Л. А. Леонтьева, По поводу одного свойства системы функций, близких к степенным, *Матем. заметки*, 1972, том 12, выпуск 1, 29–36

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 12, № 1 (1972), 29—36

УДК 517.5

ПО ПОВОДУ ОДНОГО СВОЙСТВА СИСТЕМЫ ФУНКЦИЙ, БЛИЗКИХ К СТЕПЕННЫМ

Л. А. Леонтьева

Рассматривается система $\{f_n(x)=x^{\lambda_n}[1+\varepsilon_n(x)]\}$ на $[a, b]$ $(0 \leqslant a < b < \infty)$. При определенных условиях на $\lambda_n > 0$ и $\varepsilon_n(x)$, в числе которых — условие $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\dfrac{\ln m_n}{\lambda_n} > 0$, $m_n = \|\varepsilon_n(x)\|_{L_p[a, b]}$, имеется оценка для коэффициентов многочлена $P(x)=\sum c_n f_n(x)$ через $\|P(x)\|_{L_p[a,b]}$. Показывается, что без указанного выше условия (при сохранении прочих условий) упомянутая оценка не имеет места. Библ. 1 назв.

Предположим, что числа λ_n удовлетворяют условиям

$$0<\lambda_n \uparrow \infty, \quad \sum_1^\infty \frac{1}{\lambda_n}<\infty, \quad \overline{\lim_{\nu\to\infty}} \frac{1}{\lambda_\nu} \ln \frac{1}{|L'(\lambda_\nu)|}=0,$$

$$L(\lambda)=\prod_1^\infty\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_\nu}\right), \tag{1}$$

функции $\varepsilon_n(x)$ удовлетворяют условиям

$$\varepsilon_n(x) \in L_p[a, b], \quad \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln m_n}{\lambda_n}<0,$$

$$m_n=\|\varepsilon_n(x)\|_{L_p[a, b]} \qquad (1<p \leqslant \infty), \tag{2}$$

и имеется интервал (a', b') $(0 \leqslant a \leqslant a' \leqslant b' \leqslant b)$ такой, что если

$$\lim_{n\to\infty}\left\|\sum_{k=1}^n c_k f_k(x)\right\|_{L_p(a', b')}=0,$$

то $c_k = 0$ ($k = 1, 2, \ldots$) (последнее свойство назовем свойством единственности системы $f_n(x)$). При этих условиях в работе [1] была доказана

ТЕОРЕМА 1. *Каково бы ни было* β ($a < \beta < b$), *имеется постоянная* A, *зависящая от* $\{\lambda_k\}$, $\{\varepsilon_k(x)\}$ и β, *но не зависящая от многочлена*

$$P(x) = \sum\nolimits_{\nu=1} c_\nu f_\nu(x),$$

такая, что

$$|c_\nu| < \frac{A}{\beta^{\lambda_\nu}} \|P(x)\|_{L_p[a,b]} \qquad (1 < p \leqslant \infty;\ \nu = 1, 2, \ldots). \qquad (3)$$

В упомянутой работе доказано, что свойство единственности и условия (1) существенны для справедливости теоремы 1. Неясным оставался вопрос об условии (2). В данной работе доказывается, что и условие (2) не может быть ослаблено без потери оценки (3). Справедлива

ТЕОРЕМА 2. *Пусть задана функция* $\varphi(\lambda)$ ($0 < \varphi(\lambda) \uparrow \uparrow \infty$), $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} \frac{\ln \varphi(\lambda)}{\lambda} = 0$. *Существуют* $\{\lambda_n\}$ *и* $\{\varepsilon_n(x)\}$ *такие, что* 1) *удовлетворяются условия* (1); 2) $\varepsilon_n(x) \in L_p(1/2, 1)$ *и*

$$\varepsilon_n(x)\|_{L_p[1/2,1]} \leqslant \frac{c}{\varphi(\lambda_n)} \qquad (n = 1, 2, \ldots;\ 1 < p \leqslant \infty); \qquad (4)$$

3) *система* $\{f_n(x) = x^{\lambda_n}[1 + \varepsilon_n(x)]\}$ *обладает свойством единственности*; 4) *для любых* $A > 0$ *и* β ($1/2 < \beta < 1$) *найдется полином* $P(x) = \sum\nolimits_{\nu=1}^{n} c_\nu f_\nu(x)$, *у которого по крайней мере для одного коэффициента* c_ν *не выполняется оценка* (3).

Докажем сначала лемму.

ЛЕММА. *Пусть функции* $\varepsilon_n(x) \in L_p[a, b]$ ($p > 1$; $n = 1, 2, \ldots$), *и пусть*

$$d_n = \sup_{a \leqslant x \leqslant b} |\varepsilon_n(x)| \leqslant \frac{d}{\lambda_n},$$

где d — некоторая постоянная. Если

$$\lim_{n\to\infty}\left\|\sum_1^n c_k f_k(x)\right\|_{L_p[a,\, b]} = 0,$$

то на $[a, \gamma]$ $(\gamma < b)$ — равномерно сходится ряд

$$\sum_1^\infty c_k f_k(x)$$

и его сумма почти всюду равна нулю.

Доказательство. Из условий леммы вытекает

$$\|c_k f_k(x)\|_{L_p[\gamma,\, b]} = |c_k|\,\|f_k(x)\|_{L_p[\gamma,\, b]} < 1 \qquad (n \geqslant N),$$

$$\|f_k(x)\|_{L_p[\gamma,\, b]} \geqslant \|x^{\lambda_k}\|_{L_p[\gamma,\, b]} - \|x^{\lambda_k}\varepsilon_k(x)\|_{L_p[\gamma,\, b]} \geqslant$$

$$\geqslant \|x^{\lambda_k}\|_{L_p[\gamma,\, b]} - b^{\lambda_k}\|\varepsilon_k(x)\|_{L_p[\gamma,\, b]} \geqslant \left\{\frac{b^{p\lambda_k+1} - \gamma^{p\lambda_k+1}}{p\lambda_k+1}\right\}^{1/p} -$$

$$- b^{\lambda_k}\frac{d}{\lambda_k} > c\,\frac{b^{\lambda_k}}{\lambda_k^{1/p}} \qquad (c > 0;\ k > N).$$

Отсюда при больших n

$$|c_k| < \frac{1}{c}\,\lambda_k^{1/p} b^{-\lambda_k},$$

и, следовательно, ряд $\sum_1^\infty c_k f_k(x)$ равномерно сходится на $[a, \gamma]$ $(\gamma < b)$. Пусть его сумма равна $f(x)$. Из равномерной сходимости ряда вытекает, что он сходится к $f(x)$ в L_p на $[a, \gamma]$ $(\gamma < b)$. По условию он сходится к нулю в L_p на $[a, b]$. То же самое имеет место и на $[a, \gamma]$ $(\gamma < b)$. Поэтому $f(x)$ равна почти всюду нулю. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 2. Положим $\lambda_1 = 1$, $\lambda_{2n} = 2n\ln^2 2n$,

$$\lambda_{2n+1} = \lambda_{2n} + q_n, \quad q_n = \min\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{\lambda_{2n}}, \frac{1}{\varphi(\lambda_{2n}+1)}\right) \quad (n \geqslant 1).$$

Докажем, что для данной последовательности выполнено последнее из условий (1). Для этого представим $L'(\lambda_n)$ в виде

$$L'(\lambda_n) = \frac{1}{\lambda_n}\prod_{k\neq n}\left(1 - \frac{\lambda_n}{\lambda_k}\right) =$$

$$= \frac{1}{\lambda_n}\left(1 - \frac{\lambda_n}{\lambda_{n-1}}\right)\left(1 - \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}}\right)\Delta_n'\,\Delta_n'',$$

где

$$\Delta_n' = \prod_{k=1}^{n-2}\left(1-\frac{\lambda_n}{\lambda_k}\right), \quad \Delta_n'' = \prod_{j=n+2}^{\infty}\left(1-\frac{\lambda_n}{\lambda_j}\right).$$

Положим

$$e_n = \frac{n-2}{\lambda_{n-2}}, \qquad \delta_n = \max_{p\geqslant n}\frac{p}{\lambda_p}, \qquad A_n = \prod_{n+2}^{\infty}\left(1+\frac{\lambda_n}{\lambda_j}\right).$$

Сделаем соответствующие оценки. Имеем

$$\frac{1}{|\Delta_n'|} = \left|\left\{\prod_{j=1}^{n-2}\left(1-\frac{\lambda_n}{\lambda_j}\right)\right\}^{-1}\right| \leqslant \frac{\lambda_{n-2}^{2}}{\prod_{j=1}^{n-2}(\lambda_n-\lambda_j)} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\lambda_{n-2}^{n-2}}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot(n-2)} < \frac{\lambda_{n-2}^{n-2}(2e)^{n-2}}{(n-2)^{n-2}} = \left(\frac{2e}{e_n}\right)^{e_n\lambda_{n-2}} <$$

$$< \left(\frac{2e}{e_n}\right)^{e_n\lambda_n} = e^{\left(e_n \ln \frac{2e}{e_n}\right)\lambda_n}.$$

Мы здесь воспользовались оценкой $(\lambda_n-\lambda_j) > (n-j-1)$ $(1\leqslant j\leqslant n-2)$. Например, если n и j — нечетные числа, то

$$\lambda_n - \lambda_j = 2k\ln^2 2k + q_k - 2l\ln^2 2l - q_l >$$

$$> \ln^2 2k\,(2k-2l) - (q_l - q_k) > (2k+1) - (2l+1) - 1 = n - j - 1.$$

Аналогично рассматриваются другие случаи. Далее имеем

$$\frac{1}{\Delta_n'' A_n} = \prod_{n+2}^{\infty}\frac{\lambda_j^2}{\lambda_j^2-\lambda_n^2} =$$

$$= \prod_{n+2}^{\infty}\left(1+\frac{\lambda_n^2}{(\lambda_j-\lambda_n)(\lambda_j+\lambda_n)}\right) < \prod_{n+2}^{\infty}\left(1+\frac{\lambda_n}{p(j-n)\lambda_j}\right) =$$

$$= \prod_{p=2}^{\infty}\left(1+\frac{\lambda_n^2}{p\lambda_{p+n}}\right) = \prod_{n+2}^{\infty}\left(1+\frac{\lambda_n^2(p+n)}{p(p+n)\lambda_{p+n}}\right) <$$

$$< \prod_{1}^{\infty}\left(1+\frac{\lambda_n^2\delta_n}{p^2}\right) = \sin \pi i\sqrt{\delta_n}\lambda_n < e^{\pi\lambda_n\sqrt{\delta_n}}.$$

Учтем, что

$$A_n < e^{\tilde{\varepsilon}_n\lambda_n} \qquad (\tilde{\varepsilon}_n \to 0;\ n\to\infty).$$

При четном n

$$\left(\frac{\lambda_n}{\lambda_{n-1}}-1\right)^{-1}=\frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n-\lambda_{n-1}}<\lambda_{n-1}<\lambda_n,$$

$$\left(1-\frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}}\right)^{-1}=\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_{n+1}-\lambda_n}=\frac{2\lambda_n}{q_{n/2}}<\frac{2\lambda_n}{q_n}.$$

При нечетном n

$$\left(\frac{\lambda_n}{\lambda_{n-1}}-1\right)^{-1}=\frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n-\lambda_{n-1}}<\frac{2\lambda_n}{q_{n-1/2}}<\frac{2\lambda_n}{q_n},$$

$$\left(1-\frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}}\right)^{-1}=\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_{n+1}-\lambda_n}<2\lambda_n.$$

В обоих случаях

$$\left(1-\frac{\lambda_n}{\lambda_{n-1}}\right)^{-1}\left(1-\frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}}\right)^{-1}<\frac{4\lambda_n^2}{q_n}.$$

Из всех этих оценок получаем

$$\left|\frac{1}{L'(\lambda_n)}\right|<\frac{2\lambda_n^3}{q_n}\,e^{\left(\tilde{\varepsilon}_n+e_n\ln\frac{2e}{e_n}+\pi\sqrt{\delta_n}\right)\lambda_n},$$

и, следовательно, условие (1) выполнено. Определим функции $\varepsilon_n(x)$. Положим

$$\varepsilon_{2n}(x)=\frac{x^{\lambda_{2n+1}}-x^{\lambda_{2n}}+\rho_n x^{\mu_n}}{x^{\lambda_{2n+1}}+x^{\lambda_{2n}}},\qquad \varepsilon_{2n+1}(x)=-\varepsilon_{2n}(x),$$

где $\rho_n=\dfrac{o(q_n)}{2^{\lambda_{2n}}}$, а μ_n выбраны под условием

$$\lambda_{2n}<\mu_n<\mu_n+q_n<\lambda_{2n+1}.$$

Для $\varepsilon_n(x)$ на $[1/2, 1]$ выполнено условие (4). Действительно, на отрезке $[1/2, 1]$ имеем

$$|\varepsilon_{2n}(x)|=\left|\frac{x^{q_n}-1}{1+x^{q_n}}+\frac{\rho_n x^{\mu_n}}{x^{\lambda_{2n+1}}+x^{\lambda_{2n}}}\right|<$$

$$<\frac{\rho_n x^{\mu_n}}{2x^{\lambda_{2n}}}+\frac{1-x^{q_n}}{1+x^{q_n}}<\frac{\rho_n}{2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{\lambda_{2n}}}+\frac{\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{q_n}\right]}{1}<$$

$$<\rho_n 2^{\lambda_{2n}}+\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{q_n}\right]<Cq_n,$$

$$|\varepsilon_{2n+1}(x)|=|\varepsilon_{2n}(x)|<Cq_n,$$

причем

$$q_n \leqslant \frac{1}{\varphi(\lambda_{2n}+1)} < \frac{1}{\varphi(\lambda_n)}, \qquad q_n < \frac{1}{\lambda_{2n}}.$$

Образуем теперь систему $\{f_n(x)\}$, полагая $f_n(x) = x^{\lambda_n}[1+\varepsilon_n(x)]$. Функции $f_n(x)$ определены на интервале $(0, 1)$ и

$$f_{2n}(x) = \frac{2x^{\lambda_{2n+1}} + \rho_n x^{\mu_n}}{1+x^{q_n}}, \qquad f_{2n+1} = \frac{2x^{\lambda_{2n+1}} - \rho_n x^{\mu_n+q_n}}{1+x^{q_n}}.$$

Проверим условие единственности для системы $\{f_n(x)\}$, т. е. покажем, что $c_k = 0$ $(k = 1,2, \ldots)$, как только $\left\|\sum_1^\infty c_k f_k(x)\right\|_{L_p[1/2,1]} = 0$. Для этого сначала докажем, что система $\{f_n(x)\}$ (функции $f_n(x) \in C[1/2, 1]$) обладает свойством единственности в пространстве $C[1/2, 1]$. Пусть ряд $\sum_1^\infty c_k f_k(x)$ сходится к нулю на отрезке $[1/2, 1]$. Из сходимости ряда $\sum_1^\infty c_k f_k(x)$ в точке $x = 1$ следует, что

$$|c_k| < M \qquad (k = 1,2, \ldots). \tag{5}$$

Введем функции

$$\tilde{f}_{2n}(z) = \frac{2z^{\lambda_{2n+1}} + \rho_n z^{\mu_n}}{1+z^{q_n}}, \qquad \tilde{f}_{2n+1}(z) = \frac{2z^{\lambda_{2n+1}} - \rho_n z^{\mu_n+q_n}}{1+z^{q_n}}.$$

В области $0 < |z| < 1$, $|\arg z| < \pi/2$ функции $\tilde{f}_k(z)$ — аналитические, в интервале $(0, 1]$ $\tilde{f}_k(x) = f_k(x)$, кроме того,

$$|\tilde{f}_k(z)| \leqslant \frac{1}{|1+z^{q_k}|} 3r^{\lambda_k} < 3r^{\lambda_k}$$
$$\left(0 < |z| \leqslant r < 1;\ |\arg z| < \frac{\pi}{2}\right) \tag{6}$$

$$\left(\frac{1}{|1+z^{q_k}|} \leqslant 1, \text{ так как } |\arg z^{q_k}| = |q_k \arg z| \leqslant \frac{\pi}{2} q_k < \frac{\pi}{2}\right).$$

Из (5) и (6) следует, что ряд $\sum_1^\infty c_k \tilde{f}_k(z)$ сходится в области $0 < |z| < 1$, $|\arg z| < \pi/2$ к некоторой аналитической функции $F(z)$. На отрезке $[1/2, 1]$

$$F(x) = \sum_1^\infty c_k \tilde{f}_k(x) = \sum_1^\infty c_k f_k(x) = 0,$$

поэтому в силу теоремы единственности

$$F(x) = \sum_1^\infty c_k \tilde{f}_k(x) = \sum_1^\infty c_k f_k(x) = 0 \qquad (x \in (0, 1]).$$

Итак, $\sum_1^\infty c_k f_k(x) = 0 \quad (x \in [0, 1])$. Распишем это условие в виде

$$0 = \sum_1^\infty c_k f_k(x) = \sum_0^\infty (c_{2k} f_{2k}(x) + c_{2k+1} f_{2k+1}(x)) =$$

$$= \sum_1^\infty \{c_{2k} x^{\lambda_{2k}} [1 + \varepsilon_{2k}(x)] + c_{2k+1} x^{\lambda_{2k+1}} [1 - \varepsilon_{2k}(x)]\} =$$

$$= \sum_0^\infty \left\{c_{2k} \frac{2x^{\lambda_{2k+1}} + \rho_k x^{\mu_k}}{1 + x^{q_k}} + c_{2k+1} \frac{2x^{\lambda_{2k+1}} - \rho_k x^{\mu_k + q_k}}{1 + x^{q_k}}\right\} =$$

$$= \sum_0^\infty \left[(c_{2k} + c_{2k+1}) \frac{2x^{\lambda_{2k+1}}}{1 + x^{q_k}} + c_{2k}\rho_k \frac{x^{\mu_k}}{1 + x^{q_k}} - \right.$$

$$\left. - c_{2k+1} \frac{x^{\mu_k + q_k}}{1 + x^{q_k}}\right] = \sum_0^\infty Q_k(x). \tag{7}$$

Пусть первая квадратная скобка, в которой не все $c_n = 0$, будет $Q_n(x)$. Из (7) следует, что

$$Q_n(x) = -\sum_{n+1}^\infty Q_k(x) \qquad (0 < x < 1). \tag{8}$$

При $x \to 0$ $(x > 0)$ левая часть соотношения (8) будет не меньше, чем $A_1 x^{\mu_n}$, если $c_{2n} \neq 0$, или не меньше, чем $A_2 x^{\lambda_{2n+1}}$, если $c_{2n} = 0$ (A_1 и A_2 — некоторые положительные постоянные). Правая часть соотношения (8) будет меньше, чем $Bx^{\mu_{n+1}}$ (B — некоторая постоянная). В самом деле, из (5) и выбора чисел μ_n ($\mu_n - \mu_{n-1} > \lambda_{2n} - \lambda_{2n-1} > 1$) следует

$$\left|\sum_{n+1}^\infty Q_k(x)\right| \leqslant \sum_{n+1}^\infty (2Mx^{\mu_k} + Mx^{\mu_k} + Mx^{\mu_k}) =$$

$$= 4M \sum_{n+1}^\infty x^{\mu_k} \leqslant 4Mx^{\mu_{n+1}} \sum_1^\infty x^{\mu_{k+n+1} - \mu_{n+1}} \leqslant$$

$$\leqslant 4Mx^{\mu_{n+1}} \frac{1}{1-x} \leqslant Bx^{\mu_{n+1}} \qquad \left(0 < x < \frac{1}{2}\right).$$

Следовательно, при $x \to 0$ левая и правая части соотношения (8) стремятся к нулю с разной скоростью, и, следовательно, соотношение (8) навозможно. Предположение, что среди коэффициентов c_n $(n = 1, 2, \ldots)$ есть отличные от нуля, привело к противоречию, значит, все $c_n = 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$, и свойство единственности в $C[1/2,1]$ тем самым доказано.

Согласно лемме система $\{f_n(x)\}$ обладает свойством единственности в $L_p[1/2, 1]$ $(p > 1)$.

Итак, мы построили последовательность чисел $\{\lambda_n\}$ и последовательность функций $\{f_n(x)\}$, которые удовлетворяют всем условиям теоремы 1, кроме условия (2). Предположим, что теорема 1 и в этом случае справедлива. Рассмотрим полином $P(x) = f_{2n}(x) - f_{2n+1}(x)$. По теореме 1

$$1 = |c_{2n}| \leqslant \frac{A}{\beta^{\lambda_{2n}}} \| P(x) \|_{L_p[1/2,1]} \qquad \left(\frac{1}{2} < \beta < 1\right). \tag{9}$$

Но

$$\frac{A}{\beta^{\lambda_{2n}}} \| P(x) \|_{L_p[1/2,1]} = \frac{A}{\beta^{\lambda_{2n}}} \left\| \frac{\rho_n x^{\mu_n} + \rho_n x^{\mu_n + q_n}}{1 + x^{q_n}} \right\|_{L_p[1/2,\,1]} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{A \cdot 2\rho_n}{\beta^{\lambda_{2n}}} \leqslant \frac{ACq_n}{2^{\lambda_{2n}} \beta^{\lambda_{2n}}} < ACq_n \to 0 \qquad (n \to \infty;\ 1 < p < \infty).$$

Значит, при большом n неравенство (9) невозможно. Теорема доказана.

Московский физико-технический институт

Поступило
27.XI.1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Леонтьева Л. А., О свойствах неполной системы функций, близких к степенным, Изв. АН СССР, Сер. матем., 33, № 3 (1969), 677—702.