\mathcal{F}(x,u,\dots,\mathcal{D}^{2m}u)=f(x),\ x\in\Omega,$$

$$G_j(x,u,\dots,\mathcal{D}^{m_j}u)=g_j(x),\ x\in\partial\Omega,\ j=1,\dots,m \tag{3}$$

не имеет решений, принадлежащих $\partial\mathcal{D}$.

Определим нелинейный оператор $A:\bar{\mathcal{D}}\to[H^{\ell+2m}(\Omega)]^*$ равенством

$$\langle Au,\varphi\rangle=(\mathcal{F}(x,u,\ldots,\mathcal{D}^{2m}u)-f(x),\ L_u\varphi+M_u\varphi)_{\ell,\Omega}+$$

$$+\sum_{j=1}^{m}(G_j(x,u,\ldots,\mathcal{D}^{m_j}u)-g_j(x),\ B_{j,u}\varphi)_{\ell+2m-m_j-\frac{1}{2},\partial\Omega}, \tag{4}$$

где $(\cdot,\cdot)_{\ell,\Omega}$, $(\cdot,\cdot)_{s,\partial\Omega}$ - соответственно скалярные произведения в простанствах $H^{\ell}(\Omega)$, $H^{s}(\partial\Omega)$.

Здесь и далее для произвольного банахова пространства X через X^* обозначено сопряженное к X пространство, для элементов $h\in X^*$, $\varphi\in X$ через $\langle h,\varphi\rangle$ обозначено действие функционала h на элементе φ.

Для дальнейшего существенное значение имеют два следующих определения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ I. Пусть $\mathcal{D}$ - произвольная область банахова пространства X и $A:\overline{\mathcal{D}}\to X^*$ - нелинейный оператор. Говорим, что оператор A удовлетворяет в $\overline{\mathcal{D}}$ условию α) (см. [4]), если для произвольной последовательности $u_n\in\overline{\mathcal{D}}$, слабо сходящейся к u_0 в X из $\lim\limits_{n\to\infty}\langle Au_n,u_n-u_0\rangle\leqslant 0$ следует сильная сходимость u_n к u_0.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2 [6]. В условиях определения I говорим, что оператор $A:\overline{\mathcal{D}}\to X^*$ удовлетворяет условию α_0), если для произвольной последовательности $u_n\in\overline{\mathcal{D}}$, слабо сходящейся к u_0, из $\lim\limits_{n\to\infty}\langle Au_n,u_n-u_0\rangle\leqslant 0$ и слабой сходимости Au_n к нулю следует сильная сходимость u_n и u_0.

ТЕОРЕМА I. Определенный равенством (4) оператор $A:\overline{\mathcal{D}}\to[H^{\ell+2m}(\Omega)]^*$ непрерывен, ограничен и удовлетворяет условию α).

Выше предполагалось, что задача (3) не имеет решений, принадлежащих $\partial\mathcal{D}$. Отсюда, в силу условий I),2) получаем, что $Au\neq 0$ при $u\in\partial\mathcal{D}$. Из теоремы I и работы [4] следует, что определено вращение векторного поля Au на $\partial\mathcal{D}$, которое и будет приниматься в качестве топологической характеристики задачи (3).

Пусть $\mathfrak{U}:H^{\ell+2m}(\Omega)\to H^{\ell+2m}(\Omega,\partial\Omega)$- нелинейный оператор, определяемый равенством

$$\mathfrak{U}(u)=(\mathfrak{F}(x,u),\ldots,\mathfrak{D}^{2m}u)-f(x),G_1(x,u,\ldots,\mathfrak{D}^{m_1}u)-g_1(x)\Big|_{x\in\partial\Omega}$$

$$H^{l+2m}(\Omega,\partial\Omega)=H^{l}(\Omega)\times H^{l+2m-m_1-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)\times\ldots\times H^{l+2m-m_m-\frac{1}{2}}(\partial\Omega).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Вращением $\gamma(\mathfrak{U}(u),\partial\mathfrak{D})$ векторного поля $\mathfrak{U}(u)$ на $\partial\mathfrak{D}$ называется вращение на $\partial\mathfrak{D}$ векторного поля Au.

2. Вращение поля $\mathfrak{U}(u)$ является гомотопическим инвариантом и обладает всеми обычными свойствами вращения, что непосредственно следует из [4]. В частности, справедлив

Принцип ненулевого вращения. Для того, чтобы задача (3) имела решение в области $\mathfrak{D}$ достаточно, чтобы вращение поля $\mathfrak{U}(u)$ на $\partial\mathfrak{D}$ было отличным от нуля.

Дословно переносятся на $\gamma(\mathfrak{U}(u),\partial\mathfrak{D})$ достаточные признаки отличия от нуля вращения, формула индекса критической точки.

Ограничимся формулировкой только одного из возможных следствий - условной теоремы существования.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\tilde{\mathfrak{F}}:[0,1]\times\bar{\Omega}\times R^{M(2m)}\to R^1$, $\tilde{G}_j:[0,1]\times\bar{\Omega}\times R^{M(m_j)}\to R^1$, $j=1,\ldots,m$ - непрерывные отображения. Предположим, что при каждом $t\in[0,1]$ функции $\mathfrak{F}_t(x,\xi)=\tilde{\mathfrak{F}}(t,x,\xi)$, $G_{j,t}(x,\xi_j)=\tilde{G}_j(t,x,\xi_j)$ удовлетворяют всем предположениям п.I и выполнены условия:

а) существует положительная постоянная K такая, что для $t\in[0,1]$, $u\in H^{l+2m}(\Omega)$ из

$$\mathfrak{F}_t(x,u,\ldots,\mathfrak{D}^{2m}u)=tf(x),\ G_{j,t}(x,u,\ldots,\mathfrak{D}^{m_j}u)\Big|_{\partial\Omega}=tg_j(x),\quad j=1,\ldots,m$$

следует $\|u\|_{l+2m}\leqslant K$

б) $\mathfrak{F}_0(x,-\xi)=-\mathfrak{F}_0(x,\xi)$, $G_{j,0}(x,-\eta_j)=-G_{j,0}(x,\eta_j)$.

Тогда задача

$$\mathcal{F}_1(x,u,\ldots,\mathcal{D}^{2m}u)=f(x),\ G_{j,1}(x,u,\ldots,\mathcal{D}^{m_j}u)\Big|_{\partial\Omega}=g_j(x),\quad j=1,\ldots,m$$

имеет, по крайней мере, одно решение в $H^{\ell+2m}(\Omega)$.

Отметим, что в этой и следующих теоремах получаемые решения являются классическими в силу вложения соболевских пространств в гельдеровские при рассматриваемых значениях параметров.

3. Ограничимся несколькими замечаниями, касающимися определения вращения в более общих условиях, чем в п.I, а также более простого определения вспомогательного оператора A в случае граничных данных Дирихле.

В п.I было определено вращение векторного поля $\mathcal{U}(u)$ на $\partial\mathcal{D}\subset H^{\ell+2m}(\Omega)$ при $\ell\geqslant n_0$, что требовало высокой гладкости функций $\mathcal{F}(x,\xi)$, $G_j(x,\eta_j)$. Можно уменьшить условия гладкости функций $\mathcal{F}, G_j$, считая их соответственно принадлежащими пространствам C^{2}, C^{2+2m-m_j}, путем введения в рассмотрение соответствующего векторного поля в пространстве $W_p^{2m+1}(\Omega), p>n$.

В [6] определяется вращение векторного поля в случае операторов, удовлетворяющих условию $\mathcal{L}_0$). Это позволяет повторить все предыдущие рассуждения, если оператор $\mathcal{U}_v$ эллиптичен и фредгольмов не для всех $v\in C^{2m,\delta}(\bar{\Omega})$, а только для функций $v(x)$, являющихся решениями задачи (3).

Введенное выше вращение векторного поля определяется конструкцией отображения A и при конкретном вычислении вращений желательно иметь по возможности более простое представление для соответствующих отображений. Используя доказанное в [7] неравенство коэрцитивности для пар линейных эллиптических операторов, можно ввести топологическую характеристику нелинейной задачи Дирихле более простым способом (см. [8]).

4. Укажем применение развитого выше метода к доказательству разрешимости нелинейных граничных задач. В данном пункте устанавливается существование регулярных вплоть до границы области решений задачи Дирихле для уравнений Монжа-Ампера и некоторых их обобщений. Эти результаты получены совместно с аспирантом А.Е.Шишковым.

Пусть K – круг радиуса R с центром в начале координат с границей ∂K. Рассмотрим в K задачу Дирихле

$$u_{xx}u_{yy}-u_{xy}^2=\varphi\Big(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}\Big),\ (x,y)\in K \tag{5}$$

$$u\big|_{\partial K} = g(x,y). \tag{6}$$

Предполагается, что $g(x,y)\in C^{4,\lambda}(\partial K)$, $\varphi(x,y,u,p,q)$ – положительная функция класса $C^{2,\lambda}(G)$, $0<\lambda<1$, $G=\{x,y,u,p,q:(x,y)\in\bar K, u,p,q\in R^1\}$, удовлетворяющая условиям:

a) $\varphi(x,y,u,p,q)<\Phi(x^2+y^2)f(p^2+q^2)$, если $u\leq m=\max\limits_{(x,y)\in\partial K} g(x,y)$

в) $\displaystyle\iint\limits_K \Phi(x^2+y^2)\,dx\,dy < \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \inf_{(\xi-p)^2+(\eta-q)^2<M_H} f^{-1}(\xi^2+\eta^2)\,dp\,dq,$

где M_H – нижнее извивание кривой, определяемой условием (6) (определение извивания см. в [9]).

Существование регулярного в замкнутой области $\bar K$ решения задачи (5),(6) доказано в работе [9] методом Ньютона-Канторовича при условиях а), в) и дополнительном предположении:

$$\frac{\partial}{\partial u}\varphi(x,y,u,p,q)\geqslant 0. \tag{7}$$

В настоящей работе устанавливается существование регулярного в $\bar K$ решения задачи (5),(6) без предположения (7). Отметим, что в работах [9,10] доказывается существование обобщенного решения задачи (5),(6) без предположения (7). Однако регулярность обобщенного решения доказывается в [9,10] только для внутренних точек K.

Обозначим через $H_4^+(K)$ совокупность функций, принадлежащих $W_2^4(K)$ и удовлетворяющих условиям:

$$u_{xx}u_{yy}-u_{xy}^2>0,\quad u_{xx}>0,\quad (x,y)\in\bar K.$$

ТЕОРЕМА 3. Пусть $g(x,y)\in C^{4,\lambda}(\partial K)$, $\varphi(x,y,u,p,q)\in C^{2,\lambda}(G)$ и выполнены условия а), в). Тогда задача (5),(6) имеет решение в $H_4^+(K)$.

При доказательстве теоремы задача (5)-(6) включается в параметрическое семейство задач

$$u_{xx}u_{yy}-u_{xy}^2=t\varphi(x,y,u,u_x,u_y)+(1-t)\Phi(x^2+y^2)f(|\nabla u|^2),\quad (x,y)\in K.$$

$$u\big|_{\partial K}=tg(x,y),\quad 0\leqslant t\leqslant 1.$$

Приложение развитого выше топологического метода основано на имеющихся в [9] априорных оценках решений уравнения Монжа-Ампера.

Установлена также разрешимость задачи Дирихле

$$u_{xx}u_{yy}-u_{xy}^2-[Au_{xx}+2Bu_{xy}+Cu_{yy}+\mathcal{D}]=0, \quad (x,y)\in K \tag{8}$$

$$u\big|_{\partial K}=0, \tag{9}$$

где $A,B,C,\mathcal{D}$ – функции x,y,u,u_x,u_y класса C^2. Предполагается выполненным условие сильной эллиптичности уравнения (8), которое, как известно, обеспечивается неравенствами

$$AC-B^2>0, \quad \mathcal{D}>0, \quad A>0$$

при $(x,y)\in K$, всевозможных значениях u, u_x, u_y. Существование обобщенных решений задачи (8),(9) при определенных ограничениях на коэффициенты уравнения (8) и их регулярность внутри K доказана в [10]. Нами же установлено существование решения из $W_2^4(K)$, т.е. гладкого вплоть до границы K.

В отличии от задачи (5),(6), существование решения которой было основано на известных априорных оценках, при изучении задачи (8),(9) основное внимание было посвящено получению оценок решений. Были установлены априорные оценки в $W_2^4(K)$ решений некоторой параметрической задачи, а затем применен топологический подход для доказательства теоремы существования. При этом нет условия на знак производной $\mathcal{D}_q$.

Ограничимся только формулировкой условия ограниченности первых производных задачи (8),(9).

ТЕОРЕМА 4. Пусть выполнены условия:

a) $A(x,y,u,p,q),\ C(x,y,u,p,q),\ |B(x,y,u,p,q)|<\varphi_1(p^2+q^2)$;

в) $\mathcal{D}(x,y,u,p,q)<\varphi(x^2+y^2)\,\varphi_2(p^2+q^2)$;

c) функция $\varphi_1(t)\cdot\varphi_2^{-1}(t)$ не возрастает;

d) $$\int_0^R r\varphi(r^2)\,dr+R\int_0^\infty \frac{\varphi_1(t^2)}{\varphi_2(t^2)}\,dt<\frac{1}{r}\int_0^\infty\frac{dt}{\varphi_2(t^2)}.$$

Тогда существует такая постоянная C_0, что для решений задачи (8),(9), принадлежащей $C^2(K)$, выполнена априорная оценка $\|u\|_{C^1(\bar K)}\leqslant C_0$.

5. В этом пункте устанавливается разрешимость задачи Дирихле для общего нелинейного эллиптического уравнения в узкой полосе.

Далее $\{\Omega_h\ ,\ 0\leqslant h\leqslant 1\}$ – семейство областей класса C^∞ таких, что

а) $\Omega_{h_1}\subset\Omega_{h_2}$ при $h_1<h_2$;

в) существуют отрытое покрытие $\{\mathcal{U}_i, i=1,\dots,I\}$ множества $\bar\Omega_1$ и диффеоморфизмы $\varphi_i:\mathcal{U}_i\cap\bar\Omega_1\to R^n$ класса C^∞, при которых $\varphi_i(\mathcal{U}_i\cap\bar\Omega_h)=S_h=\{y\in R^n:|y'|\leqslant 1,\ 0\leqslant y_n\leqslant h,\ y'=(y_1,\dots,y_{n-1})\}$.

Пусть $\{\psi_i(x)\}$, $i=1,\dots,I$ – подчиненное покрытию $\{\mathcal{U}_i\}$ разбиение единицы.

Обозначим через $W_p^{2m,\ell,k}(\Omega_h)$ замыкание множества бесконечно дифференцируемых в Ω_h функций по норме

$$\|u\|^p_{W_p^{2m,\ell,k}(\Omega_h)}=\sum_{i=1}^{I}\sum_{|\alpha|\leqslant 2m}\int_{S_h}\Big\{\sum_{\tau=0}^{k}|\mathcal{D}_h^\tau\mathcal{D}^\alpha v_i(y)|^p+\sum_{|\beta|\leqslant\ell}{}'|\mathcal{D}^\alpha\mathcal{D}^\beta v_i(y)|^p\Big\}dy,$$

где $v_i(y)=\psi_i(\varphi_i^{-1}(y))\cdot u(\varphi_i^{-1}(y))$, $\sum'$ обозначает суммирование по всем тем мультииндексам, последняя координата которых равна нулю.

Изучается разрешимость в $W_2^{2m,\ell,1}(\Omega_h)$, $\ell\geqslant n+1$, граничной задачи

$$\mathcal{F}(x,u,\dots,\mathcal{D}^{2m}u)=0,\quad x\in\Omega_h \tag{I0}$$

$$\mathcal{D}^\alpha u=0,\quad x\in\partial\Omega_h,\ |\alpha|\leqslant m-1 \tag{II}$$

в предположении, что $\mathcal{F}(x,\xi)\in C^\ell(\bar\Omega_1\times R^{M(2m)})$ и с некоторой положительной постоянной A при $x\in\bar\Omega_1$, $\xi\in R^{M(2m)}$, $\eta\in R^n$ выполнено неравенство

$$\sum_{|\alpha|=2m}\frac{\partial\mathcal{F}(x,\xi)}{\partial\xi_\alpha}\eta^\alpha\geqslant A|\eta|^{2m}.$$

В этих условиях справедлива

ТЕОРЕМА 5. Существует $h_0>0$ такое, что задача (I0),(II) имеет в $W_2^{2m,\ell,1}(\Omega_h)$, решение при $h\leqslant h_0$.

При доказательстве задача (I0),(II) включается в семейство задач

$$t\mathcal{F}(x,u,\dots,\mathcal{D}^{2m}u)+(1-t)(-\Delta)^m u=0,\ 0\leqslant t\leqslant 1,\ x\in\Omega_h \tag{12}$$

$$\mathcal{D}^\alpha u=0,\ \ x\in\partial\Omega_h,\ \ |\alpha|\leqslant m-1 \tag{13}$$

и устанавливается для всевозможных решений задачи (12),(13) априорная оценка в $W_2^{2m,\ell,1}(\Omega_h)$. Отсюда следует утверждение теоремы 5 в силу пунктов 1-3.

Анализ зависимости постоянной h_0 от данных задачи показывает, что условие малости h_0 не означает малости меры Ω_h и разрешимость задачи (10),(11) в условиях теоремы 5 может иметь место в области произвольной меры.

6. В заключение отметим, что развитым выше подходом установлены также теоремы существования решения нелинейной задачи Неймана для эллиптических уравнений второго порядка.

Литература

1. Лере Ж., Шаудер Ю. Топология и функциональные уравнения. - УМН,1946,№ 3-4,с.71-95.
2. Browder F.E. Topological methods for non-linear elliptic equations of arbitrary order. - Pacif.J.Math.,1966,17, № 1,p.17-31.
3. Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н. Линейные уравнения эллиптического порядка. М., "Наука",1973.
4. Скрыпник И.В. Нелинейные эллиптические уравнения высшего порядка. Киев, "Наукова думка",1973.
5. Агранович М.С. Эллиптические интегро-дифференциальные операторы. - УМН,1965,XX,№ 5,с.3-120.
6. Скрыпник И.В. Разрешимость и свойства решений нелинейных эллиптических уравнений. - В сб.:"Современные проблемы математики",М.,1976,изд.ВИНИТИ,с.131-254.
7. Скрыпник И.В. О неравенстве коэрцитивности для пар линейных эллиптических операторов. - ДАН СССР,1978,239,№ 2, с.275-278.
8. Скрыпник И.В. О топологической характеристике общих нелинейных эллиптических операторов. - ДАН СССР,1978,239,№ 3, с.538-541.
9. Бакельман И.Я. Геометрические методы решения эллиптических уравнений. М., "Наука",1965.
10. Погорелов А.В. Об уравнениях Монжа-Ампера эллиптического типа. Изд-во Харьков.ун-та,1960.