МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 12, № 3 (1972), 325—336

УДК 517.5

О ВЛОЖЕНИИ ОБОБЩЕННЫХ ГЕЛЬДЕРОВЫХ КЛАССОВ

М. Л. Гольдман

Для обобщенных гельдеровых классов $B_{p\theta}^{a,\varphi}$ с функцией гладкости в метрике $L_p(R_N)$ получены необходимые и достаточные условия вложения. Из этих условий, в частности, вытекает новая теорема вложения по индексу θ для этих классов. Библ. 5 назв.

1°. Пусть U — класс непрерывных, возрастающих на $[0, 1]$ функций $\varphi(t)$, таких, что $\varphi(0) = 0$. Функция φ удовлетворяет условию (S) (кратко: $\varphi \in (S)$), если $\varphi \in U$ и существует постоянная α, $0 < \alpha < 1$, такая, что $\varphi(t)t^{-\alpha}$ почти возрастает; $\varphi \in (S_k)$, где $k \geqslant 1$ — некоторое целое число, если $\varphi \in U$ и существует постоянная β, $\beta < k$, такая, что $\varphi(t)t^{-\beta}$ почти убывает. Почти убывание (возрастание) функции означает, что соответствующее неравенство монотонности верно с постоянным множителем, не обязательно равным единице. Условия (S) и (S_k) введены С. Б. Стечкиным, их совокупность эквивалентна $(\mathfrak{L}_k)$ условию С. М. Лозинского (см. [1]). Мы будем для краткости писать $\varphi \in (\mathfrak{L}_k)$, понимая под этим условие $\varphi \in (S) \cap (S_k)$.

Пусть $x = (x_1, \ldots, x_N) \in R_N$ — N-мерному евклидову пространству, $x = (u, z)$, где $u = (x_1, \ldots, x_m)$, $m \leqslant N$. При фиксированном $z = (x_{m+1}, \ldots, x_N)$ $u \in R_m$. Пусть далее $l = (l_1, \ldots, l_N)$ — вектор с неотрицательными целочисленными координатами, $|l| = l_1 + \ldots + l_N$; $D^l f(x) = f^{(l)}(x)$ — обобщенная частная производная порядка l, т. е. порядков l_j по x_j $(1 \leqslant j \leqslant N)$.

Определение. *Функция $f(x)$ принадлежит классу $B_{p\theta}^{a,\varphi}(R_N)$, где $a \geqslant 0$ — целое число*; $\varphi(t) \in U$, $\varphi(t)t^{-k}$

почти убывает; $1 \leqslant p$, $\theta \leqslant \infty$, *если* $f \in L_p(R_N)$ *имеет все обобщенные в смысле С. Л. Соболева производные порядка* l *с* $|l| = a$ *и конечна полунорма*

$$\|f\|_b = \sum_{|l|=a} \left\{ \int_0^1 [\omega_k(f^{(l)}, t)_p \varphi(t)^{-1}]^\theta t^{-1} dt \right\}^{1/\theta} < \infty$$

$$(1 \leqslant \theta < \infty), \qquad (1)$$

$$\|f\|_b = \sum_{|l|=a} \sup_{0<t\leqslant 1} [\omega_k(f^{(l)}, t)_p \varphi(t)^{-1}] < \infty \ (\theta = \infty). \qquad (2)$$

При этом норма в $B_{p\theta}^{a,\varphi}(R_N)$ *равна*

$$\|f\|_B = \|f\|_p + \|f\|_b. \qquad (3)$$

Здесь $\|\cdot\|_p = \|\cdot\|_{L_p}$; $\omega_k(g, t)_p$ — модуль непрерывности порядка k функции $g(x)$ в метрике $L_p(R_N)$. В случае $\theta < \infty$, для того чтобы класс $B_{p\theta}^{a,\varphi}$ содержал не только функции, эквивалентные нулю, нужно дополнительно потребовать, чтобы $\int_0^1 [t^k \varphi(t)^{-1}]^\theta t^{-1} dt < \infty$. Последнее условие выполнено, например, при $\varphi \in (\mathfrak{L}_k)$. Класс функций $B_{p\theta}^{a,\varphi}$ с нормой (3) образует банахово пространство, обобщающее пространство О. В. Бесова $B_{p\theta}^r$, которое получится из (1)—(3), если положить $k = 2$ и взять $\varphi(t) = t^\alpha$, где $0 < \alpha \leqslant 1$, $r = a + \alpha$.

Классы, включающие $B_{p\theta}^{a,\varphi}$ при $\varphi \in (\mathfrak{L}_k)$ (а именно, построенные над более общим пространством, чем L_p), изучались в работе А. С. Джафарова [2]. Из результатов этой работы вытекает вложение

$$B_{p\theta}^{a,\varphi}(R_N) \to B_{p'\theta'}^{b,\psi}(R_m) \qquad (1 \leqslant p \leqslant p' \leqslant \infty,\ 1 \leqslant \theta \leqslant \theta' \leqslant \infty,\ m \leqslant N) \qquad (4)$$

при условии, что $\varphi(t) \in (\mathfrak{L}_k)$, $\psi(t) = t^\varkappa \varphi(t) \in (\mathfrak{L}_n)$ с некоторыми k и n, где $b \geqslant 0$ — целое число, а буквой $\varkappa$ обозначена постоянная

$$\varkappa = a - b - (N - m)/p' - N(1/p - 1/p'). \qquad (5)$$

Утверждение (4) самое сильное при $\theta' = \theta$ (см. 2°, свойство 2).

Теорема (4), являющаяся непосредственным обобщением теоремы вложения для классов $B_{p\theta}^r$ (см. книгу С. М. Никольского [3]), не полностью использует возможности, которые открываются при переходе к классам $B_{p\theta}^{a,\varphi}$ для изучения их зависимости от θ. В классах $B_{p\theta}^{r}$ известно расширение класса с ростом θ и вложение $B_{p\theta}^{r+\varepsilon} \to B_{p\theta'}^{r}$ при любом $\varepsilon > 0$ и любом θ'. Последнее показывает, что зависимость класса от r гораздо сильнее, чем от θ. Ниже мы увидим, что в классах $B_{p\theta}^{a,\varphi}$, улавливающих тонкие дифференциальные свойства, можно получать уже более содержательные теоремы вложения по индексу θ.

ТЕОРЕМА. *Пусть* $1 \leqslant m \leqslant N$; $1 \leqslant p \leqslant p' \leqslant \infty$; $1 \leqslant \theta, \theta' \leqslant \infty$; $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$ — *целые числа*, $\varkappa$ *определено, как в* (5). *Пусть* $\varphi \in (\mathfrak{L}_k)$, $\psi \in (\mathfrak{L}_n)$ *при некоторых натуральных* k *и* n, *и в определении классов* $B_{p\theta}^{a,\varphi}$ *и* $B_{p'\theta'}^{b,\psi}$ *взяты модули непрерывности порядков* k *и* n *соответственно. Следующие условия необходимы и достаточны для того, чтобы имело место вложение* $B_{p\theta}^{a,\varphi}(R_N) \to B_{p'\theta'}^{b,\psi}(R_m)$ (*кратко*: $B \to B'$):

1) *Если* $\theta' < \theta$, *то*

$$A \equiv \left\{\sum_{s=0}^{\infty} [\varphi(2^{-s})\, \psi(2^{-s})^{-1}\, 2^{-s\varkappa}]^{q}\right\}^{1/q} < \infty, \tag{6}$$

где $q = \theta'\theta/(\theta - \theta')$ *при* $\theta < \infty$; $q = \theta'$ *при* $\theta = \infty$.

2) *Если* $\theta' \geqslant \theta$, *то*

$$A \equiv \sup_{0 < t \leqslant 1} [\varphi(t)\, \psi(t)^{-1}\, t^{\varkappa}] < \infty. \tag{7}$$

Доказательство теоремы отложим до 3°, а пока отметим следующее. Пусть задан класс $B = B_{p\theta}^{a,\varphi}$ и числа $p' \geqslant p$, $\theta' \geqslant \theta$. Если $\psi_0(t) = \varphi(t) t^{\varkappa} \in (\mathfrak{L}_n)$ при некотором натуральном n, то в силу (7) вложение $B \to B'$ при $\psi(t) = \psi_0(t)$ является точным в том смысле, что оно не имеет места, если $\psi(t) = o(\psi_0(t))$ $(t \to 0)$. Тем самым вложение (4) вместе с доказательством его неулучшаемости содержится в (7). Если же $\theta' < \theta$, то из (6) легко следует, что, каков бы ни был класс $B_{p'\theta'}^{b,\psi}$, в который вложен класс B, всегда найдется более узкий класс $B_{p'\theta'}^{b,\mu}$ с условием $\mu(t) = o(\psi(t))$ $(t \to 0)$, в который класс B также вложен.

Отметим еще, что в работе П. Л. Ульянова [5] получена теорема вложения в одномерном периодическом случае для $\theta' = \theta = \infty$, но для классов с *произвольными модулями непрерывности* первого порядка. Условия вложения, полученные там, эквивалентны (7) при дополнительных ограничениях, наложенных нами на модули непрерывности.

2°. Мы приведем здесь известные свойства функций класса $B_{p\theta}^{a,\varphi}$ с $\varphi \in (\mathfrak{L}_k)$, а также свойства целых функций конечной степени. Они понадобятся в дальнейшем.

1. Пусть

$$f(x) = \sum_{s=0}^{\infty} Q_s(x), \tag{8}$$

где $Q_s(x)$ — целые функции степени 2^s по каждой переменной x_j, причем ряд (8) сходится в $L_p(R_N)$. Тогда, если

$$\|f\|'_B = \left\{\sum_{s=0}^{\infty} [\|Q_s\|_p 2^{as}\varphi(2^{-s})^{-1}]^\theta\right\}^{1/\theta} < \infty \quad (1 \leqslant p, \theta \leqslant \infty), \tag{9}$$

то $f \in B_{p\theta}^{a,\varphi}(R_N)$, причем $\|f\|_B \leqslant c\|f\|'_B$, где c не зависит от f. Верно и обратное. Следовательно, нормы $\|\cdot\|'_B$ и $\|\cdot\|_B$, эквивалентны. Эти утверждения фактически были получены в работе [2]. В дальнейшем вместо нормы (3) мы будем использовать норму (9), опуская штрих.

2. Справедливо вложение

$$B_{p\theta}^{a,\varphi} \to B_{p\theta'}^{a,\varphi} \quad \text{при} \quad \theta' \geqslant \theta. \tag{10}$$

Это сразу следует из нормы (9).

3. Для целых функций $Q_s(x)$ степени 2^s по всем x_j справедливо неравенство разных метрик и измерений [3] гл. 3:

$$\|Q_s\|_{p'}^{(m)} \leqslant c2^{s[(N-m)/p'+N(1/p-1/p')]}\|Q_s\|_p^{(N)}$$
$$(1 \leqslant p \leqslant p' \leqslant \infty;\ 1 \leqslant m \leqslant N), \tag{11}$$

где $\|\cdot\|_q^{(m)}$ и $\|\cdot\|_q^{(N)}$ нормы в $L_q(R_m)$ и $L_q(R_N)$ соответственно, c — абсолютная постоянная, и неравенство

$$\|\Delta_{x_j h} Q_s\|_p \leqslant |h| \left\|\frac{\partial Q_s}{\partial x_j}\right\|_p \leqslant \nu|h|\cdot\|Q_s\|_p \qquad (\nu = 2^s), \tag{12}$$

следующее из 4.4.4 книги [3] и неравенства С. Н. Бернштейна. Здесь $\Delta_{x_j h} f(x)$ — первая разность функции f по переменной x_j с шагом h.

3°. Доказательство теоремы. Достаточность. Пусть $A < \infty$, функция $f(x) \in B$. Тогда она представима рядом (8), причем норма (9) конечна. Пусть $m < N$, $x = (u, z)$. Зафиксируем z в разложении (8), тогда

$$\left\{\sum_{s=0}^{\infty} (\| Q_s \|_{p'}^{(m)} 2^{bs} \psi^{-1} (2^{-s}))^{\theta'}\right\}^{1/\theta'} \leqslant$$

$$\leqslant c \left\{\sum_{s=0}^{\infty} (\| Q_s \|_{p}^{(N)} 2^{as} \varphi^{-1} (2^{-s}))^{\theta'} (\varphi (2^{-s}) \psi^{-1} (2^{-s}) 2^{-s\varkappa})^{\theta'}\right\}^{1/\theta'} \leqslant$$

$$\leqslant cA \| f \|_B. \qquad (13)$$

Первая оценка в (13) следует из (11). В случае $\theta' < \theta < \infty$ для получения второй оценки в (13) надо применить неравенство Гельдера с показателями $q = \theta'\theta / (\theta - \theta')$, $q' = \theta/\theta'$, а затем (9) и (6). При $\theta' < \theta = \infty$ достаточно просто выделить в среднем члене (13) $\| f \|_B$. В силу (10) осталось рассмотреть лишь случай $\theta' = \theta$, в котором последнее неравенство в (13) сразу следует из (7).

В случае $m = N$ неравенство (13) также справедливо, причем оно исчерпывает доказательство достаточности. Итак, всюду ниже $m < N$.

Из (13) следует сходимость ряда (8) в $L_{p'} (R_m)$ при любом фиксированном z к некоторой функции $f_1 (u, z) \in L_{p'}(R_m)$, причем $f_1 (u, z) = f (x)$ почти всюду в смысле N-мерной меры Лебега (см. [3], 1.3.9). Более того, $f_1 (u, z) \in B'$. Осталось показать, что $f_1 (u, z)$ при любом фиксированном z есть след функции f на $R_m = R_m (z)$, для чего достаточно установить, что

$$\| \Delta_{x_j h} f_1 (x) \|_{p'}^{(m)} \to 0 \quad \text{при} \quad h \to 0 \ (m + 1 \leqslant j \leqslant N). \qquad (14)$$

Справедливы оценки

$$\| \Delta_{x_j h} Q_s \|_{p'}^{(m)} \leqslant c \, | h | \, 2^{-s(\varkappa + b - a - 1)} \| Q_s \|_{p}^{(N)}, \qquad (15)$$

$$\| \Delta_{x_j h} Q_s \|_{p'}^{(m)} \leqslant 2 \| Q_s \|_{p'}^{(m)} \leqslant c_1 2^{-s(\varkappa + b - a)} \| Q_s \|_{p}^{(N)}, \qquad (16)$$

вытекающие из (11), (12). В силу (6) или (7) $\psi (t) \geqslant c\varphi (t) t^{\varkappa}$, поэтому, используя конечность нормы (9), эти оценки можно продолжить:

$$\| \Delta_{x_j h} Q_s \|_{p'}^{(m)} \leqslant c \, | h | \, 2^{s(1-b)} \psi (2^{-s}),$$

$$\| \Delta_{x_j h} Q_s \|_{p'}^{(m)} \leqslant c_1 2^{-bs} \psi (2^{-s}). \qquad (17)$$

Переходим к доказательству (14). Пусть $0<|h|<1$, $\mu\geqslant 1$ — целое, $\|\Delta_{x_j h}f_1\|_{p'}^{(m)}\leqslant c\,|h|\sum_{s=0}^{\mu-1}2^{s(1-b)}\psi(2^{-s})+ c\sum_{s=\mu}^{\infty}2^{-bs}\psi(2^{-s})=c\,|h|\,\sigma_\mu+c\sigma_\mu'$. Из свойства (S) функции ψ вытекает оценка

$$\sigma_\mu'=O\,[2^{-b\mu}\psi(2^{-\mu})], \tag{18}$$

а из свойства (S_n) — оценка

$$\sigma_\mu\leqslant c\psi(2^{-\mu})\,2^{\beta\mu}\sum_{s=0}^{\mu-1}2^{s(1-b-\beta)}\leqslant$$

$$\leqslant c_1\psi(2^{-\mu})\begin{cases}2^{\mu(1-b)} & \text{при}\quad b+\beta<1,\\ 2^{\mu(1-b)}\ln(2^\mu) & \text{при}\quad b+\beta=1,\\ 2^{\beta\mu} & \text{при}\quad b+\beta>1.\end{cases} \tag{19}$$

В случае $b+\beta\leqslant 1$ (это возможно лишь при $b=0$) выберем μ так, чтобы $2^{-\mu}\leqslant|h|<2^{-(\mu-1)}$. В случае $b+\beta>1$ выберем μ так, чтобы $2^{-\mu(b+\beta)}\leqslant|h|<2^{-(\mu-1)(b+\beta)}$, при этом σ_μ' и $|h|\sigma_\mu$ имеют одинаковый порядок при $|h|\to 0$. В итоге получим оценки:

$$\|\Delta_{x_j h}f_1\|_{p'}^{(m)}\leqslant c\begin{cases}\psi(|h|) & \text{при}\quad \beta<1,\\ \psi(|h|)\ln(|h|^{-1}) & \text{при}\quad \beta=1,\\ \psi(|h|^{1/(b+\beta)})\,|h|^{b/(b+\beta)} & \text{при}\quad b+\beta>1.\end{cases} \tag{20}$$

Эти неравенства доказывают (14). Более того, при $\psi(t)=t^\varkappa\varphi(t)$ они дают порядок стремления следов функций из класса $H_p^{a,\varphi}\equiv B_{p\infty}^{a,\varphi}(R_N)$. При $\psi(t)=t^\beta$ эти оценки переходят в известные (см. [3], 6.5). Достаточность полностью доказана.

Н е о б х о д и м о с т ь. Покажем, что при $A=\infty$ существует функция $f(x)\in B$, след которой на R_m (или она сама, если $m=N$) не принадлежит B'. Придется рассмотреть несколько случаев.

1. Пусть $1\leqslant\theta'<\theta<\infty$. Обозначим для краткости

$$a_s=\varphi(2^{-s})\,\psi(2^{-s})^{-1}\,2^{-s\varkappa}. \tag{21}$$

Тогда $\sum_{s=0}^{\infty}a_s^q=\infty$. Найдем монотонно убывающую к нулю последовательность $\{\varepsilon_s\}$ со свойствами:

$$1)\ \varepsilon_s a_s^{q/\theta'} \leqslant 1,$$
$$2)\ \sum_{s=0}^{\infty} a_s^q \varepsilon_s^\theta < \infty, \qquad (22)$$
$$3)\ \sum_{s=0}^{\infty} a_s^q \varepsilon_s^{\theta'} = \infty.$$

Например, эту последовательность можно задать в виде $\varepsilon_s = S_s^{-1/\theta'}$, где $S_s = \sum_{m=0}^{s} a_m^q$. Тогда (22) следует из известной теоремы Абеля.

Рассмотрим теперь

$$f(x) = \sum_{s=0}^{\infty} a_s^{q/\theta'} \varepsilon_s \psi(2^{-s}) 2^{-sd} \left(\prod_{j=1}^{N} x_j^{-2} \sin^2 2^{s-1} x_j\right) = \sum_{s=0}^{\infty} Q_s(x), \qquad (23)$$

где $d = N(2-1/p') + (N-m)/p' + b$. Известно, что $Q_s(x)$ — целые функции типа 2^s по всем x_j, и для

$$q_s(x) = \prod_{j=1}^{N} x_j^{-2} \sin^2 2^{s-1} x_j,$$
$$\| q_s \|_r = c_r 2^{sN(2-1/r)} \qquad (1 \leqslant r \leqslant \infty). \qquad (24)$$

Несложный подсчет показывает, что

$$f\|_B = \left\{\sum_{s=0}^{\infty} (\| Q_s \|_p^{(N)} 2^{as} \varphi^{-1}(2^{-s}))^\theta\right\}^{1/\theta} = c\left\{\sum_{s=0}^{\infty} a_s^q \varepsilon_s^\theta\right\}^{1/\theta} < \infty,$$

т. е. $f \in B$. Отсюда следует также, что ряд (23) сходится в $L_p(R_N)$. Покажем, что если в (23) фиксировать $z = (0, \ldots, 0)$, то получится след $f|_{R_m}$, который не принадлежит B'. Справедливы оценки:

$$\| \Delta_{x_j h} Q_s \|_{p'}^{(m)} \leqslant c_1 |h| \psi(2^{-s}) 2^{-s(b-1)},$$
$$\| \Delta_{xh} Q_s \|_{p'}^{(m)} \leqslant 2 \| Q_s \|_{p'}^{(m)} \leqslant c_2 \psi(2^{-s}) 2^{-sb}. \qquad (25)$$

Для их вывода надо последовательно применить (15), (16), (24) и первую оценку в (22). Справа в (25) стоят величины, не большие чем справа в (17), поэтому стремление к нулю $\| \Delta_{x;h} f \|_{p'}^{(m)}$ следует из оценок (20). Из второй оценки (25) следует сходимость ряда (23) в $L_{p'}(R_m)$ при фиксированном z. Итак, $f(x)$ имеет след $f|_{R_m} \in L_{p'}(R_m)$, который получится, если в ряде (25) фиксировать z. Положим $z = 0 \equiv (0, \ldots, 0)$ и покажем, что $f(u, 0) \overline{\in} B'$. Действительно,

$$\| Q_s(u, 0) \|_{p'}^{(m)} = c a_s^{q/\theta'} \varepsilon_s \psi(2^{-s}) 2^{-sb}$$

и

$$\| f(u, 0) \|_{B'} = \left\{ \sum_{s=0}^{\infty} (\| Q_s(u, 0) \|_{p'}^{(m)} 2^{bs} \psi^{-1}(2^{-s}))^{\theta'} \right\}^{1/\theta'} =$$

$$= c \left\{ \sum_{s=0}^{\infty} a_s^q \varepsilon_s^{\theta'} \right\}^{1/\theta'} = \infty.$$

2. Пусть $1 \leqslant \theta' < \theta = \infty$. Сохраним прежнее обозначение для a_s и выберем ε_s так же, как выше. Тогда верны первое и третье соотношения в (22), только теперь $q = \theta'$. Определим $f(x)$ по формуле (23). Тогда

$$\| f \|_B = \sup_{s \geqslant 0} (\| Q_s \|_p^{(N)} 2^{as} \varphi(2^{-s})^{-1}) = c_p \sup_{s \geqslant 0} \varepsilon_s < \infty,$$

т. е. $f \in B$. Все дальнейшие рассуждения переносятся дословно из предыдущего случая.

3. Пусть $\theta \leqslant \theta'$. Условие (7) не зависит от θ и θ'. В силу свойства 2.2° для доказательства необходимости нужно рассмотреть лишь случай $\theta = 1$, $\theta' = \infty$. Сохранив обозначения (21), получим, что $\sup_{s \geqslant 0} a_s = \infty$. Выберем подпоследовательность $\{s_i\}$ так, чтобы $2^{3i} \leqslant a_{s_i}$ и $2^{2i} \leqslant 2^{\alpha s_i/2}$. Здесь α из условия (S) для функции ψ. Зададим ограниченную последовательность $\{\varepsilon_i\}$ так, чтобы выполнялись неравенства

$$2^{2i} \leqslant a_{s_i} \varepsilon_i \leqslant 2^{\alpha s_i/2}. \tag{26}$$

Рассмотрим функцию

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} 2^{-i} \varepsilon_i \varphi(2^{-s_i}) 2^{-s_i[a + N(2 - 1/p)]} q_{s_i}(x) = \sum_{i=0}^{\infty} Q_{s_i}(x), \tag{27}$$

где q_s из (24), $x = (u, z)$. Тогда

$$\| f \|_B = \sum_{i=0}^{\infty} \| Q_{s_i} \|_p^{(N)} 2^{a s_i} \varphi^{-1}(2^{-s_i}) = c_p \sum_{i=0}^{\infty} 2^{-i} \varepsilon_i < \infty,$$

т. е. $f \in B$, ряд (27) сходится в $L_p(R_N)$. Мы покажем, что если фиксировать в (27) z, то получится след, который не принадлежит B'. Справедливы неравенства

$$\|\Delta_{x_j h} Q_{s_i}\|_{p'}^{(m)} \leqslant c\,|h| \cdot 2^{-i-s_i(\alpha/2+b-1)},$$

$$\|\Delta_{x_j h} Q_{s_i}\|_{p'}^{(m)} \leqslant 2\,\|Q_{s_i}\|_{p'}^{(m)} \leqslant c 2^{-i-s_i(\alpha/2+b)}. \tag{28}$$

Их вывод аналогичен (25); мы учли также неравенство $\varepsilon_i a_{s_i} \psi(2^{-s_i}) \leqslant c 2^{-\alpha s_i/2}$, следующее из (26) и свойства (S). Выбирая μ так, чтобы $2^{-s_\mu} \leqslant |h| < 2^{-(s_\mu-1)}$, мы рассуждениями, аналогичными (15)—(18), но более простыми, ибо в оценках (28), заменяющих (17), стоит вместо $\psi(t)$ чистая степень t, получим, что $\|\Delta_{x_i h} f(u, z)\|_{p'}^{(m)} \to 0$ при $|h| \to 0$. Кроме того, $f(u, z) \in L_{p'}(R_m)$ при фиксированном z, что следует из второй оценки (28). Итак, положив в (27) $z = 0 \equiv (0, \ldots, 0)$, получим след $f(u, 0) \in \in L_{p'}(R_m)$. Однако $f(u, 0) \overline{\in} B'$. Действительно,

$$\|Q_{s_i}(u, 0)\|_{p'}^{(m)} = c_{p'} a_{s_i} \varepsilon_i \psi(2^{-s_i})\, 2^{-bs_i - i},$$

и в силу оценки снизу в (26)

$$\|f(u, 0)\|_{B'} = \sup_i \left(\|Q_{s_i}(u, 0)\|_{p'}^{(m)} 2^{bs_i} \psi^{-1}(2^{-s_i})\right) \geqslant \sup_i (c 2^i) = \infty.$$

Теорема полностью доказана.

Следствие 1. *Пусть* $\varphi(t) \in (\mathfrak{L}_k)$, $\varphi(t)\chi(t) \in \in (\mathfrak{L}_l)$ *с некоторыми* k *и* l. *Для того чтобы имело место вложение по индексу* θ

$$B_{p\theta}^{a, \varphi\chi}(R_N) \to B_{p\theta'}^{a, \varphi}(R_N) \qquad (1 \leqslant p \leqslant \infty;\ 1 \leqslant \theta' < \theta \leqslant \infty),$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$\left\{\sum_{s=0}^{\infty} \chi^q(2^{-s})\right\}^{1/q} < \infty$$

$$(q = \theta'\theta/(\theta - \theta') \text{ при } \theta < \infty;\ q = \theta' \text{ при } \theta = \infty). \tag{29}$$

Это следствие точно указывает, насколько надо увеличить гладкость, чтобы при увеличении θ' до θ класс тем не менее не расширился. Например, в логарифмической шкале гладкости для $\chi(t) = \ln^{-\alpha}(1 + t^{-1})$ искомое вложение верно при $\alpha > q^{-1}$, но неверно при $\alpha \leqslant q^{-1}$.

Отметим, что это вложение необратимо. Именно, лишь только $\chi(t) \to 0$ $(t \to \infty)$, вложение $B_{p\theta'}^{a,\varphi} \to B_{p\theta}^{a,\varphi\chi}$ $(\theta > \theta')$ неверно, как бы ни увеличивать θ (необходимость условия (7)). Следовательно, увеличение гладкости и уменьшение θ — неравносильные операции, хотя обе они приводят к сужению класса.

Следствие 2. *Из теоремы следует и вложение классов Бесова* $B_{p\theta}^{r}(R_N) \to B_{p'\theta'}^{\rho}(R_m)$ *при условии* $0 < \rho \leqslant \gamma \equiv r - N(1/p - 1/p') - (N-m)/p'$, *если* $\theta \leqslant \theta'$, *и при условии* $0 < \rho < \gamma$, *если* $\theta > \theta'$, *причем это вложение неверно при* $\rho > \gamma$ *в случае* $\theta \leqslant \theta'$ *и при* $\rho \geqslant \gamma$ *для* $\theta > \theta'$.

Замечание 1. Условия типа (29) встречаются в качестве достаточных условий при аналогичной ситуации в работе [4] для классов, несколько отличных от $B_{p\theta}^{a,\varphi}$.

Замечание 2. Покажем, что при $m = N$ (вложение разных метрик) теорема может быть обобщена.

Пусть $\Phi(t) > 0$ — непрерывная функция на $(0, 1]$, для которой существуют две постоянные α и β, $-\infty < \alpha \leqslant \leqslant \beta < +\infty$, такие, что $\Phi(t)t^{-\alpha}$ почти возрастает, а $\Phi(t) \cdot t^{-\beta}$ почти убывает. Скажем, что $f(x) \in {}_1B_{p\theta}^{\Phi}(R_N)$ $(1 \leqslant p, \theta \leqslant \infty)$, если $f(x) \in S_p'(R_N)$, т. е. регулярная в смысле L_p обобщенная функция (см. [3], гл. 1 и 8), и ее ряд Валле-Пуссена по целым функциям степеней 2^s

$$f(x) = \sum_{s=0}^{\infty} Q_s(x, f), \tag{30}$$

сходящийся к ней слабо, таков, что

$$\|f\|_{{}_1B} = \left\{\sum_{s=0}^{\infty} (\|Q_s(x, f)\|_p \, \Phi^{-1}(2^{-s}))^{\theta}\right\}^{1/\theta} < \infty. \tag{31}$$

Используя (8) и (9), можно показать, что если Φ представима в виде $\Phi(t) = t^a \varphi(t)$, $a \geqslant 0$ — целое, $\varphi \in (\mathfrak{L}_k)$, то классы ${}_1B_{p\theta}^{\Phi}$ и $B_{p\theta}^{\alpha,\varphi}$ эквивалентны. В общем случае из результатов главы 8 книги [3] о применении операции I_r лиувиллевского типа к рядам Валле-Пуссена следует, что верна теорема об изоморфизме $I_r({}_1B_{p\theta}^{\Phi}) = {}_1B_{p\theta}^{\Phi_1}$, где $\Phi_1(t) = \Phi(t) \cdot t^r$ $(-\infty < r < +\infty)$. Из сказанного вытекает, что необходимое и достаточное условие вложения ${}_1B_{p\theta}^{\Phi}(R_N) < {}_1B_{p'\theta'}^{\Psi}(R_N)$ получится, если в неравенствах

(6) и (7) заменить $\varphi(t)\cdot t^a$ и $\psi(t)\cdot t^b$ на $\Phi(t)$ и $\Psi(t)$ соответственно и положить $m = N$. Для доказательства надо классы, фигурирующие в искомом вложении, перевести с помощью операции I_r в такие, для которых верна теорема, а затем применить обратную операцию I_{-r}.

Отметим, что если $\Phi(t) = t^a\varphi(t)$, $a \geqslant 0$ — целое, $\varphi(t)$ — произвольный модуль непрерывности порядка k ($\varphi \in (\mathfrak{L}_k)$), то, как показывают известные нам примеры, класс ${}_1B^{\Phi}_{p\theta}$ существенно шире, чем класс $B^{a,\varphi}_{p\theta}$, определенный в (1)—(3). Вопрос о теоремах вложения для таких классов $B^{a,\varphi}_{p\theta}$ остается открытым.

Замечание 3. Возможно также обобщение теоремы на классы с анизотропией дифференциальных свойств по направлениям. Пусть $a = (a_1, \ldots, a_N)$, $b = (b_1, \ldots, b_m)$, где a_j, $b_i \geqslant 0$ — целые числа, $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_N)$, $\psi = (\psi_1, \ldots, \psi_m)$ — вектор-функции от t, причем $\varphi_j \in (\mathfrak{L}_{k_j})$, $\psi_i \in (\mathfrak{L}_{n_i})$ $(1 \leqslant j \leqslant N,\ 1 \leqslant i \leqslant m,\ m \leqslant N)$. Анизотропные классы $B = B^{a,\varphi}_{p\theta}(R_N)$ и $B' = B^{b,\psi}_{p'\theta'}(R_m)$ $(1 \leqslant p \leqslant p' \leqslant \infty,\ 1 \leqslant \theta,\ \theta' \leqslant \infty)$ определяются, как это делается обычно. Для любого целого $s \geqslant 0$ вводим $\nu_j = \nu_j(s)$ и $\nu = \nu(s)$ из соотношений

$$\nu_j^{a_j}\varphi_j^{-1}(\nu_j^{-1}) = 2^s \quad (1 \leqslant j \leqslant N),$$

$$\nu = \left(\prod_{j=m+1}^{N} \nu_j^{1/p'}\right)\left(\prod_{j=1}^{N} \nu_j^{1/p-1/p'}\right).$$

Необходимые и достаточные условия вложения $B \to B'$ получатся, если в (6) заменить выражение в квадратных скобках на $a_s^{(i)} = [\nu\nu_i^{b_i-a_i}\varphi_i(\nu_i^{-1})\psi_i^{-1}(\nu_i^{-1})]$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$, а (7) заменить на условие $\sup\limits_s a_s^{(i)} < \infty$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$.

В изотропном случае эти условия, естественно, эквивалентны (6)—(7).

Не будем останавливаться на дальнейших обобщениях на случай векторных индексов p и θ. Их формулировка громоздка, а доказательства в основном аналогичны приведенному выше.

В заключение автор приносит благодарность В. А. Ильину за внимание к этой работе.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Поступило
22.VI.1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Бари Н. К., Стечкин С. Б., Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций. Тр. Моск. матем. об-ва, 5 (1956), 483—521.

[2] Джафаров А. С., Теоремы вложения классов функций с дифференциальными свойствами в нормах специальных пространств, Докл. АН Азерб. ССР, 21, № 2 (1965), 10—14.

[3] Никольский С. М., Приближение функций многих переменных и теоремы вложения, М., 1969.

[4] Рамазанов М. Д., Фукциональные пространства и преобразование Фурье, Тр. Матем. ин-та АН СССР, 91 (1967), 146—170.

[5] Ульянов П. Л., Теоремы вложения и соотношения между наилучшими приближениями (модулями непрерывности) в разных метриках, Матем. сб., 81, № 1 (1970), 104—131.