ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

ЯНВАРЬ 1989 г., ТОМ 25, № 1

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.956.227

Б. Т. БИЛАЛОВ

БАЗИСНОСТЬ НЕКОТОРЫХ СИСТЕМ ФУНКЦИЙ

Работа посвящена изучению базисности в $\mathcal{L}_p(0, \pi)$ следующих систем функций:

$$\{A(t)\exp(int) - B(t)\exp(-int)\}_{n=1}^{\infty}, \tag{1}$$

$$\{\sin(nt - \gamma(t))\}_{n=1}^{\infty}, \tag{2}$$

где $A(t) = |A(t)|\exp(i\alpha(t))$, $B(t) = |B(t)|\exp(i\beta(t))$ — комплекснозначные функции, причем $\alpha(t)$, $\beta(t)$ и $\gamma(t)$ — кусочно-гёльдеровы функции на $[0, \pi]$, функция $\gamma(t)$ допускает бесконечное число точек разрыва первого рода. В связи со спектральной теорией дифференциальных операторов такого рода системы рассматривались в работах А. В. Бицадзе [1], С. М. Пономарева [2]. В работах Е. И. Моисеева [3, 4] найдены необходимые и достаточные условия на функцию $\gamma(t)$ в линейном случае, при которых система синусов образует базис пространства $\mathcal{L}_p(0, \pi)$, $1<p<+\infty$. В работе Г. Г. Девдариани [5] доказано, что подобные условия достаточны для того, чтобы система $\sin(nt-\gamma(t))$, $n=1, 2, \ldots$, являлась базисом в $\mathcal{L}_p(0, \pi)$, $1<p<+\infty$, когда $\gamma(t)$ — комплекснозначная, гёльдерова функция на отрезке $[0, \pi]$. Необходимые и достаточные условия полноты системы (1) были найдены А. Н. Барменковым [6] в $\mathcal{L}_p(0, \pi)$, когда функции $\alpha(t)$ и $\beta(t)$ из класса Гёльдера $C^{\alpha}[0, \pi]$, $0<\alpha\leqslant 1$.

Более того, будем рассматривать систему (2) в случае, когда $\gamma(t)$ — непрерывная, вещественная функция ограниченной вариации на отрезке $[0, \pi]$. Этот случай в указанных работах не рассматривается.

Пусть функции $|A(t)|$, $|B(t)|$ из класса Гёльдера $C^{\alpha}[0, \pi]$, $0<\alpha\leqslant 1$, и удовлетворяют следующему условию:

$$\max_{0\leqslant\theta\leqslant\pi}\{|A(t)|^{\pm 1},\ |B(t)|^{\pm 1}\}\leqslant M<+\infty.$$

Пусть множества точек разрыва первого рода на отрезке $[0, \pi]$ кусочно-гёльдеровых функций $\alpha(t)$ и $\beta(t)$ соответственно $\{t_k\}_1^m$ и $\{\tau_k\}_1^n$. Перенумеруем по возрастанию элементы множества $\{t_k\}_1^m \cup \{\tau_k\}_1^n$ и обозначим через $\{s_k\}_1^r$, $0<s_1<\cdots<s_r<\pi$.

Пусть при некотором целом n и p, $1<p<+\infty$, $1/p+2(n-1)<(\beta(0)-\alpha(0))/\pi<1/p+2n$, и для любых целых k имеют место следующие условия: $\beta(s_i-0)-\beta(s_i+0)+\alpha(s_i+0)-\alpha(s_i-0)\neq -2\pi/p+2\pi k$, $i=\overline{1, r}$. Определим целые числа n_i, $i=\overline{1, r}$, из следующих условий:

$$-2\pi/p<\beta(s_i-0)-\beta(s_i+0)+\alpha(s_i+0)-\alpha(s_i-0)+(n_i-n_{i-1})2\pi<2\pi/q, \tag{3}$$

$$i=\overline{1, r},\ n_0=n,\ 1/p+1/q=1.$$

Теорема 1. *Пусть число n_r определяется из условий (3) и при этом $\beta(\pi)-\alpha(\pi)\neq-\pi/p+2n_r\pi$. Тогда система (1) образует базис в $\mathcal{L}_p(0, \pi)$ тогда и только тогда, когда $-1/p+2n_r<(\beta(\pi)-\alpha(\pi))/\pi<-1/p+2(n_r+1)$; если же $\beta(\pi)-\alpha(\pi)<-\pi/p+2n_r\pi$, то система (1) неполна в $\mathcal{L}_p(0, \pi)$, но минимальна; при $\beta(\pi)-\alpha(\pi)\geqslant-\pi/p+2\pi(n_r+1)$ полна в $\mathcal{L}_p(0, \pi)$, но неминимальна, причем если $\beta(\pi)-\alpha(\pi)=-\pi/p+2\pi n_r$, то система (1) полна и минимальна в $\mathcal{L}_p(0, \pi)$.*

Пусть $\gamma(t)$ — действительная, кусочно-гёльдерова функция на отрезке $[0, \pi]$, где сходящаяся последовательность $\{s_i\}_1^{\infty}$ — точки разрыва первого рода на $(0, \pi)$, причем предельная точка $s\in(0, \pi)$ и

$$\sum_{i=1}^{\infty}|\gamma(s_i+0)-\gamma(s_i-0)|<+\infty. \tag{4}$$

Пусть для любых целых k выполняются следующие условия: $\gamma(s_i-0)-\gamma(s_i+0)\neq-\pi/p+k\pi$, $i=\overline{1,\infty}$, и при некотором целом n и p, $1<p<+\infty$, $\pi/2p+(n-1)\pi<\gamma(0)<\pi/2p+n\pi$. Обозначим через r номер, после которого выполняются условия

$$-\pi/p<\gamma(s_k-0)-\gamma(s_k+0)<\pi/q, \qquad (5)$$

$$k=\overline{r,\infty},\ 1/p+1/q=1.$$

Перенумеруем элементы множества $\{s_i\}_1^r$ по возрастанию и обозначим через $\{t_k\}_1^r$. Определим целые числа n_i, $i=\overline{1,r}$, из следующих условий:

$$-\pi/p<\gamma(t_i-0)-\gamma(t_i+0)+(n_i-n_{i-1})\pi<\pi/q,$$
$$i=\overline{1,r},\ n_0=n,\ 1/p+1/q=1. \qquad (6)$$

Теорема 2. *Пусть относительно кусочно-гёльдеровой функции $\gamma(t)$ справедливо условие (4) и число n_r определяется из условий (5) и (6). Пусть при этом $\gamma(\pi)\neq-\pi/2p+n_r\pi$. Тогда система (2) образует базис в $\mathscr{L}_p^r(0,\pi)$ тогда и только тогда, когда $-\pi/2p+n_r\pi<\gamma(\pi)<-\pi/2p+(n_r+1)\pi$; если же $\gamma(\pi)<-\pi/2p+n_r\pi$, то система (2) неполна в $\mathscr{L}_p(0,\pi)$, но минимальна; при $\gamma(\pi)\geqslant-\pi/2p+(n_r+1)\pi$ полна, но неминимальна, причем если $\gamma(\pi)=-\pi/2p+n_r\pi$, то система (2) полна и минимальна.*

Доказательства этих теорем опираются на решение задачи сопряжения теории аналитических функций (см. [7]).

Отдельно рассмотрим случай, когда в системе (2) $\gamma(t)$ — непрерывная функция ограниченной вариации.

Теорема 3. *Пусть $\alpha(t)$ — непрерывная, действительная функция ограниченной вариации на отрезке $[0,\pi]$. Пусть при некотором целом n и p, $1<p<+\infty$, $\pi/2p+(n-1)\pi<\alpha(0)<\pi/2p+n\pi$, и при этом $\alpha(\pi)\neq-\pi/2p+n\pi$. Тогда система синусов $\sin(nt-\alpha(t))$, $n=\overline{1,\infty}$, образует базис в $\mathscr{L}_p(0,\pi)$ тогда и только тогда, когда (при $p=2$ базис Рисса) $-\pi/2p+n\pi<\alpha(\pi)<-\pi/2p+(n+1)\pi$; если же $\alpha(\pi)<-\pi/2p+n\pi$, то система неполна в $\mathscr{L}_p(0,\pi)$, но минимальна; при $\alpha(\pi)\geqslant-\pi/2p+(n+1)\pi$ полна, но неминимальна, причем если $\alpha(\pi)=-\pi/2p+n\pi$, то система полна и минимальна.*

Доказательство этой теоремы использует решение задачи сопряжения в классах Харди H_p (см. [8]).

Замечание 1. Теорему 2 можно доказать и в случае, когда множества $\{s_i\}$ имеют конечное число предельных точек.

Замечание 2. Утверждение теорем 2 и 3 справедливы и в случаях, когда $\gamma(t)$ и $\alpha(t)$ — комплекснозначные функции.

Замечание 3. Пусть функции $\alpha(t)$ и $\beta(t)$ из класса Гёльдера $C^\alpha[0,\pi]$, $0<\alpha\leqslant1$, на отрезке $[0,\pi]$ и при некотором целом n и $p=2$ $-\pi/p+2(n-1)\pi<\beta(0)-\alpha(0)<-\pi/p+2n\pi$, и при этом $\beta(\pi)-\alpha(\pi)\neq-\pi/2+2n$. Тогда система (1) является базисом Рисса в $\mathscr{L}_2(0,\pi)$ тогда и только тогда, когда $-\pi/2+2n\pi<\beta(\pi)-\alpha(\pi)<-\pi/2+2(n+1)\pi$.

Это следует непосредственно из теоремы 1.

В частности, из теорем 1, 2 следуют необходимые и достаточные условия для полноты и минимальности систем (1) и (2) в пространстве $\mathscr{L}_p(0,\pi)$.

Автор выражает глубокую благодарность Е. И. Моисееву за постановку задачи и внимание к работе.

Литература

1. Бицадзе А. В. // Успехи мат. наук. 1950. Т. 5, вып. 4(38). С. 150—151.
2. Пономарев С. М. // Докл. АН СССР. 1979. Т. 249, № 5. С. 1068—1070.
3. Моисеев Е. И. // Докл. АН СССР. 1984. Т. 275, № 4. С. 794—798.
4. Моисеев Е. И. // Дифференц. уравнения. 1987. Т. 23, № 1. С. 177—179.
5. Девдариани Г. Г. // Тр. Ин-та прикл. мат. им. И. Н. Векуа. Тбилиси, 1987. Т. 19. С. 26—36.
6. Барменков А. Н. Об аппроксимированных свойствах некоторых систем функций: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. М., 1983.
7. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. М., 1968.
8. Данилюк И. И. Лекции по краевым задачам для аналитических функций и сингулярным интегральным уравнениям. Новосибирск, 1964.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Поступила в редакцию 8 августа 1988 г.