B. M. Barbashov, V. V. Nesterenko, A. M. Chervyakov, Reduction in the model of a relativistic string for arbitrary dimension of Minkowski space,
TMF, 1984, Volume 59, Number 2, 209–219

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ
И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ФИЗИКА
Том 59, № 2
май, 1984

РЕДУКЦИЯ В МОДЕЛИ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ СТРУНЫ ДЛЯ ПРОИЗВОЛЬНОЙ РАЗМЕРНОСТИ ПРОСТРАНСТВА МИНКОВСКОГО

Барбашов Б. М., Нестеренко В. В., Червяков А. М.

Показано, что уравнения, описывающие динамику классической релятивистской струны в d-мерном пространстве-времени, сводятся к системе $(d-2)$-нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных. Эти уравнения определяют вложение двумерной минимальной поверхности в d-мерное псевдоевклидово пространство. Рассмотрены две калибровки, используемые в теории струны: времениподобная калибровка и релятивистски-инвариантная.

ВВЕДЕНИЕ

В серии работ [1—5] динамика релятивистской струны изучалась с точки зрения внутренней геометрии минимальных поверхностей в пространстве Минковского E^1_{d-1}. Основой такого подхода является рассмотрение ориентированного подвижного репера на мировой поверхности струны в главном расслоении $SO(1,\ d-1)$ над многообразием Грассмана $G(1,1;\ d-2)$ с группой $SO(1,1)\times SO(d-2)$. Изменение репера при движении его начала по поверхности струны задается с помощью дифференциальных форм в главном расслоении парой линейных уравнений. Условия их интегрируемости (уравнения вложения Гаусса, Петерсона — Кодацци и Риччи) рассматриваются в данном подходе как динамические уравнения. Если мировая поверхность релятивистской струны вложена в пространство Минковского $E_2{}^1$, уравнения Гаусса и Петерсона — Кодацци в релятивистски-инвариантной калибровке сводятся к одному нелинейному уравнению Лиувилля [1—3]. В настоящее время получены и решены системы нелинейных уравнений для струны в $E_3{}^1$ и $E_4{}^1$ пространствах Минковского [4—5]. Однако при увеличении размерности d объемлющего пространства, число уравнений в системе Гаусса — Петерсона — Кодацци — Риччи возрастает как $d^2/2$, причем число неизвестных функций превышает число уравнений. Поэтому в геометрическом подходе возникает проблема сокращения как динамических переменных, так и уравнений до $(d-2)$ существенных физических степеней свободы струны.

В настоящей статье эта проблема решается для различных калибровочных условий, используемых в теории релятивистской струны [6]. Отправным пунктом нашей работы являются результаты исследований [7—10] по редукции n-полей на вещественных сферах произвольной размерности. В статьях [7—8] с помощью пары Лакса для n-поля получена пара уравнений Риккати для инвариантов полевых переменных по отношению к группе киральной симметрии, а затем найдено представление, в котором эти уравнения линеаризуются. В статье [10] показано, что обе пары Лакса калибровочно-эквивалентны в смысле работы [11]. Отметим, что в рамках геометрического подхода к теории n-поля пару линейных уравнений можно построить с помощью метода подвижного репера. Более того она совпадает с парой Лакса, полученной в работе [8], если дифференциальные формы принимают значения в Z_2-градуированном главном расслоении с калибровочной группой, перемешивающей касательное и нормальное пространства к рассматриваемой поверхности. Факторизация по этой калибровочной группе аналогично статье [9] приводит к редуцированной системе нелинейных уравнений. С технической точки зрения метод подвижного репера является более экономным, хотя свойство калибровочной эквивалентности с исходной киральной моделью прослеживается менее явно [12]. В применении к модели релятивистской струны описанная процедура состоит в выделении калибровочной группы, перемешивающей касательное и нормальное пространства к ее мировой поверхности и факторизации чисто калибровочных степеней свободы.

1. РЕДУКЦИЯ В КАЛИБРОВКЕ $x^0(\tau,\sigma)=\tau$

В этой калибровке мировая поверхность релятивистской струны $x^\mu(\tau,\sigma)$ в пространстве Минковского E^1_{d-1} описывается $(d-1)$-мерным евклидовым вектором $x^i(\tau,\sigma)\in E_{d-1}$, $i=1,2,\ldots,d-1$. Уравнения движения и дополнительные условия имеют вид [6]

(1.1) $$\ddot{x}_i-x_i''=0,$$

(1.2) $$(\dot{x}\pm x')^2=1,$$

где $\dot{x}^i=\partial x^i/\partial t$, $x'^i=\partial x^i/\partial\sigma$, $x^0=t=\tau$. Согласно (1.2) метрический тензор на мировой поверхности струны можно выбрать в виде

(1.3) $$g_{11}=\dot{x}^2=\cos^2\frac{\theta}{2}\qquad g_{22}=x'^2=\sin^2\frac{\theta}{2},\qquad g_{12}=\dot{x}x'=0.$$

В дальнейшем удобно перейти к конусным координатам $\xi=(t+\sigma)/2$, $\eta=(t-\sigma)/2$, в которых уравнения (1.1)–(1.3) записываются так:

(1.4) $$x_{\xi\eta}{}^i=0,$$

(1.5) $$x_\xi{}^2=x_\eta{}^2=1,$$

(1.6) $$(x_\xi x_\eta)=\dot{x}^2-x'^2=\cos\theta.$$

Уравнения движения (1.4) и дополнительные условия (1.5), (1.6) описывают динамику релятивистской струны в обычном подходе в калибровке $x^0(\tau,\sigma)=\tau$.

Теперь перейдем к рассмотрению геометрического подхода. В каждой точке мировой поверхности струны с метрикой (1.6) построим подвижный ортонормированный репер, образованный двумя касательными векторами $e_1{}^i=x_\xi{}^i$, $e_2{}^i=(x_\eta{}^i-\cos\theta\cdot x_\xi{}^i)/\sin\theta$ и $(d-3)$ единичными нормалями $e_\alpha{}^i=$

$=\eta_\alpha^i, \quad \alpha=3,4,\dots,d-1,$

$$(1.7) \qquad e_i=\left\{x_\xi, \ \frac{x_\eta-\cos\theta\cdot x_\xi}{\sin\theta}, \ \eta_\alpha\right\}, \qquad e_i^k e_{kj}=\delta_{ij}.$$

Изменение репера $\{e_i^k\}$ при движении радиус-вектора $x^i(\xi,\eta)$ по поверхности струны задается следующими линейными дифференциальными уравнениями:

$$(1.8) \qquad e_{i\xi}^k=\Omega_i^{1j}e_j^k, \qquad e_{i\eta}^k=\Omega_i^{2j}e_j^k, \qquad i,j,k=1,2,\dots,d-1.$$

Здесь матрицы Ω^1 и Ω^2 принимают значения в алгебре Ли компактной группы $SO(d-1)$ и с учетом (1.4)–(1.6) записываются так:

$$\Omega^1=\left|\begin{array}{cc|c} 0 & -\theta_\xi & b_\alpha^+ \\ \theta_\xi & 0 & -\operatorname{ctg}\theta\cdot b_\alpha^+ \\ \hline -\tilde b_\alpha^+ & \operatorname{ctg}\theta\cdot\tilde b_\alpha^+ & \underbrace{\nu_{\alpha\beta}^+}_{d-3} \end{array}\right|, \quad \Big\}\, d-3$$

$$(1.9) \qquad \Omega^2=\left|\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (\sin\theta)^{-1}b_\alpha^- \\ \hline 0 & -(\sin\theta)^{-1}\tilde b_\alpha^- & \underbrace{\nu_{\alpha\beta}^-}_{d-3} \end{array}\right|, \quad \Big\}\, d-3$$

где $b_\alpha^\pm=(\eta_\alpha x_{\xi\xi})$ — коэффициенты второй квадратичной формы мировой поверхности струны, волна сверху означает транспонирование, $\nu_{\alpha\beta}^\pm=$ $=(\eta_{\alpha\xi \atop \eta}\ \eta_\beta)=-\nu_{\alpha\beta}^\pm$ — вектора кручения, $\alpha,\beta=3,4,\dots,d-1$. Из (1.9) следует, что алгебра Ли группы $SO(d-1)$ имеет Z_2-градуировку

$$so(d-1)=so(2)\times so(d-3)\oplus\frac{so(d-1)}{so(2)\times so(d-3)}$$

с группой изотропии $SO(2)\times SO(d-3)$, не перемешивающей касательное $\{e_1,e_2\}$ и нормальное $\{\eta_\alpha\}$ пространства мировой поверхности струны в данной точке.

Условия интегрируемости (1.8) представляют собой уравнения вложения Гаусса, Петерсона — Кодацци и Риччи

$$(1.10) \qquad \Omega_\eta^1-\Omega_\xi^2+[\Omega^1,\Omega^2]=0.$$

Если мировая поверхность струны с метрикой (1.6) вложена в евклидово пространство E_{d-1}, система (1.10) принимает вид

$$(1.11) \qquad \theta_{\xi\eta}+(\sin\theta)^{-1}\sum_{\alpha=3}^{d-1}b_\alpha^+b_\alpha^-=0,$$

$$b_{\alpha\eta}^+=\theta_\xi(\sin\theta)^{-1}b_\alpha^-+\sum_{\beta=3}^{d-1}\nu_{\alpha\beta}^-b_\beta^+,$$

$$b_{\alpha\xi}^-=\theta_\eta(\sin\theta)^{-1}b_\alpha^++\sum_{\beta=3}^{d-1}\nu_{\alpha\beta}^+b_\beta^-,$$

$$\overset{+}{\nu}_{\alpha\beta\eta}-\overset{-}{\nu}_{\alpha\beta\xi}+\sum_{\gamma=3}^{d-1}(\nu_{\alpha\gamma}{}^{+}\nu_{\gamma\beta}{}^{-}-\nu_{\alpha\gamma}{}^{-}\nu_{\gamma\beta}{}^{+})+\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}(b_\alpha{}^{+}b_\beta{}^{-}-b_\alpha{}^{-}b_\beta{}^{+})=0,$$

$$\alpha,\beta=3,4,\dots,d-1.$$

Уравнения вложения (1.11) образуют систему $1+2(d-3)+(d-3)(d-4)/2$ уравнений с $1+2(d-3)+(d-3)(d-4)$ неизвестными функциями θ, $b_\alpha{}^{\pm}$, $\nu_{\alpha\beta}{}^{\pm}$, $\alpha,\beta=3,\dots,d-1$. Такая неопределенность системы (1.10) связана с ее калибровочной инвариантностью по отношению к группе преобразований $SO(d-3)$ в нормальном пространстве к поверхности струны, соответствующей свободе выбора векторов $\eta_\alpha{}^i$, $\alpha=3,4,\dots,d-1$. При переходе от репера $\{e_i{}^k\}$ к новому реперу $\{\bar{e}_i{}^k\}$:

(1.12) $$e_i{}^k=F_i{}^j\bar{e}_j{}^k,$$

матрицы Ω^1 и Ω^2 преобразуются следующим образом:

(1.13) $$\bar{\Omega}^1=F^T\Omega^1F+F_\xi{}^TF,\quad \bar{\Omega}^2=F^T\Omega^2F+F_\eta{}^TF,$$

где F — ортогональная матрица из группы $SO(d-3)$. Соответствующим выбором F систему (1.11) можно доопределить, при этом число входящих в нее уравнений не изменится. В калибровке $x^0(\tau,\sigma)=\tau$ и $d=4$ это число сокращалось за счет интегрирования уравнений Петерсона — Кодацци [5]. Оказывается, что аналогичное интегрирование можно провести и в d-мерном объемлющем пространстве. Чтобы увидеть эту возможность, перегруппируем уравнения (1.11) следующим образом. Определим «коэффициенты второй квадратичной формы»

(1.14) $$b_2{}^{+}\equiv(\eta_2x_{\xi\xi})=-\theta_\xi,\qquad b_2{}^{-}\equiv(\eta_2x_{\eta\eta})=\theta_\eta\cdot\cos\theta$$

и «вектора кручения»

(1.15) $$\nu_{2\alpha}{}^{+}\equiv(\eta_{2\xi}\eta_\alpha)=-\operatorname{ctg}\theta\cdot b_\alpha{}^{+},$$

$$\nu_{2\alpha}{}^{-}\equiv(\eta_{2\eta}\eta_\alpha)=(\sin\theta)^{-1}b_\alpha{}^{-},\qquad \alpha=3,\dots,d-1,$$

связанные с вектором $\eta_2\equiv e_2=(x_\eta-\cos\theta\cdot x_\xi)/\sin\theta$, касательным к мировой поверхности струны в каждой точке. С учетом (1.14), (1.15) матрицы (1.9) принимают вид

(1.16) $$\Omega^1=\left|\begin{array}{c|c}0 & b_\alpha{}^{+}\\\hline -\tilde{b}_\alpha{}^{+} & \underbrace{\overset{+}{\nu}_{\alpha\beta}}_{d-2}\end{array}\right|\Big\}\,{\scriptstyle d-2},\qquad \Omega^2=\left|\begin{array}{c|c}0 & 0\\\hline 0 & \underbrace{\overset{-}{\nu}_{\alpha\beta}}_{d-2}\end{array}\right|\Big\}\,{\scriptstyle d-2}.$$

Теперь рассмотрим следующую Z_2-градуировку алгебры Ли группы $SO(d-1)$:

(1.17) $$so(d-1)=\frac{so(d-1)}{so(d-2)}\oplus so(d-2).$$

Подгруппа $SO(d-2)$ перемешивает касательное и нормальное пространства мировой поверхности релятивистской струны. Уравнения вложения

(1.10) с матрицами (1.16) записываются так:

$$(1.18)\qquad b_{\alpha\eta}{}^{+}=\sum_{\beta=2}^{d-1}\nu_{\alpha\beta}{}^{-}b_{\beta}{}^{+}.$$

$$\overset{+}{\nu}_{\alpha\beta\eta}-\overset{-}{\nu}_{\alpha\beta\xi}+\sum_{\gamma=2}^{d-1}(\nu_{\alpha\gamma}{}^{+}\nu_{\gamma\beta}{}^{-}-\nu_{\alpha\gamma}{}^{-}\nu_{\gamma\beta}{}^{+})=0,$$

$$\alpha,\ \beta=2,\ 3,\ \ldots,\ d-1,$$

где коэффициенты второй квадратичной формы $b_\alpha{}^{+}$ выражаются через вектора кручения $\nu_{2\alpha}{}^{+}$ согласно (1.14), (1.15) следующим образом:

$$(1.19)\qquad b_\alpha{}^{+}=-\theta_\xi\delta_{2\alpha}-\operatorname{tg}\theta\cdot\nu_{2\alpha}{}^{+},\qquad \alpha=2,\ 3,\ \ldots,\ d-1.$$

Уравнения, записанные во второй строке в (1.18), легко интегрируются [13]. Для этого совершим преобразование (1.12), (1.13) с ортогональной матрицей F из группы $SO(d-2)$ и положим $\bar{\nu}_{\alpha\beta}{}^{\pm}=0$. Такой выбор можно сделать всегда, определяя F из условий

$$(1.20)\qquad \nu^{+}=F_\xi F^{T},\qquad \nu^{-}=F_\eta F^{T}.$$

В калибровке (1.20) с учетом соотношений (1.19) уравнения вложения (1.18) сводятся к системе $(d-2)$ нелинейных уравнений для $(d-2)$ независимых функций $\theta(\xi,\eta)$, $f_\alpha(\xi,\eta)=F_{2\alpha}$, $\alpha=2,\ 3,\ \ldots,\ d-1$:

$$(1.21)\qquad \theta_{\xi\eta}f^\alpha+\theta_\xi f_\eta{}^\alpha+\frac{\theta_\eta}{\cos^2\theta}f_\xi{}^\alpha+\operatorname{tg}\theta\cdot f_{\xi\eta}{}^\alpha=0,\qquad f_\alpha f^\alpha=1.$$

С помощью подстановки $\varphi^\alpha(\xi,\eta)=\sin\theta\cdot f^\alpha$, указанной в работе [9], уравнения (1.21) принимают вид

$$(1.22)\qquad \partial_\eta\left(\frac{\varphi_\xi{}^\alpha}{\sqrt{1-\|\varphi\|^2}}\right)=0,$$

$$\alpha=2,\ 3,\ \ldots,\ d-1.$$

Интересно отметить, что система (1.22) отличается от известных уравнений Полмайера — Ререна в теории n-поля [9] отсутствием в правой части слагаемого $\sqrt{1-\|\varphi\|^2}\,\varphi^\alpha$. По своему построению уравнения (1.22) являются условиями интегрируемости пары линейных уравнений

$$(1.23)\qquad e_{1\xi}=-\frac{\varphi_\xi{}^\alpha e_\alpha}{\sqrt{1-\|\varphi\|^2}},\qquad e_{1\eta}=0,$$

$$e_{\alpha\xi}=\frac{\varphi_\xi{}^\alpha}{\sqrt{1-\|\varphi\|^2}}e_1,\qquad e_{\alpha\eta}=0,\quad \alpha=2,\ldots,d-1.$$

Если размерность объемлющего пространства $d=3,4$, система (1.22) дает нелинейные уравнения, ранее полученные в работе [5].

Таким образом, в калибровке $x^0(\tau,\sigma)=\tau$ динамика релятивистской струны, мировая поверхность которой вложена в d-мерное пространство Минковского E^1_{d-1}, сводится к системе нелинейных уравнений (1.22).

2. РЕДУКЦИЯ В РЕЛЯТИВИСТСКИ-ИНВАРИАНТНОЙ КАЛИБРОВКЕ

В теории релятивистской струны, помимо калибровки $x^0(\tau,\sigma)=\tau$, представляют интерес и другие дополнительные условия. Пусть по-прежнему $x^\mu(\tau,\sigma)$, $\mu=0,1,\ldots,d-1$, — параметрическое задание мировой поверхности струны, движущейся в d-мерном плоском псевдоевклидовом пространстве E^1_{d-1} Не теряя общности, уравнения, определяющие координаты струны,

$$(2.1)\qquad \ddot{x}^\mu-x''^\mu=0,$$

$$(2.2)\qquad \dot{x}^2=-x'^2=\lambda(\tau,\sigma),\qquad \dot{x}x'=0$$

можно дополнить следующими нелинейными релятивистски-инвариантными условиями [3—5]:

$$(2.3)\qquad (\ddot{x}\pm\dot{x}')^2=q^2,$$

где q^2 — произвольная положительная константа. В конусных переменных $\xi=(\tau+\sigma)/\sqrt{2}$, $\eta=(\tau-\sigma)/\sqrt{2}$ система уравнений (2.1)—(2.3) принимает вид

$$(2.4)\qquad x_{\xi\eta}{}^\mu=0,$$

$$(2.5)\qquad x_\xi{}^2=x_\eta{}^2=0,\qquad (x_\xi x_\eta)={}^1/{}_2(\dot{x}^2-x'^2)=\lambda,$$

$$(2.6)\qquad x_{\xi\xi}{}^2=-q^2=x_{\eta\eta}{}^2.$$

Решение $x^\mu(\xi,\eta)$ задачи (2.4)—(2.6), зависящее от $2(d-2)$ произвольных функций одной переменной, было получено в работе [3].

Перейдем теперь к рассмотрению геометрического подхода, в котором мировая поверхность струны с метрикой (2.5) описывается набором переменных λ, $b_\alpha{}^\pm$, $\nu_{\alpha\beta}{}^\pm$, $\alpha,\beta=2,3,\ldots,d-1$, удовлетворяющих условиям (2.4), (2.6) и уравнениям вложения Гаусса — Петерсона — Кодацци — Риччи. Для этого построим подвижный ортонормированный репер в главном расслоении $SO(1,d-1)$, образованный двумя касательными к поверхности струны векторами $e_0{}^\mu=x_\xi{}^\mu+x_\eta{}^\mu/2\lambda$, $e_1{}^\mu=x_\xi{}^\mu-x_\eta{}^\mu/2\lambda$ и $(d-2)$ единичными нормалями $\eta_\alpha{}^\mu$, $\alpha=2,3,\ldots,d-1$,

$$(2.7)\qquad e_\nu=\left\{x_\xi+\frac{x_\eta}{2\lambda},\ x_\xi-\frac{x_\eta}{2\lambda},\ \eta_\alpha\right\},\qquad e_\nu{}^\mu e_{\mu\sigma}=\eta_{\nu\sigma},$$

где $\eta_{\nu\sigma}$ — метрика пространства E^1_{d-1} с сигнатурой $\eta_{\nu\sigma}=\mathrm{diag}\,(1,-1,\ldots$ $\ldots,-1)$. Матрицы Ω^j, $j=1,2$, описывающие локальное изменение репера (2.7), принимают значения в алгебре Ли псевдоортогональной группы $SO(1,d-1)$

$$(2.8)\qquad \Omega^1=\left|\begin{array}{cc|c} 0 & \lambda_\xi/\lambda & -b_\alpha{}^+ \\ \lambda_\xi/\lambda & 0 & -b_\alpha{}^+ \\ \hline -\tilde{b}_\alpha{}^+ & \tilde{b}_\alpha{}^+ & \underbrace{-\nu^+_{\alpha\beta}}_{d-2} \end{array}\right|\!\!\left.\begin{array}{c}\\ \\ \end{array}\right\}{}_{d-2},$$

$$\Omega^2 = \left|\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & -b_\alpha^-/2\lambda \\ 0 & 0 & b_\alpha^-/2\lambda \\ \hline -\tilde{b}_\alpha^-/2\lambda & -\tilde{b}_\alpha^-/2\lambda & \underbrace{-\nu_{\alpha\beta}^-}_{d-2} \end{array}\right| \}_{d-2},$$

причем коэффициенты второй квадратичной формы $b_\alpha^\pm$, $\alpha=2, 3, \ldots$ $\ldots, d-1$, в силу (2.6) подчиняются следующим условиям:

$$\sum_{\alpha=2}^{d-1} (b_\alpha^+)^2 = q^2 = \sum_{\alpha=2}^{d-1} (b_\alpha^-)^2. \tag{2.9}$$

Таким образом, задано главное расслоение $SO(1, d-1)$ над многообразием Грассмана $G(1, 1; d-2)$ с группой $SO(1, 1) \times SO(d-2)$.

Условия интегрируемости (1.10) с матрицами (2.8) представляют собой уравнения вложения Гаусса

$$(\ln \lambda)_{\xi\eta} + \frac{1}{\lambda} \sum_{\alpha=2}^{d-1} b_\alpha^+ b_\alpha^- = 0, \tag{2.10}$$

Петерсона — Кодацци

$$b_{\alpha\eta}^+ + \sum_{\beta=2}^{d-1} \nu_{\alpha\beta}^- b_\beta^+ = 0, \qquad b_{\alpha\xi}^- + \sum_{\beta=2}^{d-1} \nu_{\alpha\beta}^+ b_\beta^- = 0 \tag{2.11}$$

и Риччи

$$\overset{+}{\nu}_{\alpha\beta\eta} - \overset{-}{\nu}_{\alpha\beta\xi} + \sum_{\gamma=2}^{d-1} (\nu_{\alpha\gamma}^+ \nu_{\gamma\beta}^- - \nu_{\alpha\gamma}^- \nu_{\gamma\beta}^+) - \frac{1}{\lambda} (b_\alpha^+ b_\beta^- - b_\alpha^- b_\beta^+) = 0, \tag{2.12}$$

$$\alpha, \beta = 2, 3, \ldots, d-1.$$

В системе (2.10) — (2.12) число неизвестных функций λ, $b_\alpha^\pm$, $\nu_{\alpha\beta}^\pm$, $\alpha, \beta = 2, 3, \ldots, d-1$, превосходит число уравнений, причем разница составляет $(d-2)(d-3)/2$. Такая неопределенность связана с калибровочной инвариантностью уравнений (2.10) — (2.12) по отношению к группе преобразований $SO(d-2)$ в нормальном пространстве к поверхности струны, соответствующей свободе выбора нормалей η_α^μ, $\alpha=2, 3, \ldots, d-1$. Этим калибровочным произволом можно воспользоваться и частично доопределить систему (2.10) — (2.12) следующим образом [5]. С помощью группы поворотов плоскости $SO(2)$ направим две нормали η_2^μ и η_3^μ к мировой поверхности струны по взаимноортогональным векторам $\ddot{x} = (x_{\xi\xi} + x_{\eta\eta})/2$ и $\dot{x}' = {}^1/_2(x_{\xi\xi} - x_{\eta\eta})$, соответственно. Тогда, разрешая условия (2.9), получим

$$b_2^+ = b_2^- = q \cdot \cos\frac{\theta}{2}, \qquad b_3^+ = -b_3^- = q \cdot \sin\frac{\theta}{2}, \qquad b_\alpha^\pm = 0, \tag{2.13}$$

$$\alpha = 4, 5, \ldots, d-1.$$

Чтобы удовлетворить уравнениям Петерсона — Кодацци (2.11), можно положить

$$(2.14)\qquad \nu_{2\alpha}{}^{+}=\frac{1}{2}c_{\alpha}{}^{+}\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^{-1},\qquad \nu_{2\alpha}{}^{-}=\frac{1}{2}c_{\alpha}{}^{-}\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^{-1},$$

$$\nu_{3\alpha}{}^{+}=\frac{1}{2}c_{\alpha}{}^{+}\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^{-1},\qquad \nu_{3\alpha}{}^{-}=\frac{-1}{2}c_{\alpha}{}^{-}\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^{-1},$$

$$\alpha=4,5,\ldots,d-1,$$

где $c_\alpha{}^{+}=\eta_\alpha\eta_{+\xi}$, $c_\alpha{}^{-}=\eta_\alpha\eta_{-\eta}$, $\alpha=4,\ldots,d-1$,— коэффициенты второй квадратичной формы двумерной поверхности нормальной к мировой поверхности релятивистской струны, $\eta_\pm=\cos\frac{\theta}{2}\eta_2\pm\sin\frac{\theta}{2}\eta_3$ — касательные вектора в каждой точке этой поверхности, $\eta_\pm{}^2=-1$, $(\eta_+\eta_-)=-\cos\theta$.

С учетом (2.13), (2.14), уравнение Гаусса (2.10) записывается следующим образом:

$$(2.15)\qquad (\ln\lambda)_{\xi\eta}+\frac{q^2}{\lambda}\cos\theta=0,$$

а уравнения Риччи (2.12) принимают вид

$$(2.16)\qquad \theta_{\xi\eta}+(\sin\theta)^{-1}\sum_{\alpha=4}^{d-1}c_\alpha{}^{+}c_\alpha{}^{-}-\frac{q^2}{\lambda}\sin\theta=0,$$

$$c_{\alpha\eta}{}^{+}=\theta_\xi(\sin\theta)^{-1}c_\alpha{}^{-}-\sum_{\beta=4}^{d-1}\nu_{\alpha\beta}{}^{-}c_\beta{}^{+},$$

$$c_{\alpha\xi}{}^{-}=\theta_\eta(\sin\theta)^{-1}c_\alpha{}^{+}-\sum_{\beta=4}^{d-1}\nu_{\alpha\beta}{}^{+}c_\beta{}^{-},$$

$$\overset{+}{\nu}_{\alpha\beta\eta}-\overset{-}{\nu}_{\alpha\beta\xi}-\sum_{\gamma=4}^{d-1}(\nu_{\alpha\gamma}{}^{+}\nu_{\gamma\beta}{}^{-}-\nu_{\alpha\gamma}{}^{-}\nu_{\gamma\beta}{}^{+})-$$

$$-(\cos\theta/\sin^2\theta)(c_\alpha{}^{+}c_\beta{}^{-}-c_\alpha{}^{-}c_\beta{}^{+})=0,\qquad \alpha,\beta=4,\ldots,d-1.$$

Отметим, что система (2.16) с точностью до члена $\frac{q^2}{\lambda}\sin\theta$ в первом уравнении замечательным образом совпадает с уравнениями вложения Гаусса — Петерсона — Кодацци — Риччи (1.11), полученным в калибровке $x^0(\tau,\sigma)=\tau$.

При переходе от уравнений (2.10)—(2.12) к системе (2.15)—(2.16), мы перешли от репера (2.7) к новому реперу

$$(2.17)\qquad e_\nu=\left\{x_\xi+\frac{x_\eta}{2\lambda},\ x_\xi-\frac{x_\eta}{2\lambda},\ \eta_+,\ \frac{\eta_--\cos\theta\cdot\eta_+}{\sin\theta},\ \eta_\alpha\right\}$$

в главном расслоении $SO(1,1)\times SO(d-2)$. Матрицы Ω^j, $j=1,2$, описывающие локальное изменение репера (2.17), принимают значения в Z_2-градуированной алгебре Ли группы $SO(1,1)\times SO(d-2)$:

$$(2.18)\qquad \Omega^1=\left|\begin{array}{cccc|c} 0 & \frac{\lambda_\xi}{\lambda} & -q & 0 & 0 \\ \frac{\lambda_\xi}{\lambda} & 0 & -q & 0 & 0 \\ -q & q & 0 & -\theta_\xi & -\tilde{c}_\alpha^+ \\ 0 & 0 & \theta_\xi & 0 & \operatorname{ctg}\theta\cdot c_\alpha^+ \\ \hline 0 & 0 & \tilde{c}_\alpha^+ & -\operatorname{ctg}\theta\cdot\tilde{c}_\alpha^+ & \underbrace{-\nu_{\alpha\beta}^+}_{d-4} \end{array}\right|\Big\}{\scriptstyle d-4},$$

$$\Omega^2=\left|\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & -\frac{q\cdot\cos\theta}{2\lambda} & -\frac{q\cdot\sin\theta}{2\lambda} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{q\cdot\cos\theta}{2\lambda} & \frac{q\cdot\sin\theta}{2\lambda} & 0 \\ -\frac{q\cdot\cos\theta}{2\lambda} & -\frac{q\cdot\cos\theta}{2\lambda} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{q\cdot\sin\theta}{2\lambda} & -\frac{q\cdot\sin\theta}{2\lambda} & 0 & 0 & -(\sin\theta)^{-1}c_\alpha^- \\ \hline 0 & 0 & 0 & (\sin\theta)^{-1}\tilde{c}_\alpha^- & \underbrace{-\nu_{\alpha\beta}^-}_{d-4} \end{array}\right|\Big\}{\scriptstyle d-4},$$

причем подгруппа $SO(2)\times SO(d-4)$ является группой симметрии системы (2.15), (2.16). Однако в дальнейшем использовании этого калибровочного произвола нет необходимости: система (2.15), (2.16) допускает редукцию, аналогичную рассмотренной в предыдущем разделе.

Для этого определим коэффициенты второй квадратичной формы

$$(2.19)\qquad c_3^+\equiv\eta_3\eta_{+\xi}=\theta_\xi,\qquad c_3^-\equiv\eta_3\eta_{-\eta}=-\theta_\eta\cos\theta$$

и вектора кручения

$$(2.20)\qquad \nu_{3\alpha}^+\equiv\eta_{3\xi}\eta_\alpha=-\operatorname{ctg}\theta\cdot c_\alpha^+,\quad \nu_{3\alpha}^-\equiv\eta_{3\eta}\eta_\alpha=(\sin\theta)^{-1}c_\alpha^-,$$
$$\alpha=4,5,\dots,d-1,$$

связанные с вектором $\eta_3\equiv e_3=(\eta_- - \cos\theta\cdot\eta_+)/\sin\theta$, касательным к нормальной поверхности в каждой точке. С учетом (2.19), (2.20) матрицы (2.18) принимают значения

$$(2.21)\qquad \Omega^1=\left|\begin{array}{ccc|c} 0 & \frac{\lambda_\xi}{\lambda} & -q & 0 \\ \frac{\lambda_\xi}{\lambda} & 0 & -q & 0 \\ -q & q & 0 & -c_\alpha^+ \\ \hline 0 & 0 & \tilde{c}_\alpha^+ & \underbrace{-\nu_{\alpha\beta}^+}_{d-3} \end{array}\right|\Big\}{\scriptstyle d-3},$$

$$
\Omega^2=\left|\begin{array}{ccc|c}
0 & 0 & -\dfrac{q\cos\theta}{2\lambda} & -\dfrac{q\sin\theta}{2\lambda}\\
0 & 0 & \dfrac{q\cos\theta}{2\lambda} & \dfrac{q\sin\theta}{2\lambda}\\
-\dfrac{q\cos\theta}{2\lambda} & -\dfrac{q\cdot\cos\theta}{2\lambda} & 0 & 0\\
\hline
-\dfrac{q\cos\theta}{2\lambda} & -\dfrac{q\cdot\cos\theta}{2\lambda} & 0 & \underbrace{-\nu^{-}_{\alpha\beta}}_{d-3}
\end{array}\right|\left.\vphantom{\dfrac{q}{2\lambda}}\right\}{\scriptstyle d-3}
$$

в Z_2-градуированной алгебре Ли

(2.22) $$so(1,1)\times so(d-2)=\frac{so(1,1)\times so(d-2)}{so(d-3)}\oplus so(d-3)$$

с подгруппой $SO(d-3)$, которая перемешивает нормальное пространство $\{\eta_+{}^{\mu},\eta_-{}^{\mu}\}$ и пространство, образованное другими нормалями $\eta_\alpha{}^{\mu}$, $\alpha=4,5,\ldots,d-1$. В системе уравнений вложения (1.10) с матрицами (2.21) уравнение Гаусса (2.15) не меняется, а уравнения Риччи (2.16) записываются следующим образом:

(2.23) $$c_{\alpha\eta}{}^{+}=\frac{q^2}{\lambda}\sin\theta\cdot\delta_{3\alpha}-\sum_{\beta=3}^{d-1}\nu_{\alpha\beta}{}^{-}c_\beta{}^{+},$$

(2.24) $$\nu^{\pm}_{\alpha\beta\eta}-\nu^{-}_{\alpha\beta\xi}-\sum_{\gamma=3}^{d-1}(\nu_{\alpha\gamma}{}^{+}\nu_{\gamma\beta}{}^{-}-\nu_{\alpha\gamma}{}^{-}\nu_{\gamma\beta}{}^{+})=0,\qquad \alpha,\beta=3,4,\ldots\ d-1,$$

где коэффициенты второй квадратичной формы $c_\alpha{}^{+}$ выражаются через векторы кручения $\nu_{3\alpha}{}^{+}$ согласно (2.19), (2.20), так,

(2.25) $$c_\alpha{}^{+}=\theta_\xi\delta_{3\alpha}-\operatorname{tg}\theta\cdot\nu_{3\alpha}{}^{+},\qquad \alpha=3,4,\ldots,d-1,$$

общее решение уравнений (2.24) является чистой калибровкой

(2.26) $$\nu^{+}=-F_\xi F^T,\qquad \nu^{-}=-F_\eta F^T,$$

где F — ортогональная матрица из группы $SO(d-3)$. Подставляя (2.26) в (2.23) и учитывая соотношения (2.25), приходим к системе из $(d-3)$ нелинейных уравнений для функций $\theta(\xi,\eta)$ и $f_\alpha(\xi,\eta)=F_{3\alpha}$, $\alpha=3,\ldots$ $\ldots,d-1$:

(2.27) $$\left(\theta_{\xi\eta}-\frac{q^2}{\lambda}\sin\theta\right)f^\alpha+\theta_\xi f_\eta{}^{\alpha}+\frac{\theta_\eta}{\cos^2\theta}f_\xi{}^{\alpha}+\operatorname{tg}\theta\cdot f_{\xi\eta}{}^{\alpha}=0,\qquad f_\alpha f^\alpha=1.$$

Окончательно уравнения (2.15) и (2.27) с помощью замен $\lambda=e^{-u}$, $f^\alpha=(\sin\theta)^{-1}\varphi^\alpha$ принимают вид

(2.28) $$u_{\xi\eta}=q^2e^u\sqrt{1-\|\varphi\|^2},$$

$$\varphi_{\xi\eta}{}^{\alpha}+\frac{(\varphi\varphi_\eta)}{1-\|\varphi\|^2}\varphi_\xi{}^{\alpha}=q^2e^u\sqrt{1-\|\varphi\|^2}\,\varphi^\alpha,\qquad \alpha=3,4,\ldots,d-1.$$

Система (2.28) справедлива для любой размерности d объемлющего пространства и сводится к полученным ранее нелинейным уравнениям следующими подстановками:

$d=3$ (см. [1–3]): $\varphi^\alpha=0$;

$d=4$ (см. [4]): $\varphi^1=\sin\theta$;

$d=5$ (см. [5]): $\varphi^1=\sin\theta\cos\psi$, $\varphi^2=\sin\theta\sin\psi$.

Таким образом, в релятивистски-инвариантной калибровке (2.3) динамика релятивистской струны, мировая поверхность которой вложена в d-мерное пространство Минковского E^1_{d-1}, сводится к системе $(d-2)$ нелинейных уравнений (2.28).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Исследование модели релятивистской струны в d-мерном пространстве-времени на первый взгляд может показаться чисто математической проблемой. Однако это не так. Учитывая, что удовлетворительной квантовой теории струны до сих пор еще нет, было бы интересно по аналогии с нелинейными сигма-моделями развить разложение по $1/d$ при $d\to\infty$ и в теории струны. Далее, геометрическая теория струны в d-мерном пространстве-времени генерирует целую серию нелинейных уравнений, для которых в явном виде можно построить общее решение. Для низших размерностей это было сделано в работе [5]. Использованный там метод, вероятно, можно обобщить и для случая произвольного d.

Следует отметить, что полученные нами уравнения (1.22) и (2.28) не совпадают с так называемыми уравнениями струнного типа, которые были построены и явно решены в работах [14, 15] с помощью групповых методов.

Литература

[1] *Lund F., Regge T.*— Phys. Rev., 1976, *D14*, 1524—1535.
[2] *Omnes R.*— Nucl. Phys., 1979, *B149*, 269—284.
[3] *Барбашов Б. М., Кошкаров А. Л.*— ТМФ, 1979, *39*, № 1, 27—34. *Барбашов Б. М., Нестеренко В. В., Червяков А. М.*— ТМФ, 1979, *40*, № 1, 15—17.
[4] *Barbashov B. M., Nesterenko V. V., Cervjakov A. M.*— J. Phys., 1980, *A13*, 301—312.
[5] *Barbashov B. M., Nesterenko V. V., Chervjakov A. M.*— Commun. Math. Phys., 1982, *84*, 471—481. *Барбашов Б. М., Нестеренко В. В., Червяков А. М.*— ТМФ, 1982, *52*, № 1, 3—14.
[6] *Барбашов Б. М., Нестеренко В. В.*— ЭЧАЯ, 1978, *9*, 709—758.
[7] *Pohlmeyer K.*— Commun. Math. Phys., 1976, *46*, 207—221.
[8] *Eichenherr H., Pohlmeyer K.*— Phys. Lett., 1980, *89B*, 76—78.
[9] *Pohlmeyer K., Rehren K. H.*— J. Math. Phys., 1979, *20*, 2628—2632.
[10] *Honerkamp J.-J.* Math. Phys., 1981, *22*, 277—282.
[11] *Захаров В. Е., Тахтаджян Л. А.*— ТМФ, 1979, *38*, № 1, 26—35.
[12] *Голо В. Л., Путко Б. А.*— ТМФ, 1980, *45*, № 1, 19—29.
[13] *Захаров В. Е., Михайлов А. В.*— ЖЭТФ, 1978, *74*, 1953—1973.
[14] *Leznov A. N., Saveliev M. V.*— Lett. Math. Phys., 1982, *6*, 505—510.
[15] *Leznov A. N., Saveliev M. V.*— Commun. Math. Phys., 1983, *89*, 59—75.

Объединенный институт ядерных исследований

Поступила в редакцию 15.VIII.1983 г.

REDUCTION IN THE RELATIVISTIC STRING MODEL FOR THE d-DIMENSIONAL SPACE-TIME

Barbashov B. M., Nesterenko V. V., Chervyakov A. M.

It is shown that the equations describing the classical dynamics of the relativistic string in the d-dimensional space-time are reduced to the set of $(d-2)$ nonlinear partial differential equations. These equations determine the embedding of a two-dimensional minimal surface into the d-dimensional pseudo-Euclidean space. Two different gauges, one of them time-like and another relativistic invariant, used in the string theory, are considered.