Алгебра и анализ
Том 10 (1998), вып. 1

О РАСПРЕДЕЛЕНИИ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ЧИСЕЛ В ПАРАЛЛЕЛОТОПАХ

© Н. А. Никишин, М. М. Скриганов

В работе получены нетривиальные оценки остатков в асимптотической формуле для числа элементов поля алгебраических чисел в параллелотопах определяемых канонической системой нормирований.

§1. Основные результаты

Пусть k — поле алгебраических чисел степени $n = [k : \mathbb{Q}] < \infty$ с дискриминантом d_k, имеющее s вещественных и t пар комплексносопряженных вложений. Таким образом, $n = s + 2t$ и $r = s + t - 1$ — ранг группы единиц поля k. Через k^* обозначим мультипликативную группу поля k. Пусть $\mathfrak{N}$ — каноническая система нормирований поля k, $\mathfrak{N}^\infty$ — подмножество всех архимедовых нормирований, состоящее из s вещественных нормирований и t комплексных, а $\mathfrak{N}^0 = \mathfrak{N} \setminus \mathfrak{N}^\infty$ — подмножество дискретных нормирований (см. [1]).

$\mathfrak{N}$-дивизором η называется (см. [7, гл. 5, §1]) вещественнозначная функция $\eta : \mathfrak{N} \to \mathbb{R}$, удовлетворяющая следующим условиям:

1) для всякого нормирования $v \in \mathfrak{N}$, $\eta(v) > 0$;

2) для всех $v \in \mathfrak{N}$, кроме конечного числа $\eta(v) = 1$;

3) для всякого дискретного нормирования $v \in \mathfrak{N}^0$ существует такой элемент поля $a_v \in k$, что $\eta(v) = |a_v|$.

Для простоты мы будем называть $\mathfrak{N}$-дивизор просто дивизором. Число

$$[\![\eta]\!] = \prod_{v \in \mathcal{N}} \eta(v)^{n_v} \tag{1.1}$$

называется размером дивизора η. Здесь $n_v = [k_v : \mathbb{Q}_v]$ — локальная степень расширения.

Произведение двух дивизоров является дивизором. Каждый элемент $\xi \in k^*$ определяет некоторый дивизор, значение которого на нормировании $|\cdot|_v$, $v \in \mathfrak{N}$

Ключевые слова: поля алгебраических чисел, параллелотопы, подсчет числа точек решетки в области.

М. М. Скриганов пользовался поддержкой РФФИ (проект 96-01-00856).

равно $|\xi|_v$. Мы будем обозначать этот дивизор той же буквой ξ. Для всех $\xi \in k^*$ верно соотношение

$$[\![\xi\eta]\!] = [\![\eta]\!]. \tag{1.2}$$

Это — простое следствие формулы произведения канонической системы нормирований поля алгебраических чисел k (см. [1, 2, 7]).

Параллелотопом в поле k называется множество

$$L(\eta) = \{\xi \in K \mid \forall v \in \mathfrak{N}\ |\xi|_v \leqslant \eta(v)\}. \tag{1.3}$$

Обозначим через

$$\nu(\eta) = \operatorname{card} L(\eta) \tag{1.4}$$

число элементов поля k, принадлежащих параллелотопу $L(\eta)$. Для любого элемента $\xi \in k^*$ отображение $\alpha \in k \to \xi\alpha \in k$ осуществляет взаимооднозначное соответствие между параллелотопами $L(\eta)$ и $L(\xi\eta)$. Поэтому верно следующее равенство

$$\nu(\xi\eta) = \nu(\eta). \tag{1.5}$$

Величина $\nu(\eta)$ тесно связана с алгебраической структурой поля k. Например, классические теоремы Дирихле–Минковского–Хассе–Шевалле о группе единиц и группе классов идеалов поля k могут быть объединены одним утверждением: $\nu(\eta) > 0$ для всех дивизоров η, размер которых превышает некоторую величину c_k, зависящую только от поля k (см. [2, гл. 3]).

Ленг обнаружил, что $\nu(\eta)$ допускает асимптотическое представление при $[\![\eta]\!] \to \infty$. Положим по определению

$$\nu(\eta) = B_k[\![\eta]\!] + \rho(\eta), \tag{1.6}$$

где

$$B_k = \frac{2^s(2\pi)^t}{|d_K|^{1/2}}. \tag{1.7}$$

Теорема 1.1 (Ленг [7, гл. 5, §2]). *Пусть k — поле алгебраических чисел степени n. Тогда при $[\![\eta]\!] \to \infty$ справедлива оценка*

$$\rho(\eta) \ll [\![\eta]\!]^{1-1/n}.$$

Цель настоящей работы — улучшить эту оценку. Наиболее впечатляющий результат получается для вполне вещественных полей.

Теорема 1.2. *Пусть k — вполне вещественное поле алгебраических чисел (т. е. $t = 0$) степени n. Тогда при $[\![\eta]\!] \to \infty$ справедлива оценка*

$$\rho(\eta) \ll (\ln[\![\eta]\!])^{n-1}.$$

Мы предполагаем, что оценка теоремы 1.2 является предельно точной. Для произвольных полей мы получаем следующий результат.

Теорема 1.3. *Пусть k — поле алгебраических чисел степени n, имеющее s вещественых и t пар комплексносопряженных вложений. Тогда при $[\![\eta]\!] \to \infty$ справедлива оценка*

$$\rho(\eta) \ll [\![\eta]\!]^{\frac{t}{2+t}} (\ln[\![\eta]\!])^{s+t+\delta},$$

где $\delta > 0$ произвольно мало́.

Отметим, что методами настоящей работы степень логарифма в оценке теоремы 1.3 может быть снижена до $s + t - 1$. Мы не приводим здесь этого улучшения, поскольку уже показатель степени $t/2 + t$ второго множителя в оценке теоремы 1.3 не является, по-видимому, предельным для $t > 0$.

В самом деле, если взять квадратичное чисто мнимое поле $\mathbb{Q}(\sqrt{-1})$, где $t = 1$, $s = 0$, то $\rho(\eta)$ имеет тот же порядок, что и остаток в задаче о точках решетки $\mathbb{Z}^2$ в расширяющемся круге (так называемая „проблема круга“ (см. [6, гл. 3])).

Принимая во внимание последнее по времени улучшение оценки остатка в „проблеме круга“ (см. [5]), мы находим, что в случае поля $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-1})$

$$\rho(\eta) \ll [\![\eta]\!]^{\theta},$$

где $\theta = 23/73 \approx 0,315$. Эта оценка лучше, чем в теореме 1.3: $\frac{t}{t+2} = 1/3 \approx 0,33$. Заметим, однако, что нам неизвестна оценка лучшая, чем в теореме 1.3 для полей K с $t \neq 0$, отличных от квадратичных. Было бы интересно определить настоящий порядок $\rho(\eta)$ при $t > 0$.

План оставшейся части работы следующий. В §2 мы подробно описываем редукцию рассматриваемой проблемы к задаче геометрии чисел о подсчете числа точек решетки в расширяющейся области. Необходимые нам сведения об этой задаче геометрии чисел изложены в §3. В §4 приведены нужные нам факты об алгебраических решетках. Оценки сумм по алгебраическим решеткам даны в §5. В §6 завершается доказательство основных результатов данной работы. Наконец, в §7 обсуждаются некоторые дальнейшие результаты, которые получаются методами настоящей работы.

§2. Редукция

Опишем основные идеи доказательства теорем 1.2 и 1.3. На языке аделей задача об оценке $\nu(\eta)$ может быть интерпретирована как подсчет числа точек

бесконечномерной решетки (образованной вложением поля k в кольцо аделей), лежащих внутри бесконечномерной области — параллелотопа $L(\eta)$ (см. [2, гл. 3]).

Такой подход к данной задаче был бы весьма интересен. Однако в настоящей работе мы предпочитаем свести нашу задачу к конечномерной задаче геометрии чисел.

Эта редукция состоит в следующем. Пусть $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ — произвольная решетка с объемом фундаментальной области $d(\Gamma) > 0$, а $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область объема $\mathrm{Vol}(\mathcal{O})$. Пусть

$$N(\mathcal{O}, \Gamma) = \mathrm{card}(\Gamma \cap \mathcal{O}) \tag{2.1}$$

— число точек решетки, принадлежащих области $\mathcal{O}$. Положим, по определению,

$$N(\mathcal{O}, \Gamma) = \frac{\mathrm{Vol}\,\mathcal{O}}{d(\Gamma)} + R(\mathcal{O}, \Gamma). \tag{2.2}$$

Оценка $N(\mathcal{O}, \Gamma)$ и $R(\mathcal{O}, \Gamma)$ составляет содержание одной из основных задач геометрии чисел о количестве точек решетки в областях. Нас будет интересовать эта задача для специальных областей и решеток.

Введем естественное отождествление

$$\prod_{v \in \mathfrak{N}^\infty} k_v \simeq \mathbb{R}^n, \quad n = s + 2t,$$

где без ограничения общности можно предположить, что в множестве $\mathfrak{N}^\infty$ первые s нормирований: $v'_1, \ldots, v'_s$ — вещественные, а t следующих: $v''_n, \ldots, v''_t$ — комплексные. В этом случае пополнения k в соответствующей норме изоморфны соответственно:

$$k_{v'_j} \simeq \mathbb{R}, \qquad j = 1, \ldots, s,$$
$$k_{v''_p} \simeq C \simeq \mathbb{R}^2, \quad p = 1, \ldots, t.$$

Наборы из $s + t$ чисел

$$x = ((x_v)_{v \in \mathfrak{N}^\infty}) = (x'_1, \ldots, x'_s; x''_1, \ldots, x''_t), \tag{2.3}$$

где

$$x'_j \in \mathbb{R}, \quad j = 1, \ldots, s; \qquad x''_p \in C \simeq \mathbb{R}^2, \quad p = 1, \ldots, t$$

естественно считать точками $\mathbb{R}^n$.

Обозначим через $|x_v|$ евклидову норму в соответствующем пространстве $\mathbb{R}^{n_v}$, где $n_v = 1$, для вещественных нормирований и $n_v = 2$ для комплексных. Обозначим через $\|x\|$ евклидову норму в $\mathbb{R}^n$:

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{s} |x'_k|^2 + \sum_{p=1}^{t} |x''_p|^2.$$

Каноническое вложение σ поля k в пространство $\mathbb{R}^n$ определяется по формуле:

$$\sigma : k \supset \xi \to \sigma(\xi) = ((\sigma_v(\xi))_{v\in\mathfrak{N}^\infty}) = (\sigma'_1, \dots, \sigma'_s; \sigma''_1, \dots, \sigma''_t), \tag{2.4}$$

где $\{\sigma'_1, \dots, \sigma'_s\}$ — полная система вещественных вложений поля k в $\mathbb{R}$, а $\{\sigma''_1, \dots, \sigma''_t\}$ — полная система комплексных вложений k в $\mathbb{C}$ (см. [1, гл. 2, §3] и [3, гл. 1]).

Если $M \subset k$ — $\mathbb{Z}$-модуль ранга n, то образ M при отображении σ

$$\Gamma_M = \sigma(M) \subset R^n \tag{2.5}$$

является решеткой в $\mathbb{R}^n$. Такие решетки будем называть алгебраическими.

Назовем архимедовой частью $L^\infty(\eta)$ параллелотопа $L(\eta)$ выпуклое замыкание образа $L(\eta)$ при отображении σ:

$$L^\infty(\eta) = \{x \in R^n \mid \forall v \in \mathfrak{N}^\infty\ |x_v| \leqslant \eta(v)\}. \tag{2.6}$$

$L^\infty(\eta)$ является декартовым произведением s отрезков и t кругов, причем

$$\mathrm{Vol}(L^\infty(\eta)) = 2^s\pi^t \prod_{v\in\mathfrak{N}^\infty} \eta(v)^{n_v}. \tag{2.7}$$

Из определения $\mathfrak{N}$-дивизора непосредственно следует, что множество

$$A(\eta) = \{\xi \in k \mid \forall v \in \mathfrak{N}^0\ |\xi|_v \leqslant n(v)\} \tag{2.8}$$

является дробным идеалом поля k. Его норма равна

$$\mathrm{Norm}\, A(\eta) = \prod_{v\in\mathfrak{N}^0} \eta(v)^{-n_v}. \tag{2.9}$$

Любой дробный идеал A поля k является, разумеется, $\mathbb{Z}$-модулем ранга n, поэтому ему соответствует по формуле (2.5) решетка $\Gamma_A = \sigma(A) \subset R^n$. Прямое вычисление (см. [6, гл. 5, §2]) приводит к следующей формуле

$$d(\Gamma_A) = 2^{-t}|d_K|^{1/2}\,\mathrm{Norm}\, A. \tag{2.10}$$

Назовем неархимедовой частью $L^0(\eta)$ параллелотопа $L(\eta)$ алгебраическую решетку в $\mathbb{R}^n$, соответствующую идеалу $A(\eta)$ (см. (2.8)) при отображении σ (см. (2.5))

$$L^0(\eta) = \Gamma_{A(\eta)}.$$

Мы видим, что элементы параллелотопа $L(\eta)$ совпадают с теми элементами идеала $A(\eta)$, которые удовлетворяют определенным соотношениям для архимедовых нормирований:

$$L(\eta) = \{\alpha \in A(\eta) \mid \forall v \in \mathfrak{N}^\infty \ |\alpha|_v \leqslant \eta(v)\}. \tag{2.11}$$

С учетом определения вложения σ (см. (2.4)) получаем следующую формулу, связывающую паралелотоп $L(\eta)$ с его архимедовой и неархимедовой частью

$$\sigma(L(\eta)) = \{\gamma \in L^0(\eta) \mid \forall v \in \mathfrak{N}^\infty \ |\gamma|_v \leqslant \eta(v)\} = L^\infty(\eta) \cap L^0(\eta). \tag{2.12}$$

Это приводит к такой формуле, ср. (1.4), (2.1),

$$\nu(\eta) = N(L^\infty(\eta), L^0(\eta)), \tag{2.13}$$

являющейся основой рассматриваемой редукции. Кроме того, из сравнения (1.1), (1.7), (2.7), (2.10) следует, что

$$B_k[\![\eta]\!] = \frac{\mathrm{Vol}(L^\infty(\eta))}{d(L^0(\eta))}. \tag{2.14}$$

Сравнивая (1.6) и (2.2), получаем следующую формулу

$$\rho(\eta) = R(L^\infty(\eta), L^0(\eta)). \tag{2.15}$$

Поскольку для любого $\theta \in k^*$, $\nu(\theta\eta) = \nu(\eta)$ и $[\![\theta\eta]\!] = [\![\eta]\!]$, то $\rho(\theta\eta) = \rho(\eta)$.

Пусть $\{A_1, \ldots, A_h\}$ — фиксированная система представителей группы классов идеалов; h — число классов поля k. Существует, очевидно, элемент $\theta = \theta(\eta) \in k^*$ такой, что $\theta(\eta)A(\eta) = A_j$ для некоторого $1 \leqslant j \leqslant h$. Поэтому можно переписать формулу (2.15) в виде

$$\rho(\eta) = \rho(\theta(\eta)) = R(L^\infty(\theta(\eta)), \Gamma_{A_j}). \tag{2.16}$$

Этим заканчивается редукция исходной задачи об оценке остатка $\rho(\eta)$ в асимптотической формуле (1.6) к задаче геометрии чисел о подсчете числа точек алгебраических решеток Γ_A в областях специального вида $L^\infty(\eta)$. Подчеркнем, что именно геометрическая специфика этих объектов позволяет улучшить оценку остатка $\rho(\nu)$.

Теорема 1.2 является следствием следующего результата.

Теорема 2.1. *Пусть k — вполне вещественное поле алгебраических чисел степени n, $M \subset k$ — произвольный $\mathbb{Z}$-модуль ранга n и $\Gamma_M = \sigma(M) \subset R^n$ — отвечающая ему решетка* (2.5). *Пусть $\mathcal{D}$ — область в $\mathbb{R}^n$, являющаяся в координатах* (2.3) *декартовым произведением n отрезков. Тогда при $\operatorname{Vol}\mathcal{D} \to \infty$ справедлива оценка*

$$R(\mathcal{D}, \Gamma_{\mathcal{M}}) < C(M)(\ln(\operatorname{Vol}\mathcal{D}))^{n-1} \tag{2.17}$$

с константой $C(M)$, зависящей только от модуля $M \subset k$.

Доказательство теоремы 2.1 дано в работах М. М. Скриганова [9, 10]. Укажем также на недавние работы [11, 12], в которых изложена общая теория аномально малых, в частности логарифмически малых, остатков в проблеме подсчета числа точек решетки в области.

Теорема 1.2 немедленно следует из теоремы 2.1 и формулы (2.16). Действительно, с учетом равенства (2.14) при $[\![\varphi]\!] \to \infty$ получаем

$$\begin{aligned}\rho(\eta) &< C(A_j)\ln^{n-1}(\operatorname{Vol} L^{\infty}(\theta\eta)) \leqslant \max_{1\leqslant j\leqslant h}\{C(A_j)\ln^{n-1}(B_k(\det\Gamma_{A_j})[\![\eta]\!])\}\\ &\ll (\ln[\![\eta]\!])^{n-1}.\end{aligned}$$

Теорема 1.2 доказана.

Совершенно аналогично теорема 1.3 выводится из формулы (2.16) и следующей теоремы.

Теорема 2.2. *Пусть k — поле алгебраических чисел степени n, обладающее s вещественными и t парами комплексносопряженных вложений. Пусть $M \subset k$ — $\mathbb{Z}$-модуль ранга n и $\Gamma_M = \sigma(M)$ решетка в $\mathbb{R}^n$, отвечающая M (см.* (2.5)). *Пусть $\mathcal{D}$ — область в $\mathbb{R}^n$, являющаяся в координатах* (2.3) *декартовым произведением s отрезков и t кругов. Тогда при $\operatorname{Vol}\mathcal{D} \to \infty$ справедлива оценка*

$$R(\mathcal{D}, \Gamma_{\mathcal{M}}) \ll (\operatorname{Vol}\mathcal{D})^{\frac{t}{2+t}} \ln^{s+t+\delta}(\operatorname{Vol}\mathcal{D}),$$

где $\delta > 0$ произвольно мало́.

Таким образом, для доказательства теоремы 1.3 нам осталось доказать теорему 2.2. Ее доказательство составляет содержание оставшейся части работы.

§3. Подсчет числа точек решетки в областях евклидова пространства

Приведем сначала некоторые простые факты о суммах по произвольной решетке $\Gamma \subset \mathbb{R}^m$.

Лемма 3.1. 1) *При $\alpha > m$ и $\beta > 0$ ряды*

$$\sum_{\gamma\in\Gamma} \frac{1}{(1+\|\gamma-x\|)^{\alpha}}, \qquad \sum_{\gamma\in\Gamma} e^{-\beta\|\gamma-x\|} \tag{3.1}$$

сходятся и их суммы равномерно ограничены по $x \in \mathbb{R}^m$;

2) *при $\alpha > m$ справедлива оценка*

$$\sum_{\|\gamma\|\geqslant\rho} \frac{1}{\|\gamma\|^{\alpha}} \ll \rho^{-\alpha+m}, \quad \rho\to\infty; \tag{3.2}$$

3) *при $\beta \leqslant m$ справедливы оценки*

$$\sum_{\|\gamma\|\leqslant\rho} \frac{1}{(1+\|\gamma\|)^{\beta}} \ll \begin{cases} \ln(2+\beta), & \beta = m, \\ (1+\rho)^{m-\beta}, & \beta < m. \end{cases} \tag{3.3}$$

Доказательство этих фактов получается стандартными приемами (см., например, [6, гл. 1, §2–3]) и может быть опущено.

Пусть $\mathcal{O}$ — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, а τ, $1 > \tau > 0$ — параметр. Пара областей $\mathcal{O}_\tau^{\pm}$ называется τ-коаппроксимацией области $\mathcal{O}$, если $\mathcal{O}_\tau^- \subset \mathcal{O} \subset \mathcal{O}_\tau^+$ и точки границ $\mathcal{O}_\tau^{\pm}$ отстоят от точек границы $\mathcal{O}$ на расстоянии $\geqslant \tau$.

Пусть $\chi(\mathcal{O}, x)$ — характеристическая функция области $\mathcal{O}$ и

$$\widetilde{\chi}(y) = \widetilde{\chi}(\mathcal{O}, y) = \int\limits_{\mathcal{O}} e^{2\pi\langle x,y\rangle} dx, \quad u \in R^n, \tag{3.4}$$

ее преобразование Фурье; здесь $\langle X, Y\rangle$ — скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$.

Напомним, что решеткой Γ', двойственной к Γ, называется решетка, состоящая из всех векторов γ' таких, что скалярное произведение $\langle\gamma,\gamma'\rangle \in \mathbb{Z}$ для всех $\gamma \in \Gamma$.

Для оценки числа точек решетки в области мы используем следующее общее утверждение, доказанное в [9, лемма 3.3].

Лемма 3.2. *Пусть $\mathcal{O}$ — ограниченная область в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, и $\mathcal{O}_\tau^{\pm}$ — ее τ-коаппроксимация. Тогда при $a > n$ и всех $\rho > 1$ справедлива оценка*

$$\begin{aligned} &d(\Gamma)R(\mathcal{O},\Gamma) \\ &\quad\leqslant \operatorname{Vol}(\mathcal{O}_\tau^+) - \operatorname{Vol}(\mathcal{O}_\tau^-) + \sum_{\gamma\in\Gamma':\|\gamma\|<\rho} (|\widetilde{\chi}(\mathcal{O}_\tau^+,\gamma)| + |\widetilde{\chi}(\mathcal{O}_\tau^-,\gamma)|) \\ &\quad + C_a\tau^{-a} \sum_{\gamma\in\Gamma':\|\gamma\|\geqslant\rho} (|\widetilde{\chi}(\mathcal{O}_\tau^+,\gamma)| + |\widetilde{\chi}(\mathcal{O}_\tau^-)|)\|\gamma\|^{-a}, \end{aligned} \tag{3.5}$$

где константа C_a зависит только от a.

§4. Общие факты об алгебраических решетках

Введем в $\mathbb{R}^n$ нормерную функцию

$$N(x) = \prod_{v\in\mathfrak{N}^\infty} |x_v|^{n_v} = \prod_{j=1}^{s} |x'_j| \prod_{p=1}^{t} |x''_p|^2 \tag{4.1}$$

(см. (2.3)). Для $\xi \in k$, $N(\sigma(\xi)) = |N_k(\xi)|$, где N_k — норма в поле k.

Отсюда, между прочим, следует, что алгебраические решетки Γ_M являются допустимыми (см. [3, гл. 3]) относительно формы $N(x)$, т. е. $N(\Gamma_M) > 0$, где

$$N(\Gamma) = \inf_{\gamma\in\Gamma\setminus\{0\}} N(\gamma) \tag{4.2}$$

— однородный минимум решетки Γ относительно формы $N(x)$.

Введем следующие подмножества в $\mathbb{R}^n$

$$E = \{x \in \mathbb{R}^n \mid N(x) \neq 0\}, \qquad U = \{x \in R^n \mid N(x) = 1\}. \tag{4.3}$$

Логарифмическое отображение $\mathrm{Log} : E \to \mathbb{R}^{s+t}$ определяется по формуле

$$\mathrm{Log}(x) = \mathrm{Log}((x_v)_{v\in\mathfrak{N}^\infty}) = ((n_v \log(|x_v|))_{v\in\mathfrak{N}^\infty}) \in \mathbb{R}^{r+1} \tag{4.4}$$

или

$$\mathrm{Log}(x) = (l'_1(x)\dots l'_s(x); l''_1(x)\dots l''_t(x)),$$

где

$$l'_j(x) = \log|x'_j|, \quad j = 1,\dots,s; \qquad l''_p(x) = 2\log|x''_p|, \quad p = 1,\dots,t.$$

В частности, $\mathrm{Log}(U) = L$, где

$$L = \left\{\Phi = (\varphi'_1(x),\dots,\varphi'_s(x);\varphi''_1(x),\dots,\varphi''_t(x)) \in \mathbb{R}^{r+1} \mid \sum_{j=1}^{s}\varphi'_j + \sum_{p=1}^{t}\varphi''_p = 0\right\} \tag{4.5}$$

— r-мерная гиперплоскость в $\mathbb{R}^{s+t} = \mathbb{R}^{r+1}$.

Для любой точки $x \in E$ положим

$$|x_v|^{n_v} = N^{n_v/n} e^{\varphi_v}, \quad v \in \mathfrak{N}^\infty,$$

где

$$\begin{aligned}\Phi(x) &= ((\varphi_v)_{v\in\mathfrak{N}^\infty}) = (\varphi'_1(x),\dots,\varphi'_s(x);\varphi''_1(x),\dots,\varphi''_t(x)) \\ &= \mathrm{Log}\left(\frac{x}{N^{1/n}(x)}\right).\end{aligned} \tag{4.6}$$

Параметры (N, Φ), $N > 0$, $\Phi \in L$ — будем называть гиперболическими координатами точки $x \in E$. Разумеется, через них однозначно определяются только модули координат $|x_v|$ точки $x \in E$.

Для любой точки $x \in E$ с гиперболическими координатами (N, Φ) справедливы следующие неравенства

$$N^{1/n} e^{\frac{1}{4n}\|\Phi\|} \leqslant \|x\| \leqslant \sqrt{s+t} \quad N^{1/n} e^{\|\Phi\|}. \tag{4.7}$$

Правое неравенство получается непосредственно; по поводу доказательства левого см. [7, §4].

Для оценки сумм по алгебраической решетке Γ_M мы будем существенно использовать структуру группы единиц U_M модуля M. Напомним, что, по определению, U_M состоит из таких чисел $\varepsilon \in k$, что $\varepsilon M = M$. Отметим, что U_M является подгруппой конечного индекса в группе единиц поля k. По теореме Дирихле образ U_M при логарифмическом отображении

$$\Lambda_M = \mathrm{Log}(U_M) \tag{4.8}$$

образует решетку в гиперплоскости L (см. (4.5)).

Группа U_M действует на множестве E по формуле

$$\varepsilon : \mathbb{R}^n \ni x \to \sigma(\varepsilon)x = ((\sigma_v(\varepsilon)x_v)_{v \in \mathfrak{N}^\infty}) \in \mathbb{R}^n. \tag{4.9}$$

Причем для любого $x \in E$ имеет место равенство $N(\sigma(\varepsilon x)) = N(x)$. Решетка Γ_M, очевидно, инвариантна относительно действия (4.9) группы единиц U_M:

$$\sigma(\varepsilon)\Gamma_M = \Gamma_M, \quad \varepsilon \in U_M. \tag{4.10}$$

Кроме того,

$$\Gamma'_M = \Gamma_{M'}, \qquad U_{M'} = U_M, \tag{4.11}$$

где M' — модуль двойственный к M (см. [1, гл. 2]).

Действие группы U_M на E дискретно. Явное описание фундаментальной области $F_M \subset E$ группы U_M можно найти в [1, гл. 5]. Для наших целей достаточно лишь знать, что F_M-конус в E. Поэтому для всех $x \in F_M$ выполняется следующее неравенство

$$\|x\| \leqslant BN(x) \tag{4.12}$$

с постоянной B, зависящей от конкретного выбора фундаментальной области F_M. Кроме того, для всех $x \in \mathbb{R}^n$ справедливо неравенство

$$b^{-1}N(x) \leqslant \|x\|^n \tag{4.13}$$

с постоянной b, зависящей только от n, которое следует из неравенства между арифметическим и геометрическим средним.

§5. Оценка сумм по алгебраическим решеткам

Теория единиц позволяет весьма точно оценивать определенные суммы по решеткам Γ_M. В основе этих оценок лежит следующий простой общий прием (см. [9, §4]). Предположим, что нам надо оценить сумму вида

$$\Omega(f,\Gamma_M) = \sum_{\gamma\in\Gamma_M\setminus\{0\}} f(\gamma), \tag{5.1}$$

где $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — функция, для которой ряд (5.1) сходится абсолютно. Принимая во внимание инвариантность $\Gamma_M \setminus \{0\}$ под действием группы U_M (см. (4.10)), мы можем переписать (5.1) в виде

$$\Omega(f,\Gamma_M) = \sum_{\gamma\neq 0}^{*} \omega(\gamma), \tag{5.2}$$

где

$$\omega(\gamma) = \sum_{\varepsilon\in U_M} f(\sigma(\varepsilon)\gamma). \tag{5.3}$$

Здесь $\sum^*$ обозначает суммирование по $\gamma \in F_M \cap (\Gamma_M \setminus \{0\})$, т. е. по множеству точек решетки Γ_M неэквивалентных относительно действия (4.9) группы единиц U_M.

Применим этот прием к оценке двух сумм, которые будут использованы в дальнейшем.

Лемма 5.1. *Пусть*

$$\Omega_1(\rho) = \Omega_1(\Gamma_M,\rho) = \sum_{0<\|\gamma\|<\rho} \frac{1}{N(\gamma)},$$

где суммирование ведется по $\gamma \in \Gamma_M$. Тогда при $\rho \to \infty$ справедлива оценка

$$\Omega_1(\rho) \ll (\ln\rho)^{r+1}. \tag{5.4}$$

Лемма 5.2. *Пусть $\beta > n$ и*

$$\Omega_2(\rho) = \Omega_2(\Gamma_M,\beta,\rho) = \sum_{\|\gamma\|\geqslant\rho} \frac{1}{N(\gamma)}\|\gamma\|^{-\beta},$$

где суммирование ведется по $\gamma \in \Gamma_M$. Тогда при $\rho \to \infty$ справедлива оценка

$$\Omega_2(\Gamma_M,\beta,\rho) \ll \rho^{-\beta}(\ln\rho)^{r+1+\delta}, \tag{5.5}$$

где $\delta > 0$ произвольно мало.

Доказательство леммы 5.1. Отметим прежде всего, что в силу допустимости решеток Γ_M (см. (4.2)) знаменатели в рассматриваемых суммах $\geqslant N(\Gamma_M) > 0$.

Для $\Omega_1(\Gamma_M, \rho)$ применим преобразование (5.2)–(5.3):

$$\Omega_1(\rho) = \sum_{0<\|\gamma\|<\rho}^{*} \frac{1}{N(\gamma)} \omega(\gamma, \rho),$$

где

$$\omega(\gamma, \rho) = \operatorname{card}\{\varepsilon \in U_M \mid \|\sigma(\varepsilon)\gamma\| < \rho\}.$$

Пусть (N, Φ) и $(1, \lambda)$ — гиперболические координаты (см. (4.6)) соответственно точек γ и $\sigma(\varepsilon)$. Тогда с учетом левого неравенства (4.7) получаем

$$\begin{aligned}
\omega(\gamma, \rho) &\leqslant \operatorname{card}\{\varepsilon \in U_M \mid N^{1/n} e^{\frac{1}{4n}\|\lambda_\varepsilon + \Phi\|} < \rho\} \\
&= \operatorname{card}\left\{\varepsilon \in U_M \mid \|\lambda_\varepsilon + \Phi\| < 4n \ln \frac{\rho}{N^{1/n}(\gamma)}\right\} \\
&\leqslant \operatorname{card}\left\{\varepsilon \in U_M \mid \|\lambda_\varepsilon + \Phi\| < q, \text{ где } q = 4n \ln \frac{\rho}{N^{1/n}(\Gamma_M)}\right\}.
\end{aligned}$$

Иными словами, $\omega(\gamma, \rho)$ не больше числа точек r-мерной решетки $\Lambda_M \subset L$, содержащихся в шаре радиуса q с центром в точке $(-\Phi) \in L$. Очевидно, это число $\ll q^r \ll [\ln(2+\rho)]^r$. В результате

$$\Omega_1(\rho) \ll \ln^r(2+\rho)\left(\sum_{0<\|\gamma\|<\rho}^{*} \frac{1}{N(\gamma)}\right).$$

Используя неравенство (4.12), находим

$$\sum_{0<\|\gamma\|<\rho}^{*} \frac{1}{N(\gamma)} \leqslant B \sum_{0<\|\gamma\|<\rho}^{*} \frac{1}{\|\gamma\|^n} \leqslant B \sum_{0<\|\gamma\|<\rho} \frac{1}{\|\gamma\|^n}.$$

Ссылка на лемму 3.1 завершает доказательство. Лемма 5.1 доказана.

Доказательство леммы 5.2. Разобъем сумму $\Omega_2(\rho)$ на два слагаемых

$$\Omega_2(\rho) = \Omega'(\rho) + \Omega''(\rho). \tag{5.6}$$

Первое слагаемое имеет вид

$$\Omega'(\rho) = \sum_{N(\gamma)>b\rho^n} \frac{1}{N(\gamma)} \|\gamma\|^{-\beta}, \tag{5.7}$$

где b — постоянная из неравенства (4.13), поэтому условие $\|\gamma\| \geqslant \rho$, в этой сумме, очевидно, выполнено. Второе слагаемое имеет вид

$$\Omega''(\rho) = \sum_{N(\gamma)\leqslant b\rho^n, \|\gamma\|\geqslant\rho} \frac{1}{N(\gamma)}\|\gamma\|^{-\beta}. \tag{5.8}$$

Оценим первое слагаемое в (5.6). Применим для этого преобразование (5.2)–(5.3)

$$\Omega'(\rho) = \sum_{N(\gamma)>b\rho^n}^{*} \frac{1}{N(\gamma)}\omega'(\gamma),$$

где

$$\omega'(\gamma) = \sum_{\varepsilon\in U_M} \frac{1}{\|\sigma(\varepsilon)\gamma\|^{\beta}}.$$

Пусть (N, Φ) и $(1, \lambda)$ — гиперболические координаты (см. (4.6)) соответственно точек γ и $\sigma(\varepsilon)$. С учетом левого неравенства (4.7) получаем

$$\omega'(\gamma) \leqslant \frac{1}{N(\gamma)^{\beta/n}} \sum_{\lambda\in\Lambda_M} e^{-\frac{\beta}{4n}\|\lambda+\Phi\|}.$$

По лемме 3.1 для всех $\gamma \in E$, $\omega'(\gamma) \leqslant CN(\gamma)^{-\beta/n}$. Поэтому

$$\Omega'(\rho) \leqslant C \sum_{N(\gamma)>b\rho^n}^{*} \left(\frac{1}{N(\gamma)}\right)^{1+\beta/n}.$$

Применяя неравенства (4.12), (4.13) и лемму 3.1, продолжим эту оценку следующим образом:

$$\Omega'(\rho) \leqslant CB^{1+\beta/n} \sum_{N(\gamma)>b\rho^n}^{*} \|\gamma\|^{-n-\beta} \leqslant CB^{1+\beta/n} \sum_{\|\gamma\|\geqslant\rho} \|\gamma\|^{-n-\beta} \ll \rho^{-\beta}. \tag{5.9}$$

Оценка первого слагаемого закончена.

Оценим второе слагаемое (5.8). Положим $\gamma = N^{1/n}(\gamma)\xi(\gamma)$, где $\xi(\gamma) \in U$ (см. (4.3)). Вектор $\xi(\gamma)$ имеет гиперболические координаты $(1, \Phi)$, где $\Phi \in L$, (см. (3.6)). В этих обозначениях

$$\Omega'(\rho) = \sum_{N(\gamma)\leqslant b\rho^n, \|\gamma\|\geqslant\rho} [N(\gamma)]^{-1-\beta/n}\|\xi(\gamma)\|^{-\beta}. \tag{5.10}$$

Применим к этой сумме преобразование (5.2)–(5.3):

$$\Omega''(\rho) = \sum_{N(\gamma)\leqslant b\rho^n}^{*} N(\gamma)^{-1-\beta/n}\omega''(\rho, \xi(\gamma)), \tag{5.11}$$

где

$$\omega''(\rho,\xi) = \sum_{\|\sigma(\varepsilon)\xi\| \geqslant \frac{\rho}{N^{1/n}(\gamma)}} \|\sigma(\varepsilon)\xi\|^{-\beta}, \quad \xi \in U. \tag{5.12}$$

Суммирование в (5.12) ведется по единицам $\varepsilon \in U_M$. Сумму в (5.12) преобразуем следующим образом:

$$\omega''(\rho,\xi) = \sum \left[\frac{\ln^{r+\delta}(2+\|\sigma(\varepsilon)\xi\|)}{\|\sigma(\varepsilon)\xi\|^{\beta}}\right] \frac{1}{\ln^{r+\delta}(2+\|\sigma(\varepsilon)\xi\|)}$$

с той же областью суммирования, что и в (5.12). Теперь

$$\omega''(\rho,\xi) \leqslant \frac{\ln^{r+\delta}(2+\frac{\rho}{N^{1/n}})}{(\frac{\rho}{N^{1/n}})^{\beta}} \omega'''(\rho,\xi), \tag{5.13}$$

где $N = N(\gamma)$ и

$$\omega'''(\rho,\xi) = \sum_{\varepsilon \in U_M} \frac{1}{\ln^{r+\delta}(2+\|\sigma(\varepsilon)\xi\|)}. \tag{5.14}$$

В оценке (5.13) мы учли, что функция $x^{-\beta}\ln^{r+\delta}(2+x)$, где $\beta > n$, $1 > \delta > 0$, монотонно убывает при $x > 0$. Кроме того, мы расширили область суммирования по ε на всю группу единиц U_M.

Покажем, что сумма (5.14) равномерно ограничена по $\xi \in U$. Пользуясь гиперболическими координатами (4.6) и неравенством (4.7), получаем

$$\begin{aligned} \omega'''(\rho,\xi) &= \sum_{\lambda \in \Lambda_M} \ln^{-r-\delta}(2+e^{\frac{1}{4n}\|\lambda+\Phi\|}) \\ &\leqslant C \sum_{\lambda \in \Lambda_M} (1+\|\lambda+\Phi\|)^{-r-\delta} \end{aligned} \tag{5.15}$$

с постоянной C не зависящей от $\xi \in U$. В оценке (5.15) мы воспользовались элементарным неравенством $\ln(2+e^{bx}) \geqslant q(1+x)$, справедливым для всех $x > 0$ при любом фиксированном $b > 0$ с некоторой постоянной $q = q(b) > 0$.

В силу леммы 3.1 сумма ряда (5.15) по r-мерной решетке Λ_M равномерно ограничена для всех $\Phi \in L$. В результате для суммы (5.12) получаем оценку

$$\omega''(\rho,\xi) \leqslant \frac{\ln^{r+\delta}(2+\frac{\rho}{N^{1/n}})}{(\frac{\rho}{N^{1/n}})^{\beta}} \ll N^{\beta/n} \frac{\ln^{r+\delta}\rho}{\rho^{\beta}}.$$

Мы учли здесь, что $N = N(\gamma) \geqslant N(\Gamma_M) > 0$. Подставив полученную оценку в (5.11) и воспользовавшись неравенством (4.12) и леммой 3.1, получим

$$\begin{aligned} \Omega''(\rho) &= \rho^{-\beta}\ln^{r+\delta}\rho \sum_{0<N(\gamma)\leqslant b\rho^n}^{*} N^{-1}(\gamma) \ll \rho^{-\beta}\ln^{r+\delta}\rho \sum_{0<N(\gamma)\leqslant Bb\rho}^{*} \|\gamma\|^{-n} \\ &\ll \rho^{-\beta}\ln^{r+1+\delta}\rho. \end{aligned} \tag{5.16}$$

Оценка второго слагаемого закончена.

Складывая (5.9) и (5.16), получаем для суммы (5.6) следующую оценку

$$\Omega_2(\rho) \ll \rho^{-\beta} + \rho^{-\beta}\ln^{r+1+\delta} \ll \rho^{-\beta}\ln^{r+1+\delta}\rho.$$

Лемма 5.2 доказана.

§6. Доказательство теоремы 2.2

Области в $\mathbb{R}^n$, которые нас интересуют, это — полидиски, являющиеся в координатах (2.3) произведением s отрезков и t кругов

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}(P) = \prod_{v\in\mathfrak{N}^\infty} \mathcal{D}_v(p_v) \subset R^n, \tag{6.1}$$

где $\mathcal{D}_v(p_v) = \{x_v \in R^{n_v} \mid |x_v| \leqslant p_v\}$ — диск радиуса p_v в пространстве $\mathbb{R}^{n_v}$ с центром в начале ($n_v = 1$ либо 2), а $P = ((p_v)_{v\in\mathfrak{N}^\infty})$, $p_v \in \mathbb{R}_+$ — набор соответствующих радиусов. Объем области (6.1) равен

$$\operatorname{Vol}\mathcal{D}(P) = 2^s\pi^t \prod_{v\in\mathfrak{N}^\infty} p_v^{n_v}. \tag{6.2}$$

На множестве областей (6.1) удобно ввести следующую параметризацию. Пусть $\mu > 0$ и $\Phi = (\varphi_v)_{v\in\mathfrak{N}^\infty} \in L$ (см. (4.5)). Паре (μ, Φ) поставил в соответствие полидиск в $\mathbb{R}^n$

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}(\mu, \Phi) = \mu \prod_{v\in\mathfrak{N}^\infty} \mathcal{D}_v\Big(\exp\Big\{\frac{\varphi_v}{n_v}\Big\}\Big). \tag{6.3}$$

При этом справедливы формулы (см. (6.2))

$$\operatorname{Vol}\mathcal{D}(\mu, \Phi) = 2^s\pi^t\mu^n, \quad p_v = \mu\exp\Big\{\frac{\varphi_v}{n_v}\Big\}. \tag{6.4}$$

Благодаря инвариантности алгебраической решетки Γ_M относительно действия группы единиц U_M (см. (4.10)) имеет место такая формула для остатка (см. (2.16)):

$$R(\sigma(\varepsilon)\mathcal{D}(\mu, \Phi), \Gamma_M) = R(\mathcal{D}(\mu, \Phi + \lambda_\varepsilon), \Gamma_M), \tag{6.5}$$

где $(1, \lambda_\varepsilon)$ — гиперболические координаты (см. (4.6)) единицы ε.

Фиксируем некоторое ограниченное фундаментальное множество $\mathfrak{f}_M = L/\Lambda_M$ решетки $\Lambda_M \subset L$, см. (4.5), (4.8). Назовем область $\mathcal{D}(\mu, \Phi)$ приведенной, если $\Phi \in \mathfrak{f}_M$. Для любой приведенной области $\mathcal{D} = \mathcal{D}(\mu, \Phi)$, очевидно, выполняются следующие неравенства:

$$0 < Q_1 \leqslant \min_{v\in\mathfrak{N}^\infty}\Big(\exp\Big\{\frac{\varphi_v}{n_v}\Big\}\Big) \leqslant \max_{v\in\mathfrak{N}^\infty}\Big(\exp\Big\{\frac{\varphi_v}{n_v}\Big\}\Big) \leqslant Q_2. \tag{6.6}$$

Отсюда легко следуют следующие соотношения:

$$Q_1\mu \leqslant p_v \leqslant Q_2\mu \tag{6.7}$$

или в эквивалентной форме

$$Q_1'(\operatorname{Vol}\mathcal{D})^{1/n} \leqslant p_v \leqslant Q_2'(\operatorname{Vol}\mathcal{D})^{1/n}, \tag{6.8}$$

где положительные постоянные Q_1, Q_2, Q_1', Q_2' зависят только от конкретного выбора фундаментального множества $\mathfrak{f}_M$.

Равенство (6.5) показывает, что, доказывая теорему 2.2, можно, без потери общности, ограничиться рассмотрением только приведенных областей $\mathcal{D}(\mu,\Phi)$, $\Phi \in \mathfrak{f}_{M_r}$.

Воспользуемся теперь леммой 3.2. В качестве τ-коаппроксимации области $\mathcal{D}(\mu,\Phi)$ выберем следующие области:

$$\mathcal{D}_\tau^{\pm} = \mathcal{D}_\tau^{\pm}(\mu,\Phi) = \mathcal{D}(\mu \pm q\tau,\Phi) \tag{6.9}$$

с некоторым $q > 0$. Легко вычисляется расстояние между границами

$$\operatorname{dist}(\partial\mathcal{D}(\mu,\Phi),\partial\mathcal{D}_\tau^{\pm}(\mu,\Phi)) = rq \min_{v\in\mathfrak{N}^\infty}\left(\exp\left\{\frac{\varphi_v}{n_v}\right\}\right). \tag{6.10}$$

Положим $q = Q_1^{-1}$, где Q_1 — положительная постоянная из (6.6). При таком выборе q формула (6.9) определяет τ-коаппроксимацию, пригодную для всех приведенных областей. При этом из (6.4) следует такая оценка:

$$\begin{aligned}\operatorname{Vol}\mathcal{D}_\tau^{+}(\mu,\Phi) - \operatorname{Vol}\mathcal{D}_\tau^{-}(\mu,\Phi) &= 2^s\pi^t[(\mu+q\tau)^n - (\mu-q\tau)^n]\\ &\ll \mu^{n-1}\tau \ll \tau[\operatorname{Vol}\mathcal{D}(\mu,\Phi)]^{1-1/n},\end{aligned} \tag{6.11}$$

справедливая равномерно по всем приведенным областям.

Непосредственно вычисляется преобразование Фурье (3.4) характеристической функции области $\mathcal{D}(\mu,\Phi)$, в силу (6.1) оно равно произведению преобразований Фурье характеристических функций отрезков и кругов

$$\widetilde{\chi}(\mathcal{D},y) = \prod_{v\in\mathfrak{N}^\infty}\widetilde{\chi}(\mathcal{D}_v,y_v), \quad (y_v)_{v\in\mathfrak{N}^\infty} \in \mathbb{R}^n, \ y_v \in \mathbb{R}^{n_v}, \tag{6.12}$$

где

$$\widetilde{\chi}(\mathcal{D}_v,y_v) = \frac{\sin 2\pi p_v y_v}{\pi y_v}, \quad y_v \in \mathbb{R}^1, \tag{6.13}$$

если $\mathcal{D}_v$ — отрезок;

$$\widetilde{\chi}(\mathcal{D}_v, y_v) = 2\pi p_v \frac{J_1(2\pi p_v |y_v|)}{|y_v|}, \quad y_v \in \mathbb{R}^2, \tag{6.14}$$

если $\mathcal{D}_v$ — круг. Здесь $J_1(\cdot)$ — функция Бесселя порядка 1.

Поскольку при $z > 0$ имеет место оценка $J_1(z) < cz^{-1/2}$, из (6.12)–(6.14) непосредственно выводим неравенство

$$\widetilde{\chi}(\mathcal{D}, y) \leqslant C \prod_{v \in \mathfrak{N}^\infty} |y_v|^{-\frac{n_v+1}{2}} \prod_{v \in \mathfrak{N}^\infty} p_v^{\frac{n_v-1}{2}} = \prod_{j=1}^{t} p_j^{1/2} \prod_{j=1}^{s} \frac{1}{|y'_j|} \prod_{j=1}^{t} \frac{1}{|y''_j|^{3/2}}, \tag{6.15}$$

где $y = (y'_1, \dots, y'_s; y''_1, \dots, y''_t) \in \mathbb{R}^n$ (см. (2.3)).

Считая область $\mathcal{D}(\mu, \Phi)$ приведенной и пользуясь (6.7), (6.8), а также определением $N(x)$ (см. (4.1)), получаем из (6.15) оценку

$$|\widetilde{\chi}(\mathcal{D}(\mu, \Phi), y)| \ll \mu^{t/2} \frac{\|y\|^{t/2}}{N(y)} \ll [\operatorname{Vol} \mathcal{D}(\mu, \Phi)]^{\frac{t}{2n}} \frac{\|y\|^{t/2}}{N(y)}, \tag{6.16}$$

равномерную по всем приведенным областям.

Оценим суммы по двойственной решетке $\Gamma'_M = \Gamma_{M'}$ (см. (4.11)), участвующие в лемме 3.2. Упрощая обозначения, положим $\mathcal{D} = \mathcal{D}(\mu, \Phi)$, $\mathcal{D}_\tau^\pm = \mathcal{D}_\tau^\pm(\mu, \Phi)$. С учетом (6.16) и леммы 5.1 находим

$$\begin{aligned} &\sum_{0<\|\gamma\|<\rho} (|\widetilde{\chi}(\mathcal{D}_\tau^+, \gamma)| + |\widetilde{\chi}(\mathcal{D}_\tau^-, \gamma)|) \\ &\quad \ll (\mu + q\tau)^{t/2} \sum_{0<\|\gamma\|<\rho} \frac{\|\gamma\|^{t/2}}{N(\gamma)} \ll \mu^{t/2} \rho^{t/2} \Omega_1(\Gamma_{M'}, \rho) \\ &\quad \ll (\operatorname{Vol} \mathcal{D})^{\frac{t}{2n}} \rho^{t/2} \ln^{r+1} \rho. \end{aligned} \tag{6.17}$$

Аналогично с учетом (6.16) и леммы 5.2 находим при $a > t/2 + n$

$$\begin{aligned} &\tau^{-a} \sum_{\|\gamma\| \geqslant \rho} (|\widetilde{\chi}(\mathcal{D}_\tau^+, \gamma)| + |\widetilde{\chi}(\mathcal{D}_\tau^-, \gamma)|) \|\gamma\|^{-a} \\ &\quad \ll \tau^{-a} (\mu + q\tau)^{t/2} \sum_{\|\gamma\| \leqslant \rho} \frac{\|\gamma\|^{t/2-a}}{N(\gamma)} \ll \tau^{-a} \mu^{t/2} \Omega_2(\Gamma_{M'}, a - t/2, \rho) \\ &\quad \ll (\operatorname{Vol} \mathcal{D})^{\frac{t}{2n}} \tau^{-a} \rho^{t/2-a} \ln^{r+1+\delta} \rho. \end{aligned} \tag{6.18}$$

При этом оценки (6.17), (6.18) выполняются равномерно по всем приведенным областям.

Подставляя оценки (6.11), (6.17), (6.18) в неравенство леммы 3.2, находим следующую оценку для остатка:

$$R(\mathcal{D},\Gamma_M) \ll \tau(\operatorname{Vol}\mathcal{D})^{1-1/n} + (\operatorname{Vol}\mathcal{D})^{\frac{t}{2n}}\rho^{t/2}\ln^{r+1}\rho + (\operatorname{Vol}\mathcal{D})^{\frac{t}{2n}}\tau^{-a}\rho^{t/2-a}\ln^{r+1+\delta}\rho. \tag{6.19}$$

Легко убедиться, что для оптимизации правой части (6.19) по параметрам τ $(0<\tau\leqslant 1)$ и ρ $(\rho\to\infty)$ следует положить

$$\tau=\rho^{-1},\quad \rho=(\operatorname{Vol}\mathcal{D})^{\theta},\ \ \theta=\frac{2}{2+t}-\frac{1}{n},$$

что приводит к оценке теоремы 2.2. Теорема 2.2 доказана.

§7. Заключительные замечания, подсчет точек решетки в произведении областей

Внимательный анализ теорем 2.1 и 2.2 показывает, что эффект значительного понижения оценки остатка связан с тем, что рассматриваемые области разлагаются в произведение областей меньших размерностей (отрезков и кругов). Естественно исследовать эту задачу в общем случае произведения любых выпуклых областей. Приведем один результат в этом направлении, который получается простой модификацией изложенных выше рассуждений.

Пусть $\mathbb{E}_j$, $1\leqslant j\leqslant l$ — евклидовы пространства размерностей m_j; пусть $\mathcal{D}_j\subset\mathbb{E}_j$ — выпуклые ограниченные области. Если $m_j>1$, будем считать, что граница $\partial\mathcal{D}_j$ гладкая и имеет ненулевую гауссову кривизну. Мы будем рассматривать области $\mathcal{D}\subset\mathbb{R}^n$ следующего вида:

$$\mathcal{D}=\prod_{j=1}^{l}\mathcal{D}_l\subset\prod_{j=1}^{l}\mathbb{E}_j\simeq\mathbb{R}^n,\quad n=m_1+\dots+m_l. \tag{7.1}$$

Пусть $\Gamma_M\subset\mathbb{R}^n$ — алгебраическая решетка (2.5), соответствующая полному модулю M в поле k степени n. Будем говорить, что решетка Γ_M правильно расположена относительно области $\mathcal{D}$ вида (7.1), если для любого архимедова комплексного вложения σ_v образ поля $\sigma_v(k)$ целиком принадлежит одному из подпространств $\mathbb{E}_j$, $1\leqslant j\leqslant l$. Отметим, что для вполне вещественного поля k любая решетка Γ_M, $M\subset k$ всегда правильно расположена по отношению к любой области вида (7.1).

Теорема 7.1. *Пусть $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$ — декартово произведение l областей вида* (7.1), *а $\Gamma_M \subset \mathbb{R}^n$ — алгебраическая решетка* (2.5), *правильно расположенная относительно $\mathcal{D}$; пусть $\mu\mathcal{D}$ — растяжение $\mathcal{D}$ в $\mu > 0$ раз. Тогда при $\mu \to \infty$ справедлива оценка*

$$R(\mu, \mathcal{D}, \Gamma_M) \ll \mu^{\frac{n(n-l)}{n-l+2}} \ln^{s+t+\delta} \mu \tag{7.2}$$

с произвольно малым $\delta > 0$.

Доказательство теоремы 7.1 фактически повторяет рассуждения §6, лишь в формуле (6.12) следует заменить явные выражения (6.13) и (6.14) на известные асимптотические формулы (см. [4]) для преобразования Фурье характеристических функций строго выпуклых областей $\mathcal{D}_l$.

Заметим, что теорема 2.2 легко выводится из теоремы 7.1, поскольку решетки Γ_M правильно расположены относительно декартова произведения s отрезков и t кругов в (6.1).

Теорема 7.1 позволяет получить также широкий класс явных примеров зависимости поведения остатка $R(\mu\mathcal{D}, \Gamma)$ в асимптотике (2.2) от взаимного расположения области $\mathcal{D}$ и решетки Γ. Укажем лишь два возможных примера:

1. Пусть $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$ является произведением p единичных шаров B_m размерности $m \geqslant 2$. Из элементарных соображений получаем такую омега-оценку:

$$R(\mu, \mathcal{D}, \mathbb{Z}^n) = \Omega(\mu^{n-1}), \tag{7.3}$$

причем $n = pm$. А в случае алгебраической решетки Γ_M, правильно расположенной относительно $\mathcal{D}$, теорема 7.1 приводит к оценке

$$R(\mu\mathcal{D}, \Gamma_M) \ll \mu^{n-\frac{2n}{n-p+2}} \ln^{s+t+\delta} \mu. \tag{7.4}$$

Сравнение (7.3) с (7.4) показывает, что при $p > 2$ имеет место зависимость поведения остатка $R(\mu\mathcal{D}, \Gamma)$ от решетки Γ.

2. Пусть $\mathcal{D} = [0, 1] \times B_m$ — цилиндр размерности $n = m + 1$. Мы имеем здесь

$$R(\mu\mathcal{D}, \mathbb{Z}^n) = \Omega(\mu^{n-1}). \tag{7.5}$$

А для алгебраической решетки Γ_M, правильно расположенной относительно $\mathcal{D}$, из (7.2) получаем

$$R(\mu\mathcal{D}, \Gamma_M) \ll \mu^{n-2} \ln^{s+t+\delta} \mu. \tag{7.6}$$

Сравнение (7.5) и (7.6) показывает, что для цилиндра всегда имеет место зависимость поведения остатка $R(\mu\mathcal{D}, \Gamma)$ от решетки Γ.

В заключение отметим, что было бы интересно исследовать возможность дальнейшего уточнения оценки (7.2).

Список литературы

[1] Боревич З. И., Шафаревич И. Р., *Теория чисел*, Изд. 3-е, Наука, М., 1985.

[2] Goldstein L. J., *Analytic number theory*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1971.

[3] Gruber P. M., Lekkerkerker C. G., *Geometry of numbers*, North-Holland Publishing Co., Amsterdam–New York, 1987.

[4] Hlawka E., *Über Integrale auf konvexen Körpen.* I, Monatsh. Math. **54** (1950), 1–36.

[5] Huxley M. N., *Exponential sums and lattice points.* II, Proc. London Math. Soc. (3) **66** (1993), 273–301.

[6] Krätzel E., *Lattice points*, Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1988.

[7] Ленг С., *Алгебраические числа*, Мир, М., 1966.

[8] Nikichine N. A., Skriganov M. M., *Nombre de points d'un réseau dans un produit cartésien de domaines convexes*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. 1 Math. **321** (1995), 671–675.

[9] Скриганов М. М., *Решетки в полях алгебраических чисел и равномерные распределения по* mod 1, Алгебра и анализ **1** (1989), № 2, 207–228.

[10] Skriganov M. M., *Constructions of uniform distributions in terms of geometry of numbers*, Алгебра и анализ **6** (1994), № 3, 200-230.

[11] Скриганов М. М., *Эргодическая теория на однородных пространствах и подсчет точек решетки в многогранниках*, Докл. РАН **355** (1997), № 5, 609–611.

[12] Skriganov M. M., *Ergodic theory on $SL(n)$, diophantine approximations and anomalies in the lattice point problem*, Invent. Math. (1998 to appear).

Université de Marne-La-Vallée,
2, rue de la Butte-Verte,
93166 Noisy-Le-Grand Cedex,
France

E-mail: nikichin@mathp7.jussieu.fr

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН,
191011, Санкт-Петербург,
наб. р. Фонтанки, 27,
Россия

E-mail: skrig@pdmi.ras.ru

Поступило 28 августа 1996 г.