ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ
И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ФИЗИКА
Том 16, № 1
июль
1973

АКСИОМЫ АЛГЕБРЫ НАБЛЮДАЕМЫХ И ПОНЯТИЕ ПОЛЯ [1)]

М. К. Поливанов, В. Н. Сушко, С. С. Хоружий

Дан краткий обзор новейшего развития аксиоматического алгебраического подхода в квантовой теории поля. Рассматривается алгебраическое описание релятивистских квантовых систем с правилами суперотбора и намеченная Доплихером, Хаагом и Робертсом процедура построения квантованных полей на базе алгебраической теории локальных наблюдаемых.

Содержание

I. Введение
II. Формализм и проблематика алгебраического подхода
III. Системы с правилами суперотбора
IV. Свойства эквивалентности когерентных секторов
V. Техника локализованных морфизмов. Заряд и зарядовое сопряжение
VI. Статистика когерентных секторов
VII. Полевая группа
VIII. Модель Стритера и Уайльда

I. ВВЕДЕНИЕ

В этом кратком обзоре мы изложили некоторые центральные, на наш взгляд, результаты развития алгебраического подхода в квантовой теории поля за последние три-четыре года. Эти результаты, недостаточно известные за пределами узкого круга людей, работающих в этой специальной области, заслуживают более широкого внимания.

Действительно, во-первых, они существенно развивают и обогащают основную схему алгебраического подхода в том виде, в котором она была сформулирована около десяти лет назад Хаагом, Араки и Кастлером. Во-вторых, они относятся к самому центральному понятию релятивистской квантовой теории — к понятию поля. Во всех обычных схемах квантованное поле вводится как первичное понятие, опирающееся в конечном счете на аналогию с классической теорией, хотя, как известно, например, поля с полуцелым спином, квантующиеся с антиперестановочными соотношениями, не могут иметь классического аналога. В алгебраическом подходе первичными понятиями служат более общие объекты — наблюдаемые и состояния, а оператору квантованного поля оказывается возможным дать содержательное конструктивное определение в их терминах, что, разумеется, немаловажно для уяснения точного содержания этого понятия.

Математический аппарат теории алгебр не особенно сложен; однако из-за того, что он не входит в стандартное математическое образование физиков, алгебраический подход в квантовой теории поля оказался ограж-

[1)] Обзорный доклад на конференции по аксиоматической и алгебраической квантовой теории поля, Ташкент, май, 1972.

денным терминологическими трудностями, скрывающими не только элегантность этого метода, но и физическую естественность его основных предпосылок и результатов. Мы постараемся преодолеть это затруднение, по возможности опуская технические детали и математические доказательства и опираясь на физические рассуждения, поддерживаемые интуицией.

В разделе II формулируются основные понятия алгебраического формализма, приводится список аксиом и обсуждается современная проблематика этого направления. В III и IV разделах рассматриваются глобальная и локальная структуры теории и устанавливаются некоторые новые, дополнительные к аксиомам, требования, которые должны выполняться в теории. Разделы V и VI посвящены введению технических и физических понятий, подготавливающих определение поля. Наконец, в VII разделе это определение строится и в VIII рассматривается модель, доставляющая явный пример вышеизлагаемой общей схемы.

II. ФОРМАЛИЗМ И ПРОБЛЕМАТИКА АЛГЕБРАИЧЕСКОГО ПОДХОДА

В основе алгебраического подхода лежат очень общие, восходящие к Дираку и фон Нейману понятия **алгебры наблюдаемых** и линейных положительных функционалов на этой алгебре — **состояний.** Достоинство этого подхода в его чрезвычайной общности: любая физическая система может быть охарактеризована в терминах наблюдаемых и состояний, а существования каких-либо еще характеристик, вообще говоря, не предполагается. Физическая теория фиксируется заданием множества наблюдаемых, а множество всех (математических) состояний однозначно определяется при этом как совокупность всех линейных нормированных положительных функционалов из дуального пространства алгебры наблюдаемых. Конкретные особенности физической системы (свойства симметрии, например) налагают ограничения на класс состояний, которые для нее могут быть реально осуществлены. Поэтому в качестве «физически допустимых» состояний выступает, как правило, лишь часть упомянутой совокупности функционалов, выделяемая соответствующими физическими требованиями.

Существуют две разновидности формализма — конкретная (или теория Хаага — Араки) и абстрактная (или теория Хаага — Кастлера), различающиеся выбором математических представителей для наблюдаемых.

В первом случае наблюдаемым сопоставляются самосопряженные операторы в некотором гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$. Среди этих операторов могут быть и неограниченные, как например, наблюдаемые энергии-импульса; однако в силу самосопряженности такие наблюдаемые можно эквивалентно характеризовать наборами ограниченных операторов — спектральных проекторов. Основным математическим объектом, сопоставляемым физической системе, служит при таком описании алгебра фон Неймана R, порождаемая множеством $\mathfrak{N}$ всех наблюдаемых, т. е. замыкание в слабой операторной топологии минимальной $*$-алгебры, содержащей все спектральные проекторы операторов из $\mathfrak{N}$. В наиболее важном случае, когда $\mathfrak{N}$ содержит единичный оператор I, R совпадает со вторым коммутантом $\mathfrak{N}''$ множества $\mathfrak{N}$ и является подалгеброй алгебры $\mathfrak{B}(\mathscr{H})$ всех огра-

ниченных операторов на $\mathscr{H}$:

$$R = R'' = \mathfrak{R}; \quad R \subset \mathfrak{B}(\mathscr{H}).$$

Во втором случае (формализм Хаага — Кастлера) наблюдаемым сопоставляются эрмитовы элементы $A = A^*$ абстрактной C^*-алгебры $\mathfrak{A}$ (C^*-алгеброй называется полная нормированная алгебра с инволюцией * и нормой $\|\cdot\|$, удовлетворяющими условию $\|A^*A\| = \|A\|^2$ для всех $A \in \mathfrak{A}$). Поскольку алгебра $\mathfrak{A}$ определяет и множество всех своих представлений π, то можно сказать, что в этом формализме физической системе одновременно сопоставляется широкая коллекция теорий Хаага — Араки с алгебрами наблюдаемых $R_\pi = \pi(\mathfrak{A})''$.

Такое обобщение теории Хаага — Араки было предпринято Хаагом и Кастлером в основном на том основании, что реальный эксперимент фактически сопоставляет физической системе не однозначно определенную теорию Хаага — Араки, но совокупность «физически эквивалентных» теорий. В самом деле, поскольку эксперимент производится с конечной точностью, то невозможно экспериментально определить состояние системы совершенно однозначно; эксперимент выделяет лишь класс «близких» состояний, в которых различия значений измеряемых характеристик (ожиданий наблюдаемых) лежат за пределами разрешающей способности измерения. Поскольку состояния суть функционалы на алгебре наблюдаемых $\mathfrak{A}$, то каждому из указанных «близких» или «физически эквивалентных» состояний по известной универсальной конструкции Гельфанда — Наймарка — Сигала отвечает представление π алгебры $\mathfrak{A}$ и тем самым теория Хаага — Араки. В итоге для описания системы с равным основанием может быть выбрано любое из представлений алгебры $\mathfrak{A}$ (теорий Хаага — Араки), отвечающих физически эквивалентным состояниям.

Оказывается, легко увидеть, что понятие физической эквивалентности в точности совпадает с известным математическим понятием слабой эквивалентности $\pi_1 \sim \pi_2$ представлений π_1 и π_2 C^*-алгебры $\mathfrak{A}$.

Определение. *Два представления π_1 и π_2 C^*-алгебры $\mathfrak{A}$ слабо эквивалентны:*

$$\pi_1 \sim \pi_2,$$

если совпадают их ядра:

$$\ker \pi_1 = \ker \pi_2 \quad (\ker \pi = \{A \in \mathfrak{A} \mid \pi(A) = 0\}).$$

Слабая эквивалентность π_1 и π_2 — требование весьма общее и малоограничительное. Оно несравненно слабее условия унитарной эквивалентности; например, любые точные представления (определяемые свойством $\ker \pi = \{0\}$) слабо эквивалентны между собой и, в частности, слабо эквивалентны все представления простой C^*-алгебры (алгебра $\mathfrak{A}$ проста, если она содержит только тривиальные двусторонние идеалы $\{0\}$ и $\mathfrak{A}$). Ниже мы еще вернемся к обсуждению физического содержания требования слабой эквивалентности.

Основные физические требования — причинности, пуанкаре-инвариантности, спектральности и т. д. — формулируются в виде системы аксиом, налагаемых на алгебры наблюдаемых. Мы приведем эти аксиомы для случая теории Хаага — Араки.

Алгебраическое описание релятивистских квантовых систем должно прежде всего отражать «локальный» характер систем такого рода, т. е. тот основной факт, что можно говорить об измерении некоторой наблюдаемой в определенной пространственно-временной области. Это передается ключевым предположением, которое мы будем считать «нулевой аксиомой».

0. *Каждой ограниченной открытой области O в пространстве-времени M может быть сопоставлена алгебра локальных наблюдаемых:*

$$O \subset M \Rightarrow R(O) \subset \mathfrak{B}(\mathscr{H}), \quad R(O)'' = R(O).$$

Следующие две аксиомы отражают общую связь между «объектами» в пространстве M и в соответствующих алгебрах:

1. *Изотония:*

$$O_1 \subset O_2 \Rightarrow R(O_1) \subset R(O_2).$$

2. *Аддитивность:*

$$R(O_1 \cup O_2) = \overline{R(O_1) \vee R(O_2)}^{w}$$

(черта с индексом ^{w} — символ слабого замыкания соответствующего множества операторов).

Третья и четвертая аксиомы отражают релятивистскую специфику теории: причинность — независимость наблюдений (т. е. коммутативность наблюдаемых) в пространственно-подобных областях и инвариантность относительно группы Пуанкаре.

3. *Причинность:*

$$O_1 \subset O_2' \Rightarrow R(O_1) \subset R(O_2)'.$$

Здесь O' обозначает область, включающую все точки, пространственно-подобные по отношению к области O.

4. *Пуанкаре-инвариантность*:

$$U_{a,\Lambda} R(O) U_{a,\Lambda}^{-1} = R(\Lambda^{-1}(O-a)),$$

где $\{a, \Lambda\} \to U_{a,\Lambda}$ — сильно непрерывное унитарное представление группы Пуанкаре $\mathscr{P}_+^{\uparrow}$ в $\mathscr{H}$.

Наконец, последняя аксиома описывает известное требование спектральности для оператора энергии-импульса:

5. *Спектральность*:

$$U(a) = \int e^{ipa}\, dE(p),$$

$$\operatorname{supp} E(p) \subset \overline{V}_+ = \{p \in M \mid p^2 \geqslant 0,\ p^0 \geqslant 0\}.$$

Мы не останавливаемся на объяснении стандартных обозначений. Подчеркнем только, что буква R употребляется нами всегда для обозначения фон Неймановских алгебр из $\mathfrak{B}(\mathscr{H})$, а $\mathfrak{A}$ — для абстрактных или конкретных C^*-алгебр.

Аксиома аддитивности позволяет ввести еще несколько важных понятий. Алгебра

$$\mathfrak{A} = \overline{\bigcup_{O \subset M} R(O)}^{u}$$

называется алгеброй квазилокальных наблюдаемых и алгебра

$$R = \overline{\bigcup_{O \subset M} R(O)}^{w}$$

называется алгеброй глобальных наблюдаемых.

Наконец, аксиома причинности вынуждает нас рассматривать области O', которые, как легко сообразить, не ограничены, даже если ограничена область O. В ряде случаев требуется рассматривать алгебры, ассоциированные с этими неограниченными областями. Построить такие алгебры позволяет опять условие аддитивности:

$$\mathfrak{A}(O') = \overline{\bigvee_{\tilde{O} \subset O'} R(\tilde{O})}^{u}$$

и

$$R(O') = \overline{\bigvee_{\tilde{O} \subset O'} R(\tilde{O})}^{w} = \overline{\mathfrak{A}(O')}^{w}.$$

Система $\{R(O)\}_{O \subset M}$, определяемая аксиомами 0—5, называется сетью. Имея это в виду, мы часто будем говорить о сетевой структуре алгебр R и $\mathfrak{A}$, или называть их алгебрами с сетью.

Перечисленные аксиомы отражают только самые общие свойства релятивистских квантовых систем и еще далеко не достаточны для построения полной реалистической теории (в частности, даже столь общее свойство, как физическая эквивалентность, не может быть выведено из аксиом). Поэтому непосредственно после формулировки аксиом и изучения сравнительно бедного набора свойств структур, удовлетворяющих только этим аксиомам, встает задача дальнейшей детализации алгебраической схемы путем введения в нее новых понятий и наложения дополнительных ограничений, выделяющих более конкретные физические ситуации и системы.

На этом пути мы в первую очередь сталкиваемся с задачами такого рода, как описание свойств симметрии; описание систем с правилами суперотбора; введение понятия заряда и операции зарядового сопряжения; установление типа статистики теории и связи спина со статистикой; и т. д. Для всего этого круга задач в их традиционной постановке понятие поля играет центральную роль. Поэтому и в алгебраическом формализме эти задачи приводят к одной основной задаче: ввести представление о поле в рамках формализма, где единственными исходными понятиями являются наблюдаемые и состояния. То развитие алгебраического подхода, о котором мы будем говорить ниже, связано с решением именно этой проблемы.

Нетрудно наметить интуитивный путь к решению этой задачи. В самом деле, состояния релятивистской квантовой системы обладают определенными «квантовыми числами», описывающими заряд, спин и другие подобные характеристики системы. Действуя на состояние, оператор поля как-то меняет его квантовые числа, т. е. приносит или уносит «кванты» этих характеристик. Значит, если есть теория с правилами суперотбора, например по заряду, то естественно ожидать, что в описании этой теории может участвовать заряженное (т. е. переносящее данный заряд) поле, которое, действуя на состояния из одного зарядового сектора, переводит

его в другой, «следующий» по заряду. Следовательно, можно подходить к понятию поля в алгебраической теории наблюдаемых, отправляясь от алгебраического описания систем с правилами суперотбора, и строить поле как объект, переводящий состояния из одного сектора в другой.

Ниже мы увидим, что в алгебраическом описании суперотборному сектору можно сопоставить некоторое представление π_α алгебры $\mathfrak{A}$. Тогда искомыми объектами, переводящими состояния из одного сектора в другой, могут служить хорошо изученные в теории представлений так называемые операторы переплетения.

Определение. *Если π_1, π_2 — представления $\mathfrak{A}$ в гильбертовых пространствах $\mathscr{H}_1$ и $\mathscr{H}_2$, то ограниченный оператор V: $\mathscr{H}_1 \to \mathscr{H}_2$ называется оператором переплетения, если*

$$(*) \qquad V\pi_1(A) = \pi_1(A)V$$

оля всех $A \in \mathfrak{A}$.

В частном случае, когда конкретная алгебра $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{B}(\mathscr{H})$ и $\mathscr{H}_1$ и $\mathscr{H}_2$ — подпространства одного и того же $\mathscr{H}$, $\mathscr{H}_{1,2} \subset \mathscr{H}$, из $(*)$ следует, что $VP_1 \in \mathfrak{A}'$, где P_1 — проектор в $\mathscr{H}$ на подпространство $\mathscr{H}_1$. Но объекты такого рода обладают только частью тех свойств, которые мы интуитивно связываем с понятием квантованного поля. Именно, они имеют нужные «глобальные» свойства, т. е. обладают правильным поведением по отношению к квантовым числам системы. Поле же должно еще обладать определенными локальными свойствами: для него должна иметь место сетевая структура такого рода, как $\{R(O)\}$; для этой сети должны выполняться определенные перестановочные соотношения; характер этих перестановочных соотношений должен быть связан со статистикой системы и т. д. Соответственно, после решения задачи о глобальных свойствах (правила суперотбора) надо будет из различных операторов переплетения суперотборных секторов отобрать такие, которые обладают нужными локальными свойствами.

Именно в таком виде программа построения поля была сформулирована уже в 1965 г. в пионерской работе Борхерса [1].

III. СИСТЕМЫ С ПРАВИЛАМИ СУПЕРОТБОРА

Основная отличительная черта систем с правилами суперотбора состоит в том, что в их гильбертовом пространстве не все векторы соответствуют чистым состояниям. Однако векторы, отвечающие чистым и смешанным состояниям, располагаются в $\mathscr{H}$ не произвольно, но образуют определенную структуру. Задача теории правил суперотбора — описать эту структуру множества состояний, а также найти класс алгебр, состояния на которых образуют такую структуру. Основные результаты этой теории можно резюмировать в следующих утверждениях [5].

Определение. *Пусть дана квантовая система с алгеброй наблюдаемых $R \subset \mathfrak{B}(\mathscr{H})$. Будем говорить, что в этой системе действует правило суперотбора, если*

$$\mathscr{H} = \bigoplus_{\alpha \in \sigma} \mathscr{H}_\alpha,$$

причем:

1) *любой вектор* Ψ, *не лежащий в одном из* $\mathscr{H}_\alpha$, *отвечает смешанному состоянию,*

2) *отсутствуют переходы между разными* $\mathscr{H}_\alpha$:

$$\forall_{A \in R} (A\Phi_{\alpha_1}, \Phi_{\alpha_2}) = 0 \quad \text{при } \alpha_1 \neq \alpha_2$$

и, кроме того,

$$\Phi_\alpha \in \mathscr{H}_\alpha \Rightarrow \mathfrak{M}_{\Phi_\alpha} \subset \mathscr{H}_\alpha,$$

где по определению

$$\mathfrak{M}_\Phi = \{\Psi \in \mathscr{H} \mid (A\Psi, \Psi) = (A\Phi, \Phi), \forall A \in R\},$$

3) *существует, возможно неограниченный, оператор* T, *присоединенный к центру* $\mathfrak{Z}$,

$$\mathfrak{Z} = R \cap R',$$

алгебры R *и такой, что все* $\mathscr{H}_\alpha$ *суть его собственные подпространства.*

Любое из этих трех свойств влечет остальные два.

Если эти условия выполнены, то подпространства $\mathscr{H}_\alpha$ называются когерентными суперотборными секторами и операторы T — операторами суперотбора. Простым примером суперотборного оператора может служить оператор заряда.

Структуру множества состояний системы с правилами суперотбора описывает

Теорема 1. *Глобальная алгебра наблюдаемых* R *описывает систему с правилами суперотбора тогда и только тогда, когда векторы* Φ, *представляющие чистые состояния, образуют тотальное множество в* $\mathscr{H}$:

$$\mathscr{H} = \overline{L\{\Phi\}}.$$

Соответствующий класс алгебр, который мы будем называть «P-классом», описывает

Теорема 2. *Следующие условия эквивалентны:*

1) W^**-алгебра* R *принадлежит* P*-классу*;

2) R *есть* W^**-алгебра типа* I *и* $\mathfrak{Z}$ *содержит операторы лишь с точечным спектром*;

3) R *есть прямая сумма факторов типа* I:

$$R = \bigoplus_{\alpha \in \sigma} R_\alpha$$

(*фактором называется алгебра фон Неймана* R *такая, что* $R \cap R' = \mathfrak{Z} = \mathfrak{C}(\mathscr{H})$).

Из характерных отличий этого описания правил суперотбора отметим следующие:

1) для любого когерентного сектора $\{R_\alpha, \mathscr{H}_\alpha\}$ алгебра наблюдаемых R_α есть фактор типа I, а не обязательно неприводимая алгебра $\mathfrak{B}(\mathscr{H}_\alpha)$;

2) операторы суперотбора присоединены не только к алгебре R', но и к алгебре $\mathfrak{Z}$;

3) коммутативность всех правил суперотбора есть следствие теории, а не дополнительное требование.

IV. СВОЙСТВА ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ КОГЕРЕНТНЫХ СЕКТОРОВ

Наш следующий этап — изучение соотношений между алгебрами $R(O)_\alpha$ и $\mathfrak{A}(O')_\alpha$ (определяемыми как сужения на $\mathscr{H}_\alpha$ алгебр $R(O)$ и $\mathfrak{A}(O')$ соответственно) для различных когерентных секторов. Для целей такого изучения когерентные секторы удобно изображать как представления π_α *C^*-алгебры* $\mathfrak{A}$:

$$\pi_\alpha\colon\ \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}_\alpha = \mathfrak{A}|_{\mathscr{H}_\alpha},$$

задача тогда заключается в изучении свойств эквивалентности семейств представлений $\pi_\alpha^{(O)} \doteq \pi_\alpha|_{R(O)}$ и $\pi_\alpha^{(O')} \doteq \pi_\alpha|_{\mathfrak{A}(O')}$ (поскольку, вообще говоря, $R(O') \not\subset \mathfrak{A}$, то $\pi_\alpha^{(O')}$ определены только на алгебре $\mathfrak{A}(O')$).

Определение. *Когерентные секторы* $\{R_\alpha, \mathscr{H}_\alpha\}$ *и* $\{R_\beta, \mathscr{H}_\beta\}$ *назовем:*

1. *Физически эквивалентными, если* $\pi_\alpha \sim \pi_\beta$,
2. *Физически эквивалентными локально, если* $\pi_\alpha^{(O)} \sim \pi_\beta^{(O)}$
3. *Физически эквивалентными асимптотически, если* $\pi_\alpha^{(O')} \sim \pi_\beta^{(O')}$,
4. *Унитарно эквивалентными, если* $\pi_\alpha \simeq \pi_\beta$,
5. *Унитарно эквивалентными локально, если* $\pi_\alpha^{(O)} \simeq \pi_\beta^{(O)}$,
6. *Унитарно эквивалентными асимптотически, если* $\pi_\alpha^{(O')} \simeq \pi_\beta^{(O')}$.

Наиболее слабым из этих свойств является свойство 1 — физическая эквивалентность. Согласно нижеследующей теореме [6] она тесно связана с рядом других важных свойств теории.

Теорема 3. *В теории P-класса, удовлетворяющей аксиомам Хаага — Араки, следующие условия равносильны:*

1) *все когерентные секторы* $\{R_\alpha, \mathscr{H}_\alpha\}$ *физически эквивалентны,*

2) *все суперотборные операторы суть истинно глобальные наблюдаемые:*

$$\mathfrak{A} \cap \mathfrak{Z} = \mathfrak{C}(\mathscr{H}),$$

3) *алгебра* $\mathfrak{A}$ *проста,*

4) *выполняется условие расширенной локальности:*

$$R(O) \cap R(O') = \mathfrak{C}(\mathscr{H}),$$

5) *из представлений* π_α *хотя бы одно является точным.*

Можно указать [6] простой контрпример, показывающий, что теория P-класса, удовлетворяющая всем аксиомам Хаага — Араки, вовсе не обязательно удовлетворяет условиям этой теоремы. Таким образом, даже физическая эквивалентность секторов есть новое **дополнительное требование,** которое можно наложить в любой из эквивалентных форм 1—5. Каждое из этих условий имеет самостоятельное физическое значение и может рассматриваться как разумное дополнительное требование в теории.

Легко усмотреть, что для построения полей наиболее существенным является свойство асимптотической унитарной эквивалентности. Действительно, если представления $\pi_\alpha^{(O')}$ и $\pi_\beta^{(O')}$ унитарно эквивалентны, то соответствующие операторы переплетения лежат в алгебре $R(O')'$, и на основании аксиомы локальности ($R(O) \subset R(O')'$) можно ожидать, что

эти операторы могут быть связаны с полями, действующими в области O.

В обычной теории Хаага — Араки без правил суперотбора свойства представлений $\pi_\alpha^{(O')}$ были целиком тождественны свойствам представлений $\pi_\alpha^{(O)}$ (как следствие того, что в такой теории глобальная алгебра R есть фактор), и в специальном изучении «асимптотической сети» $\{R(O')\}_{O\subset M}$ не возникало нужды. В случае теорий с правилами суперотбора это не так. Выясняется, что условие $\pi_\alpha^{(O')} \simeq \pi_\beta^{(O')}$, подобно физической эквивалентности, выполняется лишь при определенном ограничении. Чтобы его сформулировать, введем понятие строго локализованного состояния [7].

Определение. *Состояние ω на алгебре наблюдаемых R назовем строго локализованным в $O \subset M$, если значения ω на всех наблюдаемых из O' совпадают с соответствующими значениями вакуумного функционала*[2] ω_Ω:

$$\omega\,|_{R(O')} = \omega_\Omega\,|_{R(O')}.$$

Множество всех векторов из $\mathscr{H}$, отвечающих строго локализованным в O состояниям, будем обозначать как $SL(O)$.

Условие асимптотической унитарной эквивалентности формулирует

Теорема 4 (асимптотическое условие). *В теории P-класса все когерентные секторы асимптотически унитарно эквивалентны тогда и только тогда, когда в каждом секторе есть хотя бы один строго локализованный вектор:*

$$\forall_{\alpha,\beta\in\sigma}\ \pi_\alpha^{(O')} \simeq \pi_\beta^{(O')} \Leftrightarrow \forall_{\alpha\in\sigma}\ SL(O)_\alpha \neq \varnothing.$$

Таким образом, в физических теориях, допускающих введение поля, мы должны потребовать выполнения условий теоремы 4. Связь этих условий с асимптотическим поведением системы проясняется из того, что при их выполнении имеют место свойства: любое векторное состояние в пределе бесконечно больших пространственно-подобных трансляций совпадает с вакуумным:

$$\lim_{\substack{a\to\infty\\ a^2<0}} \omega_\Phi(A_a) = \omega_\Omega(A)\,\|\Phi\|,\ \forall\ \Phi\in\mathscr{H},\ A\in\mathfrak{A},$$

где $A_a \doteq U(a)AU(-a)$.

Кроме того, все состояния ω_Φ обладают обобщенным свойством разложения на пучки:

$$\forall_{A,B\in\mathfrak{A}}\ \forall_{\Phi\in\mathscr{H}}\ \lim_{\substack{a\to\infty\\ a^2<0}} \omega_\Phi(A_aB) = \omega_\Omega(A)\,\omega_\Phi(B).$$

Помимо этого, в теории P-класса с асимптотическим условием вакуумное состояние ω_Ω единственно.

Итак, в процессе изучения задачи об алгебраической формулировке правил суперотбора и о свойствах эквивалентности когерентных секторов мы пришли к необходимости дополнить теорию требованиями:

---

[2] Для простоты мы считаем, что вакуумное состояние рассматриваемой теории векторно.

1) достаточного числа чистых векторных состояний (теорема 1),
2) физической эквивалентности секторов (теорема 3),
3) асимптотическим условием (теорема 4).

Все эти требования конкретизировали схему, сужая класс рассматриваемых алгебр. Однако еще пока не вводилось никаких новых объектов — теория продолжала оставаться только теорией наблюдаемых. Теперь мы подходим к построению поля, и здесь теория начнет, наконец, обогащаться новыми понятиями. Следует построить определения заряда, зарядового сопряжения, типа статистики: все эти понятия тесно связаны с понятием поля. Эта задача была решена в цикле работ Доплихера, Хаага и Робертса [2—4] (для сокращения далее обозначаемом как DHR).

V. ТЕХНИКА ЛОКАЛИЗОВАННЫХ МОРФИЗМОВ. ЗАРЯД И ЗАРЯДОВОЕ СОПРЯЖЕНИЕ

Прежде всего для решения поставленных задач вводится еще одно — четвертое дополнительное ограничение на теорию: условие дуальности для вакуумного когерентного сектора (т. е. такого, в котором имеется вакуум, определяемый как векторное трансляционно-инвариантное состояние ω_Ω: $\omega_\Omega(U(a)) = 1$). Если для простоты переобозначить через $\mathfrak{A}$ квазилокальную алгебру $\mathfrak{A}_0$ вакуумного сектора (это равносильно тому, чтобы рассматривать алгебру $\mathfrak{A}$ всей теории как представление алгебры $\mathfrak{A}_0$, а не наоборот), то условие дуальности в вакуумном секторе имеет вид

$$R(O) = R(O')',$$

где $R(O)$ и $R(O')$ — алгебры наблюдаемых вакуумного сектора.

Решение задачи строится посредством специальной техники локализованных морфизмов, которая эквивалентна языку операторов переплетения, но оказывается более удобной.

Рассмотрим представление π алгебры $\mathfrak{A}$ вакуумного сектора, асимптотически унитарно эквивалентное тождественному представлению π_0:

$$\pi^{(O')} \simeq \pi_0^{(O')}; \quad \pi_0^{(O')}(\mathfrak{A}(O')) = \mathfrak{A}(O').$$

Тогда существует оператор переплетения V такой, что

$$V\mathfrak{A}(O')V^{-1} = \pi(\mathfrak{A}(O')), \quad VP_0 \in \mathfrak{A}(O')' = R(O')' = R(O)$$

(P_0 проектор на пространство $\mathscr{H}_0$ вакуумного сектора).

Определение локализованного морфизма ρ:

$$\forall_{A \in \mathfrak{A}} \ \rho(A) = V^{-1}\pi(A)V \in \mathfrak{A}.$$

Иначе: локализованный морфизм ρ *есть отображение* $\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}(\mathscr{H}_0)$, *сохраняющее алгебраическую структуру (т. е. представление* $\mathfrak{A}$), *обладающее свойством*

1) $\qquad \rho|_{\mathfrak{A}(O')} = \mathrm{I}.$

В силу дуальности ρ *не выводит из области* O:

(2) $\qquad \rho(\mathfrak{A}(O)) \subset \mathfrak{A}(O).$

Благодаря (1) и (2) ρ как бы сосредоточен в области O. В этом смысле говорят, что ρ локализован в O, и O называется носителем ρ ($O = \operatorname{supp}\rho$).

При некоторой специальной структуре когерентных суперотборных секторов, в частности, когда когерентный сектор можно определить как класс $\hat{\rho}$ унитарной эквивалентности неприводимого морфизма ρ (т. е. такого, что $\rho(\mathfrak{A})$ — неприводимая алгебра, $\rho(\mathfrak{A})'' = \mathfrak{B}(\mathscr{H}_0)$), весь аппарат теории можно эквивалентно переформулировать в терминах ρ. При этом действие морфизмов ρ на вакуум ω_Ω будет давать строго локализованные состояния $\omega_\Omega \circ \rho$

$$(\forall_{A \in \mathfrak{A}} (\omega_\Omega \circ \rho)(A) = \omega_\Omega(\rho(A)).$$

Благодаря этому последнему свойству с помощью морфизмов ρ можно ввести «локализованное заряженное состояние» — аналог одночастичного состояния полевой теории. Именно, если ρ_α — неприводимый локализованный морфизм, то $\omega_\Omega \circ \rho_\alpha$ строго локализовано в области $O = \operatorname{supp} \rho_\alpha$ и является чистым состоянием, принадлежащим когерентному сектору $\hat{\rho}_\alpha$.

Допустим, что на множестве σ всех когерентных секторов задана некоторая параметризация, придающая этому множеству структуру абелевой группы, иными словами, индексы $\alpha \in \sigma$ можно складывать и вычитать между собой. Тогда эти индексы можно интерпретировать как значения зарядовых квантовых чисел, а состояние $\omega_\Omega \circ \rho_\alpha$ принять в качестве модели «одночастичного состояния» с зарядом типа α, локализованным в области $O = \operatorname{supp} \rho_\alpha$ (но следует помнить, что в точном смысле одночастичными, и даже конечночастичными строго локализованные состояния не могут быть согласно аргументации Найта [7]).

Можно теперь построить и понятие «зарядового сопряжения». В качестве вспомогательной операции для этого введем «перенос заряда»: если есть два заряженных состояния $\omega_\Omega \circ \rho_1$ и $\omega_\Omega \circ \rho_2$, где ρ_1 локализован в области O_1, ρ_2 — в области O_2 и $\rho_1 \simeq \rho_2$, то можно считать $\omega_\Omega \circ \rho_2$ тем же состоянием $\omega_\Omega \circ \rho_1$, «перенесенным» в O_2 из O_1. Тогда оператор, переводящий ρ_1 в ρ_2, будет оператором переноса заряда из O_1 в O_2.

DHR доказали, что такие операторы существуют: $\rho_1 \simeq \rho_2$ тогда и только тогда, когда для всех $A \in \mathfrak{A}$, $\rho_2(A) = U^* \rho_1(A) U$, где $U \in \mathfrak{A}$ есть унитарный оператор, определенным образом связанный с локальными алгебрами областей O_1 и O_2. Задавая уходящие на бесконечность последовательности областей $\{O_n\}$, можно удалять заряд $\omega_\Omega \circ \rho$ с помощью операторов U_n «на бесконечность» или же, напротив, представлять его как «перенесенный из бесконечности». В этом последнем случае ρ представляется как предел

$$\rho(A) = u\text{-}\lim_{k \to \infty} U_k^* A U_k.$$

Далее делается естественное предположение, что обратная последовательность морфизмов, получаемая заменой оператора U на U^*, представляет собой перенос в область O «сопряженного» заряда. Доказано, что такая последовательность имеет предел, определяющий некоторый локализованный морфизм:

$$\rho^*(A) = u\text{-}\lim_{k \to \infty} U_k A U_k^*.$$

Этот предел ρ^* не зависит от того, как выбрана уходящая на пространственно-подобную бесконечность последовательность $\{O_k\}$ (или, что то же,

последовательность оператора $\{U_k\}$). Тем самым ρ^* для данного ρ определен однозначно (при некотором малоограничительном условии).

Операция перехода от морфизма ρ к ρ^* называется **зарядовым сопряжением.** Когерентный сектор, отвечающий морфизму ρ^*, называется зарядово сопряженным по отношению к сектору $\hat{\rho}$.

VI. СТАТИСТИКА КОГЕРЕНТНЫХ СЕКТОРОВ

Если операцию зарядового сопряжения секторов оказалось возможным ввести с помощью предельных переходов для морфизмов, то сопоставить каждому сектору определенный тип статистики удается на базе операции перемножения (композиции) морфизмов.

Физическая идея здесь ясна: мы видели, что состояния вида $\omega_\Omega \circ \rho$ являются аналогами одночастичных состояний; очевидно, состояния

$$\omega_\Omega \circ (\rho_1 \ldots \rho_N)$$

будут аналогами N-частичных состояний и тип перестановочной симметрии таких состояний определяет статистику теории.

Композиция морфизмов ρ определяется естественным образом: так как $\rho(\mathfrak{A}) \subset \mathfrak{A}$, то действие любого ρ' определено на $\rho(\mathfrak{A})$ и отображение

$$\mathfrak{A} \to \rho'\rho(\mathfrak{A})$$

называется композицией морфизмов ρ и ρ'.

Свойства композиции:

1) ρ^n отвечает тому же сектору $\hat{\rho}$, что и ρ, при всех n (тем самым в каждом секторе имеются «N-частичные» состояния с любым N);

2) в общем случае ρ^N — приводимое представление и тогда

$$[\rho^N(\mathfrak{A})]' \neq \mathfrak{C}(\mathscr{H})$$

есть некоторая нетривиальная W^*-алгебра.

Как отражение свойства неразличимости в стандартном описании системы тождественных частиц операторы перестановок оказываются коммутирующими с операторами наблюдаемых. Аналогичное свойство возникает и в рассматриваемой схеме. Именно, в алгебре $[\rho^N(\mathfrak{A})]'$ можно ввести унитарные неприводимые представления группы перестановок S_N:

$$\rho^N \overset{(*)}{\to} \varepsilon_\rho^{(N)} \in \operatorname{Rep} S_N; \quad \varepsilon_\rho^{(N)}(S_N) \subset [\rho^N(\mathfrak{A})]'.$$

Процедура $\overset{(*)}{\to}$ сопоставления представлению ρ^N алгебры наблюдаемых представления $\varepsilon_\rho^{(N)}$ группы перестановок достаточно сложна. Тем не менее возможность ее построения и ее физическое содержание очевидны из аналогии между $\omega_\Omega \circ \rho_1 \ldots \rho_N$ и N-частичным состоянием.

Итак, каждому когерентному сектору $\hat{\rho}$ в соответствии с $(\overset{(*)}{\to})$ сопоставляется набор унитарных неприводимых представлений группы перестановок S_N (набор схем Юнга) по одному для каждого N. Возникающая ситуация полностью аналогична тому, как в квантовой механике координантная или спиновая волновая функция N частиц преобразуется по определенной схеме Юнга. Разница только в том, что в релятивистской теории N не сохраняется, и потому каждый сектор содержит N-частичные состояния с произвольным N.

Определение. *Совокупность всех представлений* $\{\varepsilon_\rho^{(N)}\}$ *группы* S_N *при фиксированном* ρ *и всех* N *называется статистикой когерентного сектора* $\hat{\rho}$.

Удается доказать, что сектор $\hat{\rho}$ и зарядово сопряженный к нему $\hat{\rho}^*$ обладают одной и той же статистикой.

Построенный формализм, как легко видеть, допускает секторы

с бозе- или ферми-статистикой: когда $[\rho^N(\mathfrak{A})]' = \mathfrak{C}(\mathscr{H}_0)$ и единственные возможные представления S_N тривиальны, $\varepsilon^{(N)} = \pm \mathrm{I}$ (строка или столбец в схеме Юнга). Отличием морфизмов, отвечающих таким секторам, является то, что все они должны быть автоморфизмами, т. е. $\rho(\mathfrak{A}) = \mathfrak{A}$;

с аномальными статистиками: когда $[\rho^N(\mathfrak{A})]' \neq \mathfrak{C}(\mathscr{H}_0)$ и возможны нетривиальные представления S_N. *DHR* доказали, что в числе аномальных статистик, помимо хорошо изученных пара-бозе и пара-ферми статистик, формализм допускает лишь один «экзотический» случай парастатистики бесконечного порядка, не являющейся ни пара-ферми, ни парабозе. В этом случае все схемы Юнга допустимы без ограничений.

VII. ПОЛЕВАЯ ГРУППА

Теперь после введения всех понятий и объектов, сопутствующих полю, остается лишь последний этап — непосредственное построение полевых операторов. Эта задача пока решена только для частного случая, когда система с правилами суперотбора включает лишь секторы с обычной бозе- или ферми-статистикой.

В способе, развитом *DHR* [3], строятся не непосредственно полевые операторы, но совокупность их унитарных составляющих — «полевая группа» $\mathfrak{F}$ унитарных операторов. Сами операторы поля, вообще говоря неограниченные, являются при этом операторами, присоединенными к W^*-алгебре $\widetilde{\mathfrak{F}} \doteq \{\mathfrak{F}\}''$, натягиваемой на группу $\mathfrak{F}$.

Опишем в самом сокращенном виде процедуру *DHR*. Пусть имеется система с вакуумной алгеброй $\mathfrak{A}$, все секторы $\hat{\rho}$ которой удовлетворяют бозе-, ферми-статистике и, следовательно, являются автоморфизмами, $\rho(\mathfrak{A}) = \mathfrak{A}$. Обозначим через $\Gamma(O)$ совокупность всех локализованных автоморфизмов ρ с носителями в O и через $\Gamma_c(O)$ — подсовокупность тех из них, которые отвечают *ковариантным представлениям* $\mathfrak{A}$:

$$\Gamma_c(O) = \{\rho \in \Gamma(O) \mid \exists U(a, \Lambda) \in \mathrm{Rep}\, \mathscr{P}_+{}^\uparrow,$$
$$U(a, \Lambda)\rho(A)U(a, \Lambda)^{-1} = \rho(A(a, \Lambda))\}.$$

Здесь $A(a, \Lambda) = U_0(a, \Lambda)AU_0(a, \Lambda)^{-1}$ и $U_0(a, \Lambda)$-представление группы Пуанкаре $\mathscr{P}_+{}^\uparrow$, действующее в вакуумном секторе.

Положим также $\Gamma_c = \bigcup\limits_{O \subset M} \Gamma_c(O)$ — совокупность (группа) всех локализованных ковариантных автоморфизмов. Очевидно, что часть из автоморфизмов $\rho \in \Gamma_c$ порождается унитарными операторами из самой алгебры $\mathfrak{A}$ по следующему естественному закону:

$$U \in \mathfrak{A}^u \to \rho(A) = UAU^{-1}, \ \forall A \in \mathfrak{A}. \tag{3}$$

Такие автоморфизмы называются, как известно, внутренними. Их совокупность обозначим как $J \subset \Gamma_c$:

$$J = \{\rho \in \Gamma_c | \rho = U \cdot U^{-1},\ U \in \mathfrak{A}^u\}.$$

Ясно, что формула (3) задает естественное отображение (гомоморфизм) множества $\mathfrak{A}^u$ на J.

Разумеется, вообще говоря, не все $\rho \in \Gamma_c$ являются внутренними автоморфизмами. Ключ к решению проблемы поля оказывается, однако, в том факте, что для полевых систем хотя и не все $\rho \in \Gamma_c$ являются внутренними, но все являются пространственными, т. е. порождаются некоторым унитарным оператором, уже, вообще говоря, не лежащим в $\mathfrak{A}^u$. Эти унитарные операторы, «имплементирующие», как принято говорить, автоморфизмы $\rho \in \Gamma_c$, и образуют искомую полевую группу $\mathfrak{F}$.

Теорема 5 (теорема существования поля для нормальных систем). *В гильбертовом пространстве $\mathscr{H}_0$ вакуумного когерентного сектора существует группа $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{B}(\mathscr{H}_0)$ унитарных операторов, обладающая следующими свойствами:*

1) $\mathfrak{A}^u \subset \mathfrak{F}$,

2) *гомоморфизм $\mathfrak{A}^u \to J$ может быть расширен до гомоморфизма ζ: $\mathfrak{F} \to \Gamma_c$ такого, что*

α) $\zeta_\psi(U) = \psi U \psi^{-1}$ *для всех* $\psi \in \mathfrak{F}$ *и* $U \in \mathfrak{A}^u$,

β) $\ker \zeta = \ker \zeta|_{\mathfrak{A}} = \{e^{i\alpha}\}_{\alpha \in R^1}$.

Из свойства α) и того факта, что в C^*-алгебре всякий элемент есть конечная линейная комбинация унитарных элементов, следует сразу, что $\mathfrak{F}$ есть такая группа унитарных операторов, что любой автоморфизм $\rho \in \Gamma_c$ унитарно порождаем некоторым оператором $\psi \in \mathfrak{F}$:

$$\underset{\rho \in \Gamma_c}{\forall}\ \underset{\psi \in \mathfrak{F}}{\exists}\ \underset{A \in \mathfrak{A}}{\forall}\ \rho(A) = \psi A \psi^{-1}.$$

Вместе с тем эта формула подтверждает и справедливость исходной гипотезы о связи полей с операторами переплетения.

Определение. *Группа $\mathfrak{F}$ унитарных операторов, удовлетворяющая условиям теоремы, называется полевой группой.*

Разумеется, утверждение о том, что $\mathfrak{F}$ есть группа, связанная с операторами поля, должно подтверждаться перечнем свойств $\mathfrak{F}$. Достаточно просто уже устанавливаются следующие свойства:

1) поля можно сопоставить любой области $O \subset M$. Действительно, структура сети в Γ_c индуцирует сеть в $\mathfrak{F}$, т. е. существуют полевые группы любых областей

$$O \subset M \to \mathfrak{F}(O) \subset \mathfrak{F},$$

где $\mathfrak{F}(O)$ определяется как прообраз группы ковариантных автоморфизмов $\Gamma_c(O)$ относительно отображения ζ:

$$\mathfrak{F}(O) \doteq \{\psi \in \mathfrak{F} | \psi \cdot \psi^{-1} \in \Gamma_c(O)\}.$$

Иными словами, поля, действующие в области O, при данном абстрактном способе их построения возникают как унитарные операторы, имплементирующие ковариантные локализованные автоморфизмы с носителями в O;

2) для пространственно-подобных областей O_1 и O_2 элементы из $\mathfrak{F}(O_1)$ и $\mathfrak{F}(O_2)$ удовлетворяют бозе-, ферми-перестановочным соотношениям:

$$\underset{O_1\times O_2}{\forall}\ \underset{\substack{\psi_1\in\mathfrak{F}(O_1)\\ \psi_2\in\mathfrak{F}(O_2)}}{\forall}\ \psi_1\psi_2=\pm\psi_2\psi_1;$$

3) элементы $\rho\in\Gamma_c$, связанные отображением ζ с полями ψ, отвечают представлениям $\mathfrak{A}$, удовлетворяющим условию спектральности.

Заметим еще, что описанный способ не допускает прямого обобщения на теории с парастатистикой, ибо отображения ρ, не являющиеся автоморфизмами, очевидно, не могут быть унитарно порождаемы: из $\rho=\psi\cdot\psi^{-1}$ следует $\rho(\mathfrak{A})=\mathfrak{A}$.

VIII. МОДЕЛЬ СТРИТЕРА И УАЙЛЬДА

Нетривиальная конкретная реализация общей схемы, развитой в работах *DHR*, была дана Стритером и Уайльдом [8]. Они рассмотрели сеть $\{R(O)\}$ локальных алгебр, порожденных свободным скалярным нейтральным полем $\varphi(x)$ нулевой массы покоя в двумерном пространстве-времени M_1^1, и явным образом построили как группу локализованных автоморфизмов, так и отвечающую им полевую алгебру. Опишем кратко их конструкцию. Рассмотрим гильбертово пространство $\mathscr{L}^2(R^1, dp/2|p|)$ квадратично суммируемых по мере $dp/2|p|$ комплексных функций на прямой R^1. Пусть $\mathscr{H}_\Phi$ — симметричное фоковское пространство, отвечающее $\mathscr{L}^2(R^1, dp/2|p|)$, а $a(p)$, $a^*(p)$ — операторы рождения и уничтожения в $\mathscr{H}_\Phi$, удовлетворяющие стандартным перестановочным соотношениям

$$[a(p), a^*(q)]=\delta(p-q).$$

Рассмотрим, далее, множество $\mathfrak{M}$ вещественных функций $\xi(x,t)$ вида

$$\xi(x,t)=\frac{1}{2}\left[g(x+t)+g(x-t)+\int\limits_{x-t}^{x+t}f(y)\,dy\right],$$

где вещественные функции $f(x)$, $g(x)$ принадлежат пространству Шварца $D(R^{-1})$, причем $\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(x)\,dx=0$. Ясно, что функции являются решениями следующей задачи Коши:

$$\frac{d^2\xi}{dt^2}-\frac{d^2\xi}{dx^2}\equiv\Box_2\xi=0;\quad \xi(x,0)=g(x);\quad \dot{\xi}(x,0)=f(x)$$

(здесь и ниже точка над буквой означает дифференцирование).

Множество $\mathfrak{M}$ состоит из тех решений $\xi(x,t)$, которые удовлетворяют дополнительному условию [3)]

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\dot{\xi}(x,0)\,dx=0.$$

[3)] Введение этого условия позволяет преодолеть известные трудности (см., например, [9]), связанные с определением свободного скалярного поля $\varphi(x)$ нулевой массы покоя в пространстве-времени размерности 2.

Каждой функции $\xi \in \mathfrak{M}$ поставим в соответствие оператор $W(\xi)$, действующий в $\mathscr{H}_\Phi$ и определяемый равенством

$$W(\xi) = \exp\left\{\frac{i}{\sqrt{2}}\int\left([f(p) + i\tilde{g}(p)|p|]a^*(p) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + [\tilde{f}(-p) - i\tilde{g}(-p)|p|]a(p)\right)\frac{dp}{\sqrt{2|p|}}\right\}$$

где

$$\tilde{f}(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int \dot{\xi}(x,0)e^{-ipx}dx, \quad \tilde{g}(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int e^{-ipx}\xi(x,0)dx.$$

Совокупность $\{W(\xi)\}_{\xi \in \mathfrak{M}}$ реализует представление канонических коммутационных соотношений в вейлевской форме:

$$W(\xi_1)W(\xi_2) = e^{-(i/2)\{\xi_1, \xi_2\}}W(\xi_1 + \xi_2) = e^{-i\{\xi_1, \xi_2\}}W(\xi_2)W(\xi_1),$$

где

$$\{\xi_1, \xi_2\} = \int [\dot{\xi}_1(x,0)\xi_2(x,0) - \xi_1(x,0)\dot{\xi}_2(x,0)]dx.$$

Используя операторы $W(\xi)$, построим сеть $\{R(D)\}$ локальных алгебр $R(D)$ для областей-алмазов D. Область-алмаз $D_{x_1x_2}$ определим как множество точек пространства $M_1{}^1$, ограничиваемое светоподобными прямыми, выходящими из точек x_1, x_2, вершин алмаза. Обозначим две другие точки пересечения этих прямых через x_1', x_2', а отрезок пространственно-подобной прямой $l_{x_1'x_2'}$, соединяющий точки x_1', x_2', через $d_{x_1'x_2'}$. Пусть (a, Λ) — преобразование из двумерной специальной группы Пуанкаре $\mathscr{P}_+{}^\uparrow$ (т. е. группы движений псевдоевклидовой плоскости $M_1{}^1$), переводящее прямую $l_{x_1x_2}$ в прямую $t = 0$. Пусть $\tilde{D}_{\tilde{x}_1\tilde{x}_2} = (a, \Lambda)D_{x_1x_2}$ — алмаз, получаемый из $D_{x_1x_2}$ действием преобразования (a, Λ), $d_{x_1x_2}$ — диагональ $\tilde{D}_{\tilde{x}_1\tilde{x}_2}$, лежащая на прямой $t = 0$, и $\mathfrak{M}(\tilde{D}_{\tilde{x}_1\tilde{x}_2})$ — множество тех $\xi \in \mathfrak{M}$, для которых носители $\operatorname{supp} f(x)$ и $\operatorname{supp} g(x)$ начальных данных $f(x)$ и $g(x)$ лежат внутри $d_{\tilde{x}_1\tilde{x}_2}$. Локальной алгеброй алмаза $D_{x_1x_2}$ будем называть слабое замыкание $R(D_{x_1x_2})$ алгебры, порождаемой операторами $W(\xi_{a,\Lambda})$, где $\xi_{a,\Lambda}(x,t) = \xi(\Lambda(x + a^1, t + a^0))$, а ξ пробегает $\mathfrak{M}(\tilde{D}_{\tilde{x}_1\tilde{x}_2})$. Легко проверить, что сеть $\{R(D_{x_1x_2})\}_{x_1x_2 \in M_1{}^1}$ удовлетворяет всем постулатам Хаага — Араки.

Определим теперь локализованные морфизмы алгебры $\mathfrak{A} = \overline{\bigcup_{x_1x_2} R(D_{x_1x_2})}^u$

Рассмотрим множества $\mathfrak{N}(D_{x_1x_2})$, состоящие из вещественных функций $\gamma(t, x)$ таких, что $\gamma(-\infty, 0) = 0$, $\dot{\gamma} \in \mathfrak{M}(D_{x_1x_2})$. Легко проверить, что каждая функция $\gamma \in \mathfrak{N}(D_{x_1x_2})$ по формуле

$$\rho_\gamma(W(\xi)) = e^{i\{\gamma, \xi\}}W(\xi) \equiv W_\gamma(\xi) \tag{4}$$

задает морфизм алгебры, локализованный в области $D_{x_1x_2}$. В терминах операторов $a(p)$, $a^*(p)$ преобразование (4) порождает следующее линейное каноническое преобразование (сдвига):

$$a(p) \to a_\gamma(p) = a(p) - \frac{i}{\sqrt{2}}[\tilde{\gamma}(-p) - i\tilde{\dot{\gamma}}(-p)|p|],$$

$$a^*(p) \to a_\gamma{}^*(p) = a^*(p) + \frac{i}{\sqrt{2}}[\tilde{\gamma}(p) + i\tilde{\dot{\gamma}}(p)|p|].$$

Хорошо известно, что подобное преобразование в общем случае является несобственным и, следовательно, в $\mathscr{H}_\Phi$ не существует унитарного оператора, порождающего преобразование (4) для всех $\xi \in \mathfrak{M}$. Однако для всех $\xi \in \mathfrak{M}(D_{x_1x_2})$ преобразование (4) порождается оператором $W(-\gamma)$,

$$\forall_{\xi \in \mathfrak{M}(D_{x_1x_2})} \quad \rho_\gamma(W(\xi)) = W(-\gamma)\, W(\xi)\, W(\gamma),$$

что прямо следует из коммутационных соотношений для $W(\xi)$.

Исходя из локализованных морфизмов $\{\rho_\gamma\}$, $\gamma \in \bigcup_{x_1x_2 \in M'_1} \mathfrak{R}(D_{x_1x_2}) \equiv \mathfrak{R}$ можно по общей схеме построить совокупность суперотборных секторов.

Пространство $\mathscr{H}_0$ с сетью $\{R(D_{x_1x_2})\}_{x_1x_2 \in M_1^1}$ и квазилокальной алгеброй $\mathfrak{A}_0 = \overline{\bigcup_{x_1, x_2 \in M_1^1} R(D_{x_1x_2})}$ будем считать вакуумным сектором и обозначим тождественное представление алгебры $\mathfrak{A}$ через π_0. Разобьем множество Γ всех морфизмов ρ_γ с $\gamma \in \mathfrak{R}$ на классы эквивалентных морфизмов, называя эквивалентными морфизмы γ_1, γ_2, порождающие унитарно эквивалентные семейства $\{W_{\gamma_1}(\xi)\}_{\xi \in \mathfrak{M}}$, $\{W_{\gamma_2}(\xi)\}_{\xi \in \mathfrak{M}}$ вейлевских операторов.

Каждому классу $\hat{\rho}_\gamma$ эквивалентных морфизмов ρ_γ поставим в соответствие семейство $\hat{\pi}_\gamma$ унитарно эквивалентных представлений $\pi_\gamma \doteq \pi_0 \circ \rho_\gamma$, $\rho_\gamma \in \hat{\rho}_\gamma$. Каждый класс $\hat{\pi}_\gamma$ задает когерентный сектор, который для всех ρ_γ, не лежащих в $\hat{\rho}_{\gamma_0}$, где γ_0 — тождественный морфизм, отличается от вакуумного сектора $\hat{\pi}_0$. В [8] показано, что π_γ ковариантны относительно группы $\mathscr{P}_+^\uparrow$ и имеют положительный спектр энергии. Кроме того, $\pi_{\gamma_1} \simeq \pi_{\gamma_2}$ тогда и только тогда, когда

$$\gamma_1(\infty, 0) = \gamma_2(\infty, 0) \equiv \gamma(\infty); \quad \dot{\gamma}_1(\infty, 0) = \dot{\gamma}_2(\infty, 0) = \dot{\gamma}(\infty).$$

Это означает, что все построенные когерентные секторы различаются (параметризуются) значениями $\gamma_1(\infty)$, $\dot{\gamma}_1(\infty)$ двух «зарядов» Q и $\dot{Q}$. Общая конструкция DHR для системы асимптотически эквивалентных представлений π_γ позволяет построить полевую алгебру заряженных полей ψ_i^*. При этом в силу ряда специфических черт модели (двумерность, отсутствие массы у полей), приводящих к отсутствию дуальности в вакуумном секторе, поля ψ_i^*, относящиеся к пространственно-подобным областям, удовлетворяют перестановочным соотношениям, более общим, чем обычные бозе-, и ферми-соотношения:

$$\psi_1^* \psi_2^* = e^{i\{\gamma_1, \gamma_2\}} \psi_2^* \psi_1^*.$$

Наличие у построенных полей аномальных (наряду с нормальными) перестановочных соотношений является специфической чертой модели. Можно, однако, надеяться, что общая идея Стритера и Уайльда, заключающаяся в явной реализации локализованных морфизмов операциями сдвига вейлевских операторов, может быть осуществлена и для других канонических систем, более близких к реальным.

Математический институт им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР
Всесоюзный научно-исследовательский
институт источников токов

Поступила в редакцию
26 октября 1972 г.

Литература

[1] H. J. Borchers. Commun. Math. Phys., **1**, 281, 1965.
[2] S. Doplicher, R. Haag, J. E. Roberts. Commun. Math. Phys., **13**, 1, 1969.
[3] S. Doplicher, R. Haag, J. E. Roberts Commun. Math. Phys., **15**, 173, 1969.
[4] S. Doplicher, R. Haag, J. E. Roberts. Commun. Math. Phys., **23**, 199, 1971.
[5] В. Н. Сушко, С. С. Хоружий. ТМФ, **4**, 171, 341, 1970.
[6] В. Н. Сушко, С. С. Хоружий. ТМФ, **13**, 291, 1972 (см. также S. S. Horuzhy, V. N. Sushko. Preprint JINR, E2-5575, Dubna, 1971).
[7] J M. Knight. J. Math. Phys. **2**, 459, 1961.
[8] R. F. Streater, J. Wilde. Nucl. Phys., **24**, 561, 1970.
[9] А. С. Уайтман. Проблемы в релятивистской динамике квантованных полей, «Наука», 1969.

AXIOMS OF OBSERVABLE ALGEBRA AND THE NOTION OF FIELD

M. K. Polivanov, V. N. Sushko, S. S. Horuzhy

Recent development of the algebraic axiomatic approach in quantum field theory is briefly reviewed. The main subjects considered are the rigorous algebraic treatment of systems with superselection rules and the procedure (worked out by Doplicher, Haag and Roberts) of constructing field quantities starting from the observable algebra.