

ВЫСОКОЧАСТОТНЫЕ ТОЧЕЧНЫЕ ИСТОЧНИКИ
В НЕОДНОРОДНОЙ УПРУГОЙ СРЕДЕ

Статья посвящена построению асимптотик при $\omega \rightarrow \infty$ задач с точечными источниками

$$\vec{t}\vec{u} = \text{grad}(\nu(\vec{x}) \text{div} \vec{u}) - \text{rot} \left(\frac{\mu(\vec{x}) \text{rot} \vec{u}}{\vec{x} \in \mathbb{R}^3} \right) + \rho(\vec{x}) \omega^2 \vec{u} = \vec{f}(\vec{x}). \quad (0.1)$$

Применяется метод пограничного слоя: начальные данные для лучевых формул, годных не слишком близко от источника, определяются путем сшивания с внутренним разложением.

Рассмотрены две физически содержательные задачи. Найдены диаграммы направленности а) поперечной волны в случае источника

$$\vec{f} = -4\pi(\text{grad} \delta(\vec{x} - \vec{x}') + \vec{\beta} \delta(\vec{x} - \vec{x}')) ; \quad (0.2)$$

б) продольной волны от источника

$$\vec{f} = -4\pi(\text{rot}(\vec{e}_1 \delta(\vec{x} - \vec{x}')) + \vec{q} \delta(\vec{x} - \vec{x}')) ; \quad (0.3)$$

$\vec{x}' \in \mathbb{R}^3$, δ - дельта-функция, \vec{e}_1 - орт оси x_1 .

Источники (0.2) и (0.3) моделируют естественные задачи о возбуждении упругой среды нагрузками, приложенными к очень малой сферической полости. В случае а) это равномерное давление, тогда, как оказывается,

$$\vec{\beta} = \frac{4}{3} \frac{\text{grad} \mu(\vec{x})}{\nu(\vec{x})} \Big|_{\vec{x} = \vec{x}'} \quad (0.4)$$

В случае б) это вращательное воздействие вида $\vec{t} = \text{const} [\vec{n}, \vec{e}_1]$, где \vec{t} - напряжение на границе полости, \vec{n} - нормаль к ней, а $[\cdot, \cdot]$ - векторное произведение. При этом *

$$\vec{q} = \frac{\text{grad} \mu - \langle \text{grad} \mu, \vec{e}_1 \rangle \vec{e}_1}{\mu} \Big|_{\vec{x} = \vec{x}'} \quad (0.5)$$

Искомая поперечная волна от источника (0.2), (0.4), как и продольная в случае (0.3), (0.5) отсутствует, если среда однородна.

* Связь источников (0.2), (0.4) и (0.3), (0.5) с теорией сферического излучателя автор предполагает разобрать в другом месте.

В работе [I] близким методом решались похожие вопросы для уравнения, отличающегося от (0.1) младшими членами, и источников, физический смысл которых менее ясен. Ниже значительно прозрачнее, чем в [I], излагается процедура построения внутреннего разложения. Приведены сведения о лучевых рядах и сшивке, необходимые для понимания вычислений. Подробное рассмотрение высших приближений лучевого метода и алгоритм построения всех начальных данных для них (в случае любого точечного источника) имеются в [I].

Статья начинается с изучения внутреннего разложения в скалярной задаче. В теории упругости используется не только отработанная при этом методика, но и конкретные результаты.

§ I. Внутреннее разложение в скалярной задаче

Рассмотрим уравнение

$$(\Delta_{\vec{x}} + \omega^2 n^2(\vec{x}))u = \delta(\vec{x} - \vec{x}'), \quad \omega \rightarrow \infty, \quad \vec{x}, \vec{x}' \in \mathbb{R}^3 \quad (I.1)$$

($\Delta_{\vec{x}}$ - оператор Лапласа по переменной \vec{x}) в области, содержащей точку \vec{x}' , предположив, что $n^2(\vec{x})$ бесконечно дифференцируемо и $n(\vec{x}) > 0$.

На некотором удалении от \vec{x}' (точнее, при $|\vec{x} - \vec{x}'| > \omega^{-1+\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$) формальное асимптотическое разложение функции

и разумно искать в виде лучевого ряда, см. [2], гл.6.

I. Уравнения пограничного слоя. Вблизи источника неоднородность среды можно счесть малым возмущением. Для реализации этой мысли введем растянутые координаты пограничного слоя

$$\vec{X} = \omega(\vec{x} - \vec{x}') \quad (I.2)$$

представим функцию $n^2(\vec{x})$ тейлоровским рядом

$$n^2(\vec{x}) \sim N_0^2 + N_1(\vec{x} - \vec{x}') + N_2(\vec{x} - \vec{x}')^2 + \dots = N_0^2 + \omega^{-1}N_1(\vec{X}) + \dots, \quad (I.3)$$

где N_j , $j > 0$ - однородные полиномы степени j , $N_0 \equiv n(\vec{x}') > 0$, и будем искать u в виде

$$u(\vec{x}, \vec{x}', \omega) \sim \sum_{j \geq 0} \omega^{1-j} V_j(\vec{X}), \quad (I.4)$$

полагая, что ω входит в V_j только через \vec{X} .

Разложение (I.4) будем называть внутренним.

Подстановка (I.2)-(I.4) в (I.1) и сравнение коэффициентов

при степенях ω дают ([2] , [3])

$$\mathcal{L} V_0 = \delta(\vec{x}) \quad (I.5)$$

$$\mathcal{L} V_j = - \sum_{s=1}^j \mathcal{L}_s V_{j-s}, \quad j \geq 1; \quad (I.6)$$

$$\mathcal{L} = \Delta_{\vec{x}} + \gamma^2; \quad \mathcal{L}_j = N_j(\vec{x}), \quad j > 0; \quad \gamma = N_0. \quad (I.7)$$

Полезно рассматривать дифференциальное выражение $\mathcal{L} = \Delta + \gamma^2$ не только при $\gamma = N_0$, но и при комплексных γ .

Для того, чтобы можно было сплести (I.4) с лучевыми рядами, отвечающими уходящим из \vec{x}' волнам [2], наложим условие излучения (предельного поглощения)

$$V_j(\vec{x}) \rightarrow 0 \quad \text{при } |\vec{x}| \rightarrow \infty; \quad j \geq 0, \quad \text{если } \text{Im} \gamma > 0. \quad (I.8)$$

Решения задач (I.5)-(I.6), (I.8) естественно рассматривать в классе $\mathcal{Y}(\mathbb{R}^3)$ обобщенных функций умеренного роста. Из [4] легко следует единственность и существование V_j , $j = 0, 1, \dots$

Исследование функций V_j мы проведем иначе, чем в [2], поскольку схема [2] в теории упругости встречает серьезные трудности.

Оператор $\Lambda_\gamma = \mathcal{L}^{-1} = (\Delta + \gamma^2)^{-1}$, обратный к \mathcal{L} , задается формулой

$$(\Lambda_\gamma u)(\vec{x}) = (2\pi)^{-3/2} \int_{\mathbb{R}^3} e^{-i\langle \vec{\xi}, \vec{x} \rangle} \frac{\hat{u}(\vec{\xi})}{(\gamma + i0)^2 - |\vec{\xi}|^2} d^3 \vec{\xi}, \quad (I.9)$$

где $\langle \vec{\xi}, \vec{x} \rangle = \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3$, \hat{u} - Фурье-образ функции $u \in \mathcal{Y}(\mathbb{R}^3)$:

$$\hat{u}(\vec{\xi}) = (2\pi)^{-3/2} \int_{\mathbb{R}^3} e^{i\langle \vec{\xi}, \vec{x} \rangle} u(\vec{x}) d^3 \vec{x}. \quad (I.10)$$

Решение задачи (I.5), (I.8) есть

$$V_0(\vec{x}) = (\Lambda_\gamma \delta)(\vec{x}) \Big|_{\gamma=N_0} = - \frac{e^{iN_0 R}}{4\pi R}, \quad R = |\vec{x}|. \quad (I.11)$$

Установим некоторые свойства последующих приближений V_1, V_2, \dots , не вычисляя их явно.

2. Ряд (I.4) - асимптотика по гладкости. Заметим, что действие оператора Λ_γ сглаживает функцию на 2 единицы \mathbb{R} . Действительно, гладкость (сингулярность) функции $\varphi(\vec{x})$ при $\vec{x} = 0$

\mathbb{R} Точнее: с - сингулярность [5] функции $\Lambda_\gamma f$ на 2 единицы меньше, чем у f .

определяется скоростью убывания (роста) ее Фурье образа $\hat{\varphi}(\vec{\xi})$ при $|\vec{\xi}| \rightarrow \infty$. Если U - удовлетворяющее условию излучения решение уравнения в $\mathcal{Y}(R^3)$

$$(\Delta_{\vec{x}} + \gamma^2) U = \varphi(\vec{x}), \quad (I.12)$$

где φ непрерывна вместе с производными порядка $\leq m$; $m \geq 0$, то при $|\vec{\xi}| \rightarrow \infty$

$$\hat{U}(\vec{\xi}) = \frac{\varphi(\vec{\xi})}{(\gamma + i0)^2 - |\vec{\xi}|^2} = |\vec{\xi}|^{-2} \hat{\varphi}(\vec{\xi}) (1 + o(|\vec{\xi}|^{-2})), \quad (I.13)$$

и, следовательно, $U(m+2)$ раз непрерывно дифференцируема.

Пользуясь уравнениями (I.6) легко доказать по индукции, что

V_j , $j > 0$ непрерывно дифференцируемо $(j+1)$ раз.

3. Структура функций V_j . Введем несколько обозначений.

Пусть $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ - целые неотрицательные числа, тогда,

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \equiv \alpha, \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \equiv |\alpha|, \quad \chi_1^{\alpha_1} \chi_2^{\alpha_2} \chi_3^{\alpha_3} \equiv \chi^\alpha, \\ \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial \chi_1^{\alpha_1}} \frac{\partial^{\alpha_2}}{\partial \chi_2^{\alpha_2}} \frac{\partial^{\alpha_3}}{\partial \chi_3^{\alpha_3}} \equiv \partial^\alpha; \quad |\vec{x}| \equiv R.$$

ЛЕММА I. Для любого целого $t \geq -1$ функция $R^t e^{i\gamma R}$ имеет представление

$$R^t e^{i\gamma R} = \sum_{m=0}^{t+2} C_m^{(t)} ((\Lambda_\gamma)^m \delta')(\vec{x}), \quad (I.14)$$

где $C_m^{(t)}$ константы, $(\Lambda_\gamma)^m$ - степени оператора (I.9), δ' - дельта-функция, сосредоточенная в начале координат.

Доказательство легко следует из тождества

$$(\Delta_{\vec{x}} + \gamma^2) R^t e^{i\gamma R} = \begin{cases} \left(\frac{t(t+1)}{R^2} + 2i\gamma \frac{t+1}{R} \right) R^t e^{i\gamma R}, & t \neq -1 \\ -4\pi \delta'(\vec{x}), & t = -1 \end{cases} \quad (I.15)$$

ЛЕММА 2. Если t - целое и $|\alpha| + t > -1$, то возможно представление:

$$\chi^\alpha R^t e^{i\gamma R} = \sum_{0 \leq |\beta| \leq |\alpha|} \sum_{0 \leq s \leq |\beta| + t} \partial^\beta \{ P_s^{(t, \alpha)}(R) e^{i\gamma R} \}, \quad (I.16)$$

причем $P_s^{(t, \alpha)}$ - полином степени s .

Для $|\alpha| = 0$ (I.16) сразу следует из (I.15). Рассмотрим случай $|\alpha| = 1$. Обозначим $\partial / \partial \chi_p = \partial_p$. Очевидно

$$\begin{aligned} \chi_p R^t e^{iyR} &= \frac{1}{iy} R^{t+1} \partial_p e^{iyR} = \frac{1}{iy} \partial_p (R^t e^{iyR}) - \frac{t+1}{iy} \chi_p R^{t-1} e^{iyR} = \\ &= \dots = \partial_p \left(\sum_{j=1}^{t+1} c_j R^j e^{iyR} \right), \end{aligned} \quad (I.17)$$

где c_j - константы.

Исходя из (I.17) докажем формулу (I.16) при $|\alpha| = 2$:

$$\begin{aligned} \chi_p \chi_q R^t e^{iyR} &= \chi_p \partial_p \left(\sum_{j=1}^{t+1} c_j R^j e^{iyR} \right) = \sum_{j=1}^{t+1} \partial_p \left(\frac{c_j}{iy} \chi_p R^j e^{iyR} \right) - \\ &- d'_{pq} \sum_{j=1}^{t+1} c_j R^j e^{iyR}; \end{aligned} \quad (I.18)$$

d'_{pq} - символ Кронекера: $d'_{pq} = 1$ при $p = q$ и $d'_{pq} = 0$, $p \neq q$. Действуя под знаком производной по χ_p , также как в (I.17), получим:

$$\chi_p \chi_q R^t = \partial_p d_q \sum_{j=1}^{t+2} \tilde{c}_j R^j e^{iyR} - \sum_{j=1}^{t+1} \tilde{c}_j R^j e^{iyR}, \quad (I.19)$$

где $\tilde{c}_j, \tilde{c}'_j$ - константы, что доказывает (I.16) при $|\alpha| = 2$.

Дальнейшую индукцию по $|\alpha|$ мы опускаем.

Лемму 2 легко обобщить на случай $|\alpha| + t \geq -1$, полагая в (I.16) $P_{-1}^{(\alpha)} \equiv \text{const } R^{-1}$.

ЛЕММА 3. По любым мультииндексам α и целым t , для которых $t + |\alpha| \geq -1$ можно найти полиномы $\tilde{P}_m^{(t, \alpha)}$ такие, что

$$\chi^\alpha R^t e^{iyR} = \sum_{0 \leq |\theta| \leq |\alpha|} \partial^\theta \sum_{m \leq |\theta| + t + 2} \left(\tilde{P}_m^{(t, \alpha)}(\lambda_y) \sigma \right) (\vec{X}). \quad (I.20)$$

Эта формула непосредственно следует из предыдущих.

Из лемм 1 - 3 вытекает

ТЕОРЕМА I. Функции $V_j(\vec{X})$ удовлетворяющие рекуррентным уравнениям (I.5)-(I.6) и условиям (I.8), допускают представление

$$V_j(\vec{X}) = \sum_{0 \leq |\beta| \leq j} \partial^\beta \sum_{0 \leq s \leq 2j+1} \left(Q_s^{(j)}(\lambda_y) \sigma \right) (\vec{X}), \quad (I.21)$$

где $Q_s^{(j)}$ - полиномы степени s .

Следствием (I.21) является формула

$$V_j(\vec{X}) = e^{iyR} W^{(j)}(\vec{X}), \quad j \geq 0 \quad (I.22)$$

$W^{(j)}$ - конечная сумма однородных функций:

$$W^{(j)} = \sum_{0 \leq p \leq 2j-1} W_p^{(j)}(\vec{X}), \quad W_p^{(j)}(\vec{X}) = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq j, |\alpha|+p=2j-1} C^{(\alpha, \beta, j, p)} R^\beta X^\alpha,$$

$C^{(\alpha, \beta, j, p)}$ - константы.

Из теоремы и леммы 2 следует оценка: $V_j(\vec{X}) = O(|\vec{X}|^{2j-1}), |\vec{X}| \rightarrow \infty$.
Поэтому (I.4) и лучевой ряд пригодны *) в слое

$$\omega^{-1+\varepsilon_1} < |\vec{x} - \vec{x}'| < \omega^{-1/2-\varepsilon_2}; \quad \varepsilon_1 + \varepsilon_2 < \frac{1}{2}, \quad \varepsilon_{1,2} > 0. \quad (I.23)$$

Вследствие (I.22) и непрерывности V_1, V_2, \dots , функции $W^{(1)}, W^{(2)}, \dots$ не содержат слагаемых отрицательных степеней однородности. Доказанных сведений о V_0, V_1, V_2, \dots достаточно для сшивания внутреннего разложения (I.4) с лучевым. Эта процедура рассмотрена в [2].

§ 2. Теория упругости: схема

Поле перемещений в стационарной динамической задаче возбуждения упругих волн источником объемной силы с плотностью $\vec{F}(\vec{x})$ описывается уравнением (0.I). Константа $\omega > 0$ имеет смысл частоты колебаний, функция $\rho(\vec{x})$ - плотности среды, $\mu(\vec{x})$ - называется одним из параметров Ламе, а через $\nu(\vec{x})$ мы обозначаем комбинацию $\nu(\vec{x}) = \lambda(\vec{x}) + 2\mu(\vec{x})$, где λ - другой параметр Ламе. Мы предполагаем, что векторная обобщенная функция \vec{F} сосредоточена в точке \vec{x}' : $\text{supp } \vec{F} = \{\vec{x}'\}$; ν, μ и ρ бесконечно дифференцируемы и не зависят от ω и, кроме того, $\nu > \mu > 0, \rho > 0$.

I. Лучевые формулы. Для (0.I) можно построить лучевые ряды [6]

$$\vec{U}^a(\vec{x}, \vec{x}', \omega) \sim e^{i\omega\tau^a} \sum_{j \geq 0} (-i\omega)^{j^a} j^{\vec{a}} \vec{U}^{aj}, \quad \vec{U}^b(\vec{x}, \vec{x}', \omega) \sim e^{i\omega\tau^b} \sum_{j \geq 0} (-i\omega)^{j^b} j^{\vec{b}} \vec{U}^{bj}, \quad (2.I)$$

описывающие продольные и поперечные волны, уходящие из источника. В (2.I) j^a и j^b - произвольные константы, $\tau^a \equiv \tau^a(\vec{x}, \vec{x}') \geq 0$, $\tau^b \equiv \tau^b(\vec{x}, \vec{x}') \geq 0$ - решения уравнений эйконала $(\nabla\tau^a)^2 = \frac{1}{a^2}$,

$(\nabla\tau^b)^2 = 1/b^2$ отвечающих скоростям продольной и поперечной волн

$$a(\vec{x}) = \sqrt{\frac{\nu(\vec{x})}{\rho(\vec{x})}} > 0, \quad b(\vec{x}) = \sqrt{\frac{\mu(\vec{x})}{\rho(\vec{x})}} > 0. \quad (2.2)$$

*) Т.е. сами они и невязки их частичных сумм являются асимптотическими рядами.

В нашей задаче τ^a , τ^b соответствуют центральным полям лучей, выпущенных из \vec{x}' , и имеют смысл времен пробега от \vec{x}' до \vec{x} .

Введем лучевые координаты (τ^a, \vec{z}^a) , (τ^b, \vec{z}^b) , где \vec{z}^a и \vec{z}^b — точки единичной сферы S^2 , параметризующие углы выхода из \vec{x}' продольных и поперечных лучей, попадавших в \vec{x} (*). Положим для определенности $\vec{z}^{a,b} \rightarrow \text{grad}_{\vec{x}} |\vec{x} - \vec{x}'| : |\text{grad}_{\vec{x}} |\vec{x} - \vec{x}'||, \vec{x} - \vec{x}'$. Пусть $\gamma^a(\vec{x})$, $\gamma^b(\vec{x})$ — геометрические расхождения лучей [2], [6], [1]. Можно считать, что при $|\vec{x} - \vec{x}'| \rightarrow 0$

$$\gamma^{a,b}(\vec{x}) = |\vec{x} - \vec{x}'|^2 \cdot (1 + O(|\vec{x} - \vec{x}'|)). \quad (2.3)$$

Формулы для амплитуд \vec{U}^{aj} , \vec{U}^{bj} таковы [6], [1]:

$$\vec{U}^{aj} = \sqrt{\frac{a}{\gamma^a}} \{ \Psi^j(\vec{z}^a) \text{grad} \tau^a + \vec{f}^{aj}(\Psi^0, \Psi^1, \dots, \Psi^{j-1}), j \geq 0, \quad (2.4)$$

где Ψ^0, Ψ^1, \dots — произвольные гладкие на единичной сфере функции; выражение \vec{f}^{aj} зависит только от $\Psi^s, 0 \leq s \leq j$; $\vec{f}^{a0} \equiv 0$;

$$\vec{U}^{bj} = \frac{1}{\sqrt{\rho^b \gamma^b}} \{ \cos \theta \cdot \vec{I} - \sin \theta \cdot \vec{J} \} \{ \vec{\gamma}^j(\vec{z}^b) + \vec{f}^{bj}(\vec{\gamma}^0, \dots, \vec{\gamma}^{j-1}) \}; \quad (2.5)$$

$\vec{\gamma}^0, \vec{\gamma}^1, \dots$ — произвольные гладкие на S^2 векторные функции;

$\theta(\vec{x}) \equiv \int_0^{\vec{x}^b} \rho^b T d\tau$, причем интегрирование ведется вдоль поперечного луча, а T — его кручение; $\vec{f}^{b0} \equiv 0$; \vec{I} и \vec{J} — матрицы 3×3 . В базисе, образованном касательной $\text{grad} \tau^b : |\text{grad} \tau^b|$, нормалью и бинормалью к этому лучу в точке \vec{x}

$$\vec{I}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{J}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.6)$$

Таким образом, можно считать $\vec{\gamma}^j(\vec{z}^b) \perp \text{grad} \tau^b$, $j = 0, 1, \dots$.

Будем разыскивать $\vec{u}(\vec{x}, \vec{x}', \omega)$ (при условии $|\vec{x} - \vec{x}'| \omega \rightarrow \infty$, обеспечивающем асимптотический характер лучевых рядов [1]) в виде

$$\vec{u}(\vec{x}, \vec{x}', \omega) \sim \vec{U}^a(\vec{x}, \vec{x}', \omega) + \vec{U}^b(\vec{x}, \vec{x}', \omega), \quad (2.7)$$

положив для однозначности

*) Мы рассматриваем столь малую окрестность \vec{x}' , что в ней нет фокусировок.

$$\gamma^a = \gamma^b \equiv \tilde{\gamma}, \quad |\vec{U}^{a0}| + |\vec{U}^{b0}| \neq 0. \quad (2.8)$$

Функции $\psi^0, \psi^1, \dots, \vec{\gamma}^0, \vec{\gamma}^1, \dots$, называемые начальными данными лучевого метода, и константа $\tilde{\gamma}$ определяются из сшива-ния асимптотик (2.6) при $\vec{x} \rightarrow \vec{x}'$ с внутренним разложением в слое (I.23).

2. Внутреннее разложение. Допустим, что в (0.I)

$$\vec{F}^1(\vec{x}) = \vec{F}_{-4}^1(\vec{x} - \vec{x}') + \vec{F}_{-3}^1(\vec{x} - \vec{x}'),$$

где компоненты \vec{F}_j^1 однородны степени j . Следовательно, структура компонент \vec{F}_{-4}^1 и \vec{F}_{-3}^1 такова: $(\vec{F}_{-4}^1)_m = c_{mj} \frac{\partial}{\partial x_j} d(\vec{x} - \vec{x}')$, $(\vec{F}_{-3}^1)_m = c_m d'(\vec{x} - \vec{x}')$, где c_m, c_{mj} - константы. По повто-ряющимся нижним значкам подразумевается суммирование от I до 3.

Разложим коэффициенты (0.I) по степеням координат погранич-ного слоя (I.2)

$$\nu(\vec{x}) \sim \nu^0 + \frac{1}{\omega} \nu^1(\vec{X}) + \dots, \quad \mu(\vec{x}) \sim \mu^0 + \frac{1}{\omega} \mu^1(\vec{X}) + \dots, \quad \rho(\vec{x}) \sim \rho^0 + \frac{1}{\omega} \rho^1(\vec{X}) + \dots, \quad (2.9)$$

где $\nu^0 = \nu(\vec{x}')$, $\mu^0 = \mu(\vec{x}')$, $\rho^0 = \rho(\vec{x}')$, а ν^s, μ^s, ρ^s - од-нородные полиномы степени s .

Соответственно представим оператор \vec{L} (0.I):

$$\vec{L} = \omega^2 (\vec{L}^0 + \frac{1}{\omega} \vec{L}^1 + \frac{1}{\omega^2} \vec{L}^2 + \dots), \quad (2.10)$$

$$\vec{L}^j = \text{grad}_{\vec{x}} \nu^j(\vec{X}) \text{div}_{\vec{x}} - \text{rot}_{\vec{x}} \mu^j(\vec{X}) \text{rot}_{\vec{x}} + \rho^j(\vec{X}) \vec{E}, \quad (2.11)$$

где \vec{E} - единичная матрица 3×3 .

Асимптотическое решение (0.I) вблизи \vec{x}' ищем в виде

$$\vec{u}(\vec{x}, \vec{x}', \omega) \sim \sum_{m \geq 0} \omega^{2-m} \vec{V}^m(\vec{X}) \quad (2.12)$$

предполагая, что \vec{V}^m зависят от ω лишь через \vec{X} . Подстав-ляя (2.10 - 12) в (0.I), получаем

$$\vec{L} \vec{u} \sim \sum_{p \geq 0} \omega^{2-p} \sum_{m \geq p} \vec{L}^p \omega^{-m} \vec{V}^m = \omega^4 \vec{F}_{-4}^1(\vec{X}) + \omega^3 \vec{F}_{-3}^1(\vec{X}), \quad (2.13)$$

откуда

$$\left. \begin{aligned} \vec{\Pi}^0 \vec{V}^0 &= \vec{E}_4, \quad \vec{\Pi}^0 \vec{V}^1 = \vec{E}_3 - \vec{\Pi}^1 \vec{V}^1, \\ \vec{\Pi}^0 \vec{V}^p &= -\sum_{m=0}^{p-1} \vec{\Pi}^{p-m} \vec{V}^m, \quad p \geq 2 \end{aligned} \right\} \quad (2.14)$$

Будем рассматривать уравнения (2.14) в классе $\mathcal{G}(\mathbb{R}^3)$ обобщенных вектор-функций умеренного роста, выделяя единственное решение каждого из них принципом предельного поглощения для дифференциального выражения

$$\vec{\Pi}^0 = \nu^0 \text{grad}_{\vec{x}} \text{div}_{\vec{x}} - \mu^0 \text{rot}_{\vec{x}} \text{rot}_{\vec{x}} + \rho^0 \vec{E} \equiv \rho^0 \left\{ \vec{E} - \frac{1}{2^2} \text{grad}_{\vec{x}} \text{div}_{\vec{x}} - \frac{1}{\beta^2} \text{rot}_{\vec{x}} \text{rot}_{\vec{x}} \right\};$$

$$\vec{V}^j \rightarrow 0 \quad \text{при } |\vec{X}| \rightarrow \infty, \quad \text{если } \text{Im} \alpha > 0, \text{Im} \beta > 0. \quad (2.15)$$

Условие (2.15) призвано обеспечить сшивание (2.12) с (2.1), (2.7) в промежуточной области (I.23).

Для определения всех начальных данных лучевого метода требуются следующие факты.

ТЕОРЕМА 2. а) Гладкость векторов \vec{V}^l при $|\vec{X}|=0$ растет с номером: $\vec{V}^l(\vec{X}) = O(|\vec{X}|^{l-2})$, $l=0,1,\dots$

б) Аналитическая структура векторов \vec{V}^l , такова

$$\vec{V}^l = \vec{V}^{al} + \vec{V}^{bl}$$

$$\vec{V}^{al} = e^{i\alpha|\vec{X}|} \vec{W}^{al}, \quad \vec{V}^{bl} = e^{i\beta|\vec{X}|} \vec{W}^{bl}; \quad (2.16)$$

$$\alpha \equiv \sqrt{\frac{\rho^0}{\nu^0}} \equiv \frac{1}{a(\vec{x}^1)}, \quad \beta \equiv \sqrt{\frac{\rho^0}{\mu^0}} \equiv \frac{1}{b(\vec{x}^1)},$$

причем компоненты векторов \vec{W}^{al} и \vec{W}^{bl} суть конечные суммы однородных функций целых степеней

$$\vec{W}^{cl} = \sum_q \vec{W}_q^{cl}, \quad \vec{W}_q^{cl}(\eta \vec{X}) = |\eta|^q \vec{W}_q^{cl}(\vec{X}); \quad c=a,b. \quad (2.17)$$

в) Имеет место оценка на бесконечности

$$|\vec{V}^l(\vec{X})| = O(|\vec{X}|^{2l-1}), \quad |\vec{X}| \rightarrow \infty. \quad (2.18)$$

г) Наборы функций

$$\langle \vec{W}_{-1}^{am}, \text{grad}_{\vec{x}} |\vec{X}| \rangle, \quad 0 \leq m \leq M \quad (2.19a)$$

$$\vec{W}_{-1}^{bm} - \langle \vec{W}_{-1}^{bm}, \text{grad}_{\vec{x}} |\vec{X}| \rangle \text{grad}_{\vec{x}} |\vec{X}|, \quad 0 \leq n \leq N, \quad (2.19b)$$

определяют (однозначно, если наложено условие (2.8)) константы γ^a, γ^b и начальные данные соответственно $\psi^0, \psi^1, \dots, \psi^M$ и $\bar{\psi}^0, \bar{\psi}^1, \dots, \bar{\psi}^M$. Здесь $M, N = 0, 1, \dots, < \cdot, \cdot >$ - скалярное произведение в \mathbb{R}^3 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО п.г) (и указание явной процедуры выбора начальных данных) приведено в [I]. Наметим путь к доказательству п.п.а)-в).

3. Обращение оператора \vec{L}^0 . Рассмотрим в $\vec{Y}(\mathbb{R}^3)$ уравнение

$$\vec{L}^0 \vec{U} = \vec{\Phi} \quad (2.20)$$

Преобразование Фурье (I.10) переводит (2.20) в линейную алгебраическую систему

$$\rho^0 \left\{ \vec{E} - \frac{1}{\alpha^2} \vec{\xi} \langle \vec{\xi}, \cdot \rangle + \frac{1}{\beta^2} [\vec{\xi}, [\vec{\xi}, \cdot]] \right\} \vec{U} = \hat{\vec{\Phi}}(\vec{\xi}) \quad (2.21)$$

($\hat{\vec{\Phi}}$ - Фурье-образ $\vec{\Phi}$, $[\cdot, \cdot]$ - векторное произведение). Решая (2.21), находим

$$\vec{U}(\vec{\xi}) = \frac{1}{\rho^0} \left\{ \frac{\beta^2}{\beta^2 - |\vec{\xi}|^2} \vec{E} - \left(\frac{1}{\beta^2 - |\vec{\xi}|^2} - \frac{1}{\alpha^2 - |\vec{\xi}|^2} \right) \vec{\xi} \langle \vec{\xi}, \cdot \rangle \right\} \hat{\vec{\Phi}}(\vec{\xi}). \quad (2.22)$$

Обратив преобразование Фурье, помня об условии излучения, получим

$$\begin{aligned} \vec{U}(\vec{x}) &= ((\vec{L}^0)^{-1} \vec{\Phi})(\vec{x}) = \\ &= \frac{1}{\rho^0} \left\{ \beta^2 \Lambda_\beta \vec{E} + (\Lambda_\beta - \Lambda_\alpha) \langle \text{grad}_{\vec{x}}, \cdot \rangle \text{grad}_{\vec{x}} \right\} \vec{\Phi} = \\ &= \frac{1}{\rho^0} \left\{ \beta^2 \Lambda_\beta \vec{\Phi} + (\Lambda_\beta - \Lambda_\alpha) \text{grad}_{\vec{x}} \text{div}_{\vec{x}} \vec{\Phi} \right\}, \end{aligned} \quad (2.23)$$

где Λ_α и Λ_β обозначают интегральные операторы $(\Delta_{\vec{x}} + \alpha^2)^{-1}$ и $(\Delta_{\vec{x}} + \beta^2)^{-1}$, см. (I.9).

Из (2.23) легко следует, что решение уравнения (2.20) удовлетворяет при $|\vec{\xi}| \rightarrow \infty$ оценке $\vec{U}(\vec{\xi}) = O(|\vec{\xi}|^{-2} \hat{\vec{\Phi}}(\vec{\xi}))$ и, следовательно, оператор $(\vec{L}^0)^{-1}$ увеличивает гладкость на 2 единицы. Поскольку правые части (2.14), (2.15) понижают гладкость не более, чем на единицу, п.а) теоремы 2 доказан.

Пункты б) и в) выводятся из представления для \vec{V}^l , аналогичного (I.21)-(I.22).

4. Представление функций \vec{V}^l . Лемма: При любом $l \geq 0$ существуют такие матрицы 3×3 : $\vec{P}^{(l)}(\Lambda_\alpha, \partial)$ и $\vec{Q}^{(l)}(\Lambda_\beta, \partial)$ элементы которых суть полиномы относительно интегральных операторов

соответственно Λ_α и Λ_β и операторов дифференцирования $\partial_1, \partial_2, \partial_3$ ($\partial_j \equiv \partial / \partial X_j$), и такой вектор \vec{h} , что

$$\vec{V}^{\ell}(\vec{X}) = (\vec{P}^{\ell})(\Lambda_\alpha, \partial) + \vec{Q}^{\ell}(\Lambda_\beta, \partial) \vec{h} \sigma(\vec{X}). \quad (2.24)$$

Проверим, что функция \vec{V}^0 представима в виде (2.24).

Положив в (2.21) $\vec{\Phi} = -4\pi \sigma(\vec{X}) \vec{e}_p$ (\vec{e}_p - орт оси X_p , p фиксировано) получим с помощью (1.15) и (2.23) известную формулу для решения задачи о сосредоточенной силе

$$(\mathcal{L}_j^0 G_{pj})_s = -4\pi \sigma(\vec{X}) \sigma_{ps} \quad (2.25)$$

$$G_{ps}(\vec{X}) = \frac{1}{\rho^0} \{ (\beta^2 \sigma_{ps}^0 + \partial_{ps}^2) B - \partial_{ps}^2 A \}, \quad (2.26)$$

где обозначено

$$\partial_{ps}^2 = \frac{\partial^2}{\partial X_p \partial X_s}, \quad A \equiv \frac{e^{i\alpha R}}{R}, \quad B \equiv \frac{e^{i\beta R}}{R}, \quad R \equiv |\vec{X}|. \quad (2.27)$$

Решение \vec{V}^0 первого уравнения (2.14) является линейной комбинацией первых производных по \vec{X} от $G_{ps}(\vec{X})$ при разных p , т.е. имеет структуру (2.24).

Представление (2.24) для $\ell \geq 0$ доказывается по индукции с помощью элементарно проверяемой формулы

$$\Lambda_\alpha \Lambda_\beta = \Lambda_\beta \Lambda_\alpha = \frac{\Lambda_\alpha - \Lambda_\beta}{\alpha^2 - \beta^2} \quad (2.28)$$

(выражающей известное тождество Гильберта для резольвент) и результатов § I о решениях уравнений со скалярным оператором. Мы опускаем эти рассуждения.

Утверждение п.б теоремы 2, за исключением оценок пределов суммирования в (2.17) очевидно следует из леммы. Доказательство же (2.17) и п.в) требует более подробного анализа структуры матриц \vec{P}^{ℓ} и \vec{Q}^{ℓ} в (2.24), который мы опускаем.

§ 3. Вычисление начальных данных

Приведем сначала несколько полезных тождеств из [I].

I. Вспомогательные формулы. Из (1.15) следует, что

$$4\pi ((\Lambda_\alpha)^2 \delta)(\vec{X}) = \Lambda_\alpha A = \frac{1}{2i\alpha} e^{i\alpha R} \quad (3.1)$$

$$\Lambda_\beta B = \frac{1}{2i\beta} e^{i\beta R}. \quad (3.2)$$

Пользуясь (2.23), (3.1), (3.2) находим

$$((\vec{\Pi}^0)^{-1} \vec{e}_p A)_q = -\frac{1}{\rho^0} \{ (\beta^2 d_{pq}^2 + d_{pq}^2) \frac{A-B}{\alpha^2 - \beta^2} + d_{pq}^2 \frac{e^{i\alpha R}}{2i\alpha} \}, \quad (3.3)$$

$$((\vec{\Pi}^0)^{-1} \vec{e}_p B)_q = \frac{1}{\rho^0} \left\{ d_{pq}^2 \frac{A-B}{\alpha^2 - \beta^2} + (\beta^2 d_{pq}^2 + d_{pq}^2) \frac{e^{i\beta R}}{2i\beta} \right\}. \quad (3.4)$$

Введем для векторов вида (2.16) обозначения:

$$e^{i\alpha R} \vec{W}_{-1}^{al} \equiv \mathcal{P}^a \vec{V}^l, \quad e^{i\beta R} \vec{W}_{-1}^{el} \equiv \mathcal{P}^b \vec{V}^l. \quad (3.5)$$

Роль функций $\mathcal{P}^a \vec{V}^l$ и $\mathcal{P}^b \vec{V}^l$ в определении начальных данных видна из п.1) теоремы 2.

Нетрудно проверить, что если \vec{k} - вектор с постоянными компонентами, то

$$\mathcal{P}^a (\vec{\Pi}^0)^{-1} \text{rot}(\vec{k} \chi_\ell B) \equiv \mathcal{P}^b (\vec{\Pi}^0)^{-1} \text{grad}(\kappa_\beta \chi_\beta A) \equiv 0. \quad (3.6)$$

2. Поперечная волна от центра расширения (0.2). Первые два уравнения (2.14) для источника (0.2) суть

$$\vec{\Pi}^0 \vec{V}^0 = -4\pi \text{grad}_{\vec{x}} \delta(\vec{X}), \quad \vec{\Pi}^0 \vec{V}^1 = -\vec{\Pi}^1 \vec{V}^0 - 4\pi \vec{p} \delta(\vec{X}). \quad (3.7)$$

1. Найдем функции \vec{V}^0 и $\vec{\mathcal{P}}^b \vec{V}^1$, через которые выражаются Ψ^0 , $\vec{\chi}^0$ и $\vec{\chi}^1$.

Легко видеть, что

$$\vec{V}^0 = \frac{\alpha^2}{\rho^0} \text{grad}_{\vec{x}} A, \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned} -\vec{\Pi}^1 \vec{V}^0 &= -\text{grad}_{\vec{x}} \nu^1(\vec{X}) \text{div}_{\vec{x}} \vec{V}^0 + \text{rot}_{\vec{x}} \mu^1(\vec{X}) \text{rot}_{\vec{x}} \vec{V}^0 - \rho^1(\vec{X}) \vec{V}^0 = \\ &= -\frac{\alpha^2}{\rho^0} \{ \text{grad}(\nu^1 \Delta A) + \rho^1 \text{grad} A \} = \\ &= \frac{\alpha^2}{\rho^0} \{ \text{grad}(\nu^1 (\alpha^2 A + 4\pi \delta(\vec{X})) - \rho^1 A) - A \text{grad} \rho^1 \} = \\ &= \frac{\alpha^2}{\rho^0} \text{grad}((\alpha^2 \nu^1 - \rho^1) A) + \frac{\alpha^2}{\rho^0} \text{grad} \rho^1 \cdot A. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Мы воспользовались здесь тождествами $\text{rot grad} \Psi = 0$, $\chi_j \delta(\vec{X}) \equiv 0$.

Вследствие (3.6), первое слагаемое в правой части (3.9) не влияет на величину $\mathcal{P}^b \vec{V}^1$. Следовательно,

$$\mathcal{P}^{\ell} \vec{V}^1 = \mathcal{P}^{\ell} (\vec{\Pi}^0)^{-1} \{ \vec{Y} A - 4\pi \vec{\rho} \delta'(\vec{X}) \}, \quad (3.10)$$

где

$$\vec{Y} \equiv \frac{\alpha^2}{\rho^0} \text{grad}_{\vec{x}} \rho^1(\vec{X}) \equiv \gamma(\vec{x}') \text{grad}_{\vec{x}} \rho(\vec{x}) \Big|_{\vec{x}=\vec{x}'}$$

С помощью (3.3) и (2.25)-(2.26), получаем:

$$\begin{aligned} (\mathcal{P}^{\ell} \vec{V}^1)_m &= \frac{1}{\rho^0} \mathcal{P}^{\ell} \{ (\alpha^2 - \beta^2)^{-1} Y_{\ell} + P_{\ell} \} (\beta^2 \delta'_{\ell m} + \delta_{\ell m}^2) B = \\ &= \frac{\beta^2}{\rho^0} \{ (\alpha^2 - \beta^2)^{-1} Y_{\ell} + P_{\ell} \} (\delta_{\ell m} - \delta_{\ell} \delta_m) B, \end{aligned} \quad (3.11)$$

т.е.

$$\mathcal{P}^{\ell} \vec{V}^1 = (\vec{Q} - \langle \vec{Q}, \vec{s} \rangle \vec{s}) B \sqrt{\frac{\beta^1}{\rho^0}}, \quad (3.12)$$

где

$$\vec{s} = \text{grad}_{\vec{x}} R, \quad (3.13)$$

$$\vec{Q} = \left\{ \frac{\ell^2(\vec{x}) \text{grad}_{\vec{x}} \rho(\vec{x})}{\rho(\vec{x}) (\ell^2(\vec{x}) - a^2(\vec{x}))} + \vec{P} \right\} \Big|_{\vec{x}=\vec{x}'} \cdot \frac{1}{\ell^{3/2}(\vec{x}') \rho^{1/2}(\vec{x}')} \quad (3.14)$$

II°. Займемся теперь сшиванием разложений (2.7)-(2.1)-(2.8) в слое (I.23). Перейдем в лучевых формулах к растянутым переменным (I.2) и разложим функции $a, \ell, \gamma^a, \gamma^{\ell}, \tau^a, \tau^{\ell}, \vec{s}^a, \vec{s}^{\ell}$ в ряды, асимптотические при $R \rightarrow \infty, \omega R^2 \rightarrow \infty$. Поскольку $\omega \tau^a = \alpha R + O(R^2/\omega), \omega \tau^{\ell} = \beta R + O(R^2/\omega)$, перенеся малые члены из фаз в амплитуды, получим (см. [I]):

$$\begin{aligned} \vec{w} &\sim (-i\omega)^{\vec{r}} \{ \vec{U}^{a0} e^{i\omega \tau^a} + \vec{U}^{\ell 0} e^{i\omega \tau^{\ell}} \} = \\ &= (-i\omega)^{\vec{r}} \cdot \omega \left\{ \sqrt{\frac{\alpha^1}{\rho^0}} \psi \vec{s} e^{i\omega R} + \sqrt{\frac{\beta^1}{\rho^0}} \vec{f}(\vec{s}) e^{i\beta R} \right\} \left(1 + O\left(\frac{R^2}{\omega}\right) + O\left(\frac{1}{R}\right) \right). \end{aligned} \quad (3.15)$$

С другой стороны, в этом же слое (I.23)

$$\vec{u} \cdot \omega^2 \vec{V}^0 = \omega^2 \frac{\alpha^2}{\rho^0} \operatorname{grad}_{\vec{x}} A = \omega^2 \mathcal{P}^a \vec{V}^0 \cdot (1 + 0(\frac{R^2}{\omega}) + 0(\frac{1}{R})),$$

$$\mathcal{P}^a \vec{V}^0 = \frac{i \alpha^3}{\rho^0} A \vec{s}. \quad (3.16)$$

Выражения (3.15) и (3.16) не могут быть близки, если не положить

$$\tilde{\gamma} = 1 \quad (3.17)$$

$$\psi^0 = -\sqrt{\frac{\rho^{0'}}{\alpha}} e^{-i\alpha R} \mathcal{P}^a \vec{V}^0 = -a^{5/2}(\vec{x}') \rho^{-1/2}(\vec{x}'), \quad (3.18)$$

$$\vec{\chi}^0 = \sqrt{\frac{\rho^{0'}}{\beta}} e^{-i\beta R} \mathcal{P}^b \vec{V}^0 \equiv 0. \quad (3.19)$$

Продолжая сшивание (см. [I]), получаем

$$\vec{\chi}^1(\vec{s}) = \sqrt{\frac{\rho^{0'}}{\beta}} e^{-i\beta R} \mathcal{P}^b \vec{V}^1 = \vec{Q} - \langle \vec{Q}, \vec{s} \rangle \vec{s}, \quad (3.20)$$

где \vec{Q} определено формулой (3.13).

3. Продольная волна от центра вращения (0.3).

I°. Ищем сначала \vec{V}^0 и $\mathcal{P}^a \vec{V}^1$ из уравнений

$$\vec{\mathcal{L}}^0 \vec{V}^0 = -4\pi \operatorname{rot}_{\vec{x}}(\vec{e}_1 \sigma(\vec{X})), \quad \vec{\mathcal{L}}^0 \vec{V}^1 = -\vec{\mathcal{L}}^1 \vec{V}^0 - 4\pi \vec{q} \sigma(\vec{X}), \dots \quad (3.21)$$

Нетрудно проверить, что

$$\vec{V}^0 = \frac{\beta^2}{\rho^0} \operatorname{rot}_{\vec{x}}(\vec{e}_1 B), \quad (3.22)$$

а

$$-\vec{\mathcal{L}}^1 \vec{V}^0 = \frac{\beta^2}{\rho^0} \operatorname{rot}_{\vec{x}} \{ (\beta^2 \mu^1(\vec{X}) - \rho^1(\vec{X})) \vec{e}_1 B \} + \vec{Z} B, \quad (3.23)$$

где $\vec{Z} = \frac{\beta^2}{\rho^0} [\operatorname{grad}_{\vec{x}} \rho^1(\vec{X}), \vec{e}_1]$. Пренебрегая, вследствие (3.6), первым слагаемым в (3.22), находим, что

$$\mathcal{P}^a \vec{V}^1 = \mathcal{P}^a (\vec{\mathcal{L}}^0)^{-1} \{ \vec{Z} B - 4\pi \vec{q} \sigma(\vec{X}) \}. \quad (3.24)$$

Наконец, используя (3.4), (2.25)-(2.26) имеем

$$(\mathcal{P}^a \vec{V}^1)_m = \frac{1}{\rho^0} \{ (\alpha^2 - \beta^2)^{-1} z_i - q_i \} \partial_{lm}^2 A = \sqrt{\frac{\alpha'}{\rho^0}} \langle \vec{P}, \vec{s} \rangle \vec{s} A, \quad (3.25)$$

где

$$\vec{P} = \left\{ \frac{a^2(\vec{x}) [\operatorname{grad}_{\vec{x}} \rho(\vec{x}), \vec{e}_1]}{\rho(\vec{x})(b^2(\vec{x}) - a^2(\vec{x}))} + \vec{q} \right\} \Big|_{\vec{x} = \vec{x}'} \cdot \frac{1}{a^{3/2}(\vec{x}') \rho^{1/2}(\vec{x}')} \quad (3.26)$$

П. Рассуждая как в п.2, получаем

$$\tilde{\gamma} = 1, \quad \psi^0 \equiv 0, \quad \vec{\gamma}^0 = \sqrt{\frac{\rho^{01}}{\beta}} e^{-i\beta R} \mathcal{P}^b \vec{V}^0 = -b^{-5/2}(\vec{x}') \rho^{-1/2}(\vec{x}'), \quad (3.27)$$

$$\psi^1(\vec{s}) = e^{-i\alpha R} \sqrt{\frac{\rho^{01}}{\alpha}} \mathcal{P}^a \vec{V}^0 = \langle \vec{P}, \vec{s} \rangle. \quad (3.28)$$

Приложению полученных формул к сейсмике предполагается посвятить специальную статью.

Литература

1. К и с е л е в А.П. О начальных данных для лучевых формул, описывающих высокочастотные точечные источники в неоднородных упругих средах. - *Вопр.дин.теор.распр.сейсм.в.*, 1975, XV, с.6-27.
2. Б а б и ч В.М., К и р п и ч н и к о в а Н.Я. Метод пограничного слоя в задачах дифракции. Л., 1974, 124 с.
3. A v i l a J.S.S., K e l l e r J.B. The high-frequency asymptotic field of a point source in an inhomogeneous medium, - *Comm.Pure Appl.Math.* 1961, v.26, N4, p.363-382.
4. В л а д и м и р о в В.С. Методы математической физики. М., 1971, 512 с.
5. Ш и л о в Г.Е. Математический анализ (второй специальный курс). М., 1965, 327 с.
6. А л е к с е е в А.С., Б а б и ч В.М. и др. Лучевой метод вычисления интенсивности лучевых фронтов. - *Вопр.динам.теор.распр.сейсм.в.*, в.5, 1961, У, с.3-24.

K i s e l e v A.P. High-frequency point sources in an inhomogeneous elastic medium.

Initial data for second-order terms of ray asymptotic for pressural and rotational sources are studied. Effects sought for disappear in case of homogeneous medium. Boundary layer technique is used.