ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1981 МАТЕМАТИКА № 9 (232)

Б. Н. Шапуков УДК 514

СТРУКТУРА ТЕНЗОРНЫХ РАССЛОЕНИЙ, II

Здесь будет показано, что с тензорной структурой на тензорном расслоении, рассмотренной в первой части работы [1], естественным образом связана структура более общего типа, которая относится к классу почти алгебраических структур [2]. Обобщение этой ситуации приводит к понятию почти алгебраической структуры на векторном расслоении, определяемой заданным представлением некоторой ассоциативной алгебры.

§ 5. Почти алгебраическая структура на $E^p(M)$

В основу построения почти алгебраической структуры на тензорном расслоении типа $\binom{p}{0}$ положим алгебру RS_p операторов симметрии на V, определенную в [1] (§ 4). Чтобы перейти к пространству $E^p(M)$, мы заменим ее изоморфной алгеброй RS_p^v, операторы которой в адаптированном репере имеют матрицы

$$A^V = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}, \tag{5.1}$$

где $A \in RS_p$. Таким образом, RS_p^v реализует вырожденное представление исходной групповой алгебры. Изоморфизм $A \to A^V$ будем называть *вертикальным лифтом*. Легко проверить, что $(Ax_2)^V = A^V x_2^V$ для любого $x_2 \in V$. Заметим также, что аффиноры A^V являются вертикальными по обоим своим индексам в смысле [1] (§ 2), что в инвариантой форме эквивалентно условиям $FA^V = A^V F = -A^V$.

Рассмотрим множество адаптированных реперов на $E^p(M)$, относительно которых матрицы аффиноров (5.1) остаются постоянными. Такие реперы образуют главное расслоение над $E^p(M)$, структурная группа G которого состоит из всех невырожденных N-матриц, коммутирующих с этими аффинорами. Легко видеть, что указанные матрицы имеют вид

$$f = \begin{pmatrix} f_1 & 0 \\ 0 & f_2 \end{pmatrix}, \tag{5.2}$$

где $[f_2 S] = 0$ для любого $S \in S_p$. Таким образом, $G = GL(m) \times Q$, где Q есть максимальная группа матриц, содержащаяся в коммутаторной алгебре $\overline{RS}_p$ и образованная всеми невырожденными бисимметричными операторами.

Расслоение $B(E^p, G)$ определяет на $E^p(M)$ G-структуру в смысле определения, данного в [1] (§ 1), подчиненную структуре почти произведения и, вообще говоря, неинтегрируемую. В соответствии с терминологией работы [2], будем называть ее *почти алгебраической структурой, определяемой алгеброй* $\overline{RS}_p$.

Инфинитезимальная связность расслоения $B(E^p, G)$ порождает на $E^p(M)$ вполне приводимую *почти алгебраическую линейную связность*, вертикальная матричная 1-форма которой ω_2, отнесенная к G-реперу, принимает значения в алгебре[1] $\overline{RS}_p$ и поэтому $[\omega_2 S] = 0$. Отсюда следует, что для любого $S \in S_p$ выполняется условие

$$\nabla S^V = 0 \tag{5.3}$$

[1] Точнее, в алгебре Ли, ассоциированной с алгеброй $\overline{RS}_p$.

и, следовательно, указанная связность сохраняет почти алгебраическую структуру. Обратно, если для какой-либо линейной связности на $E^p(M)$ со структурой почти произведения имеет место (5.3), то форма этой связности на подрасслоении G-реперов удовлетворяет условию $[\omega S^V]=0$, откуда $[\omega_2 S]=0$ и, следовательно, $\omega_2 \in \overline{RS}_p$. Мы приходим, таким образом, к следующему выводу.

Теорема 11. *Почти алгебраическая связность есть наиболее общая линейная связность на тензорном расслоении $E^p(M)$ со структурой почти произведения, относительно которой аффиноры S ковариантно постоянны.*

Поскольку доказательство теоремы 10 в [1] использует лишь ковариантное постоянство проектирующих аффиноров $I_k \in RS_p^V$, то имеет место

Теорема 12. *Неприводимые подрасслоения $\underset{k}{E^p}(M)$ замкнуты относительно ковариантного дифференцирования в любой почти алгебраической связности.*

Как известно [6], форма кривизны любой вполне приводимой связности в адаптированном репере распадается на пару матричных 1-форм $\Omega_1=(\Omega_j^i)$ и $\Omega_2=(\Omega_\beta^\alpha)$, где, в частности, $\Omega_2=d\omega_2+\omega_2\wedge\omega_2$. Если связность почти алгебраическая, получим $[\Omega_2 S]=0$, т. е. $\Omega_2\in\overline{RS}_p$. Ее вертикальные тензоры кривизны удовлетворяют, следовательно, соотношениям

$$R^\alpha_{\sigma AB}\, S^\sigma_\beta = S^\alpha_\sigma R^\sigma_{\beta AB}\,.$$

К этим же соотношениям можно придти, рассматривая условия интегрируемости уравнений (5.3).

Поскольку алгебра $\overline{RS}_p$ вполне приводима, G-реперы в каждой точке можно выбрать таким образом, чтобы их вертикальные векторы e_α были отнесены к разложению $V=V_1\oplus\ldots\oplus V_d$. Такие реперы назовем *каноническими*. Тогда матрицы операторов $U_2\in\overline{RS}_p$ приведутся к блочно-диагональному виду, который не изменяется под действием группы Q

$$U_2=\begin{pmatrix} U_{21} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & U_{2d}\end{pmatrix}.$$

Здесь U_{2k} принадлежат неприводимым компонентам алгебры $\overline{RS}_p$. Отсюда следует

Теорема 13. *Матричная форма всякой почти алгебраической связности в каноническом репере приводится к виду*

$$\omega=\begin{pmatrix} \omega_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \omega_{21} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \omega_{2d}\end{pmatrix}, \tag{5.4}$$

инвариантному относительно группы G.

Добавим к этому, что

$$\tilde{\omega}_k=\begin{pmatrix} \omega_1 & 0 \\ 0 & \omega_{2k}\end{pmatrix}, \tag{5.5}$$

где $k=1,2,\ldots,d$, являются, очевидно, формами вполне приводимых связностей, которые индуцируются почти алгебраической связностью на неприводимых тензорных подрасслоениях $\underset{k}{E^p}(M)$. Размерности этих подрасслоений можно подсчитать, исходя из следующих соображений. В каноническом репере матрицы идемпотентных операторов I_k имеют вид

$$I_k = \begin{bmatrix} 0 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & E_{n_k} & \\ & & & \ddots \\ 0 & & & 0 \end{bmatrix},$$

где E_{n_k}—единичный диагональный блок размера $n_k = \dim V_k$ $(k = 1, 2, \ldots, d)$. Отсюда, согласно (4.4), следует, что

$$\dim V_k = \operatorname{tr} I_k = \sum_s \lambda_k(s)\, S^\sigma_\sigma = \sum_s \lambda_k(s)\, h^\sigma_{(a)}\, h^{s\,(a)}_\sigma .$$

Но $h^\sigma_{(a)}\, h^{s\,(a)}_\sigma = \delta^{s\,(a)}_{(a)} = \delta^{a_{s\,(1)}}_{a_1} \ldots \delta^{a_{s\,(p)}}_{a_p}$, и если подстановка s разлагается на t_s циклов, то, как нетрудно заметить, правая часть равна n^{t_s}. Следовательно, $\dim V_k = \sum_s \lambda_k(s)\, n^{t_s}$. Таким образом, приходим к формуле

$$\dim \underset{k}{E^p}(M) = m + \sum_s \lambda_k(s)\, n^{t_s}. \tag{5.6}$$

Пример. Рассмотрим расслоение $E^3(M)$ контравариантных тензоров третьей валентности. Его структура определяется симметрической группой $S_3 = \{1, (12), (13), (23), (123), (132)\}$, групповая алгебра которой распадается в прямую сумму четырех правых минимальных идеалов размерностей 1, 2, 2, 1, порожденных соответственно примитивными идемпотентами[1)]

$$i_1 = \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{6} s_k, \quad i_2 = \frac{1}{3}(s_1 + s_2 - s_3 - s_6),$$

$$i_3 = \frac{1}{3}(s_1 - s_2 + s_3 - s_5), \quad i_4 = \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{6} \varepsilon_k s_k,$$

где $\varepsilon_k = \pm 1$ в зависимости от четности подстановки. Представление этой алгебры в T^3_0 задается равенствами

$$(s_1 w)^{ijk} = w^{ijk}, \quad (s_2 w)^{ijk} = w^{jik}, \quad (s_3 w)^{ijk} = w^{kji},$$

$$(s_4 w)^{ijk} = w^{ikj}, \quad (s_5 w)^{ijk} = w^{jki}, \quad (s_6 w)^{ijk} = w^{kij}.$$

Следовательно, разложение T^3_0 в прямую сумму неприводимых подпространств будет следующее:

$$(i_1 w)^{ijk} = w^{(ijk)}, \quad \dim \underset{1}{T^3_0} = (n/6)(n^2 + 3n + 2),$$

$$(i_2 w)^{ijk} = (2/3)(w^{(ij)\,k} - w^{k\,(ij)}), \quad \dim \underset{2}{T^3_0} = n(n^2 - 1)/3,$$

$$(i_3 w)^{ijk} = (2/3)(w^{[ij]\,k} + w^{[kj]\,i}), \quad \dim \underset{3}{T^3_0} = n(n^2 - 1)/3,$$

$$(i_4 w)^{ijk} = w^{[ijk]}, \quad \dim \underset{4}{T^3_0} = (n/6)(n^2 - 3n + 2).$$

Соответственно этому происходит разложение расслоения $E^3(M)$ в прямую сумму неприводимых тензорных подрасслоений указанных типов симметрии. В каноническом репере, отнесенном к этому разложению, почти алгебраическая связность распадется на вполне приводимые связности самого общего вида с матричными 1-формами (5.5) $(k = 1, 2, 3, 4)$. Размеры блоков ω_{2k} указаны выше.

---

1) Идемпотенты i_2, i_3 определяются неоднозначно и порождают изоморфные идеалы.

Заметим, что рассмотренное представление будет точным лишь при $n \geqslant 3$. При $n=2$ алгебра RS_3 изоморфна сумме лишь трех первых минимальных идеалов. В этом случае $\underset{4}{T_0^3}=\{0\}$, $\widetilde{\omega}_4=\omega_1$. При $n=1$, кроме того, $\underset{2}{T_0^3}=\{0\}$, $\underset{3}{T_0^3}=\{0\}$, а действие группы $GL(1)$ сводится к гомотетии.

§ 6. Редукция к подгруппе $G(V)$

Почти алгебраическая структура является структурой более общего типа, чем рассмотренная нами в [1] (§ 3) тензорная структура, определяемая группой $G(V)$. Так как операторы последней $f_2=\overset{p}{\otimes} f_1$ также коммутируют с операторами S, то $G(V)\subset Q$. Возникает поэтому вопрос о нахождении условий, выделяющих подгруппу $G(V)$. Ответ на него дает следующая

Теорема 14. *Бисимметричный оператор $f_2 \in Q$ принадлежит подгруппе $G(V)$ тогда и только тогда, когда он сохраняет ранг произвольного опорного тензора по какому-либо его индексу.*

Доказательству подлежит, очевидно, лишь достаточность этой теоремы. Пусть ранг опорного тензора $w^{(a)}=w^{a_1\ldots a_p}$ по какому-либо индексу a_i $(i=1,\ldots,p)$ равен r_i. Это значит [3], что вектор

$$v^{a_i}=w^{a_1\ldots a_p}\underset{1}{u}_{a_1}\ldots\underset{i}{\hat{u}}_{a_i}\ldots\underset{p}{u}_{a_p}$$

при произвольном изменении ковекторов $\underset{1}{u},\ldots,\underset{i-1}{u},\underset{i+1}{u},\ldots,\underset{p}{u}$ описывает подпространство $L\subset R_m$ размерности r_i (крышка здесь и далее означает, что соответствующий сомножитель или индекс следует опустить). Выбрав в качестве $\underset{k}{u}$ всевозможные базисные ковекторы, L можно рассматривать как линейную оболочку n^{p-1} векторов

$$v^{a_i}(a_1\ldots\hat{a}_i\ldots a_p)=w^{a_1\ldots a_i\ldots a_p}, \tag{6.1}$$

каждый из которых получается при фиксации индексов, заключенных в скобки.

Пусть $f_2\in Q$—произвольный бисимметричный оператор с компонентами $f^{(a)}_{(b)}=f^{a_1\ldots a_p}_{b_1\ldots b_p}$. Ранг тензора $w'^{(a)}=f^{(a)}_{(b)}w^{(b)}$ по i-му индексу будет равен $r'_i=\dim L'$, где L' есть линейная оболочка, натянутая на векторы

$$v'^{a_i}(a_1\ldots\hat{a}_i\ldots a_p)=f^{a_1\ldots a_i\ldots a_p}_{(b)}w^{(b)}. \tag{6.2}$$

Предположим, что $r'_i=r_i$. Тогда в R_m существует линейный оператор $f_1\in GL(m)$, преобразующий L в L'. Заметим, что он определяется с точностью до преобразований стационарной подгруппы $GL(r_i)$ пространства L. Разлагая векторы (6.2) в линейную комбинацию по векторам $f_1v(a_1\ldots\hat{a}_i\ldots a_p)$, получим

$$f^{(a)}_{(b)}w^{(b)}=\underset{1}{\lambda}{}^{a_1\ldots\hat{a}_i\ldots a_p}_{b_1\ldots\hat{b}_i\ldots b_p}w^{(b)},$$

откуда в силу произвольности опорного тензора

$$f^{(a)}_{(b)}=\underset{1}{\lambda}{}^{a_1\ldots\hat{a}_i\ldots a_p}_{b_1\ldots\hat{b}_i\ldots b_p}f^{a_i}_{b_i}.$$

Используем теперь бисимметрию этого оператора. Для любой пары номеров $i\neq j$ должно быть

$$f^{a_i}_{b_i}\underset{1}{\lambda}{}^{a_1\ldots\hat{a}_i\ldots a_p}_{b_1\ldots\hat{b}_i\ldots b_p}=f^{a_j}_{b_j}\underset{1}{\lambda}{}^{a_1\ldots\hat{a}_j\ldots a_p}_{b_1\ldots\hat{b}_j\ldots b_p},$$

что влечет сохранение ранга тензора w по любому его индексу. Так как $\det f_1 \neq 0$, для коэффициентов $\underset{1}{\lambda}$ получаем выражение

$$\underset{1}{\lambda}{}^{a_1 \dots \hat{a}_i \dots a_p}_{b_1 \dots \hat{b}_i \dots b_p} = \underset{2}{\lambda}{}^{a_1 \dots \hat{a}_i \dots \hat{a}_j \dots a_p}_{b_1 \dots \hat{b}_i \dots \hat{b}_j \dots b_p} f^{a_j}_{b_j},$$

и, следовательно,

$$f^{(a)}_{(b)} = \underset{2}{\lambda}{}^{a_1 \dots \hat{a}_i \dots \hat{a}_j \dots a_p}_{b_1 \dots \hat{b}_i \dots \hat{b}_j \dots b_p} f^{a_i}_{b_i} f^{a_j}_{b_j}.$$

Повторяя описанную процедуру, получим

$$f^{(a)}_{(b)} = f^{a_1}_{b_1} \dots \lambda^{a_k}_{b_k} \dots f^{a_p}_{b_p}.$$

Вследствие бисимметрии этого оператора $\lambda^{a_k}_{b_k} = \lambda f^{a_k}_{b_k}$ и, таким образом,

$$f^{(a)}_{(b)} = \lambda f^{a_1}_{b_1} \dots f^{a_p}_{b_p}.$$

В силу отмеченного выше произвола в выборе f_1 можно считать, что $\lambda = 1$. Теорема доказана.

Приведение почти алгебраической связности к подгруппе $G_\varphi = GL(m) \times G(V)$ дает *связность Б. Л. Лаптева* ([1], § 3). Так как в рассматриваемом случае алгебра Ли $g(V)$ образована операторами

$$U_2 = \sum_1^p E_1 \otimes \dots \otimes U_1 \otimes \dots \otimes E_1,$$

то вертикальная 1-форма этой связности имеет вид

$$\omega_2 = \sum_1^p E_1 \otimes \dots \otimes \omega_1 \otimes \dots \otimes E_1. \tag{6.3}$$

Как уже отмечалось [1], ее характерным свойством является ковариантное постоянство смешанного тензора $h^\alpha_{(a)}$. Так как $S^\alpha_\beta = h^\alpha_{(a)} h^{s\,(a)}_\beta$, условия (5.3) выполняются теперь автоматически.

§ 7. Почти алгебраическая структура на $E^p_q(M)$

Перейдем к рассмотрению тензорного расслоения общего типа $E^p_q(M)$, считая при этом, что $p > 0$, $q > 0$. Пусть s_p, s_q—симметрические группы подстановок, действующие соответственно в пространствах T^p_0 и T^0_q контравариантных и ковариантных тензоров по правилу

$$(\sigma w_1)^{(a)} = w_1^{\sigma\,(a)}, \quad (\tau w_2)_{(i)} = \underset{2}{w}_{\tau^{-1}\,(i)},$$

где $\sigma \in s_p$, $\tau \in s_q$. Тогда в $T^p_q = T^p_0 \otimes T^0_q$ порождается представление конечной группы $s_{p,q} = s_p \times s_q$

$$s(w_1 \otimes w_2) = \sigma w_1 \otimes \tau w_2, \quad s = (\sigma, \tau) \in s_{p,q}$$

—тензорное произведение исходных представлений. В координатах имеем

$$(sw)^{(a)}_{(i)} = w^{\sigma\,(a)}_{\tau^{-1}\,(i)}. \tag{7.1}$$

Переходя к векторному расслоению, свернем обе части этого равенства с компонентами $h^{\alpha\,(i)}_{(a)}$. Тогда вследствие (3.3) получим

$$\tilde{x}^\alpha = S^\alpha_\beta x_\beta, \quad S^\alpha_\beta = h^{\alpha\,(i)}_{(a)} h^{\sigma\,(a)}_{\tau^{-1}\,(i)\,\beta}. \tag{7.2}$$

Итак, мы пришли к представлению $\rho: s_{p,q} \to GL(n)$ группы $s_{p,q}$ в виде группы $S_{p,q}$ линейных операторов, действующих на V. Заметим, что $S_{p,q}$ распадается в прямое произведение инвариантных подгрупп S_p и S_q с операторами

$$\sigma^{\alpha}_{\beta} = h^{\alpha(i)}_{(a)} h^{\sigma(a)}_{(i)\beta}, \quad \tau^{\alpha}_{\beta} = h^{\alpha(i)}_{(a)} h^{(a)}_{\tau^{-1}(i)\beta},$$

так что

$$S = \sigma\tau = \tau\sigma.$$

Полученное представление можно теперь обычным образом расширить до групповой алгебры $RS_{p,q} = RS_p \otimes RS_q$, ассоциативной и полупростой, операторы которой $A = \sum_s \lambda(s) S$ будем по-прежнему называть операторами симметрии.

Рассмотрим далее коммутаторную алгебру $\overline{RS}_{p,q}$. Нетрудно проверить, что $U_2 \in \overline{RS}_{p,q}$ лишь в том случае, если его тензорные компоненты при любых $\sigma \in s_p$, $\tau \in s_q$ удовлетворяют *условию бисимметрии*

$$U^{\sigma(a)\tau(j)}_{\sigma(b)\tau(i)} = U^{(a)(j)}_{(b)(i)}. \tag{7.3}$$

Почти алгебраическую структуру на $E^p_q(M)$ можно теперь ввести тем же путем, что и в § 5. Эта структура определяется группой $G = GL(m) \times Q$, где Q—максимальная группа обратимых операторов алгебры $\overline{RS}_{p,q}$. Аналогично определяется и почти алгебраическая связность как вполне приводимая связность на $E^p_q(M)$, порожденная указанной структурой. Теоремы (11)—(13) остаются справедливыми и в этом случае. Так как алгебра $RS_{p,q}$ вполне приводима, то это же имеет место и для ее коммутаторной алгебры. Это приводит к разложению расслоения $E^p_q(M)$ на $\overline{RS}_{p,q}$-неприводимые компоненты

$$E^p_q(M) = \underset{1}{E^p_q}(M) \otimes \ldots \otimes \underset{d}{E^p_q}(M). \tag{7.4}$$

Однако существенной особенностью рассматриваемого случая является то, что теперь теорема Г. Вейля ([1], § 4, теорема 8) уже не имеет места.

Теорема 15. *Обертывающая алгебра $RG(T^p_q)$ операторов тензорного представления при $p>0$, $q>0$ является нетривиальной подалгеброй в алгебре всех бисимметричных операторов.*

Действительно, операторы $f_2 = \overset{p}{\otimes} f_1 \overset{q}{\otimes} \hat{f}_1$ тензорного представления $G(T^p_q)$ бисимметричны. Этим же свойством обладают и операторы обертывающей алгебры

$$U_2 = \sum_{f_1} \lambda(f_1)(\overset{p}{\otimes} f_1 \overset{q}{\otimes} \hat{f}_1), \quad \lambda \in R. \tag{7.5}$$

Поэтому $RG(T^p_q) \subset \overline{RS}_{p,q}$. Но, кроме того, (7.5) должны удовлетворять дополнительным условиям, вытекающим из соотношения $f_1 \hat{f}_1 = E_1$. Если тензорные компоненты этого оператора

$$U^{(a)(j)}_{(b)(i)} = \sum_{f_1} \lambda(f_1) \underset{p}{f^{(a)}_{(b)}} \underset{q}{\hat{f}^{(j)}_{(i)}}$$

свернуть по какой-либо паре разнотипных индексов $b_k \in (b)$, $j_m \in (j)$, то для частичного следа получим

$$\operatorname{tr} U_2 = \sum_{f_1} \lambda(f_1) E_1 \overset{p-1}{\otimes} f_1 \overset{q-1}{\otimes} \hat{f}_1. \tag{7.6}$$

Легко видеть, что эти операторы являются снова бисимметричными. Более того, записывая (7.6) в виде

$$\operatorname{tr} U_2 = E_1 \otimes \tilde{U}_2, \quad \tilde{U}_2 = \sum \lambda(f_1) \overset{p-1}{\otimes} f_1 \overset{q-1}{\otimes} \hat{f}_1,$$

приходим к выводу, что они образуют алгебру, m-кратную обертывающей алгебре $RG(T_{q-1}^{p-1})$. С другой стороны ясно, что при аналогичной свертке компонент бисимметричного оператора произвольного вида (7.3) свойство бисимметрии, вообще говоря, теряется. Это показывает, что $RG(T_q^p)$ не исчерпывает алгебры $\overline{RS}_{p,q}$. Теорема доказана.

Следствием этого факта является то, что компоненты разложения (7.4) *не являются теперь неприводимыми* относительно обертывающей алгебры $RG(T_q^p)$, а следовательно, и относительно самого тензорного представления $G(T_q^p)$, как это было при $q=0$.

Пример. Если мы рассмотрим расслоение аффиноров $E_1^1(M)$, то группа $S_{1,1}$ сводится здесь к единице. Поэтому $\overline{RS}_{1,1}$ изоморфна полной матричной алгебре $gl(m^2)$ и, следовательно, $E_1^1(M)$ $\overline{RS}_{1,1}$-неприводимо. С другой стороны, тензорное представление группы $GL(m)$ на слое образовано операторами $f_2=f_1\oplus\hat{f}_1$ и изоморфно $SL(m)$. Относительно действия этой группы $E_1^1(M)$ становится вполне приводимым и распадается в прямую сумму расслоения аффиноров с нулевым следом и расслоения скалярных аффиноров (с одномерным слоем).

§ 8. Модульные расслоения

Изучение почти алгебраической структуры на тензорном расслоении приводит к естественному обобщению этого понятия на случай векторного расслоения. Групповую алгебру симметрической группы следует заменить тогда некоторой ассоциативной унитальной алгеброй A, для которой определено представление $\rho: A\to\mathfrak{A}\subset L(V, V)$ в алгебру всех линейных операторов типового слоя. Будем в этом случае говорить о векторном расслоении со структурой левого A-модуля или, проще, *о левом A-модульном расслоении* $E_A(M)$. При этом два левых A-модульных расслоения будем называть изоморфными, если существует изоморфизм h соответствующих векторных расслоений, удовлетворяющий условию $h(ax_2)=a(hx_2)$ для $\forall a\in A$, $\forall x_2\in V$.

Ясно, что при $A=R$ мы возвращаемся к общему понятию действительного векторного расслоения. Если $A=V$, получим *расслоение алгебр над M*. Можно говорить также об изоморфном ему регулярном A-модульном расслоении. Примером может служить уже упоминавшееся в § 7 аффинорное расслоение, типовой слой которого обладает структурой ассоциативной унитальной алгебры относительно умножения аффиноров. Эта алгебра изоморфна полной R-матричной алгебре и, следовательно, проста. Ее структурные уравнения $e_m^l e_j^k=\delta_j^l e_m^k$, если положить $e_j^i=h_j^{\alpha i}e_\alpha$, можно записать в обычном виде

$$e_\alpha e_\beta=C_{\alpha\beta}^\gamma e_\gamma \quad (\alpha,\ \beta,\ \gamma=1,\dots,m^2), \tag{8.1}$$

где структурные константы равны $C_{\alpha\beta}^\gamma=h_{k\alpha}^i h_{j\beta}^k h_i^{\gamma j}$.

Возвращаясь к общему случаю, обозначим через $\overline{\mathfrak{A}}$ алгебру эндоморфизмов A-модуля V, т. е. коммутаторную алгебру представления $\mathfrak{A}$, через $Q\subset\overline{\mathfrak{A}}$—максимальную группу ее обратимых элементов, т. е. линейную группу A-модуля V. Пусть далее $\mathfrak{A}^V$—вертикальный лифт алгебры $\mathfrak{A}$ и $\overline{\mathfrak{A}}^V$—ее коммутаторная алгебра. Тогда $G=GL(m)\times Q$ есть, очевидно, максимальная группа обратимых элементов алгебры $\overline{\mathfrak{A}}^V$. Соответствующая G-структура на $E_A(M)$ есть почти алгебраическая структура, определяемая алгеброй $\overline{\mathfrak{A}}$, а порожденная ею на $E_A(M)$ почти алгебраическая связность, вертикальная форма ω_2 которой принимает значения в алгебре $\overline{\mathfrak{A}}$, характеризуется ковариантным постоянством аффиноров, принадлежащих представлению $\mathfrak{A}$. Мы приходим, таким образом, к обобщению теоремы (11).

Если $\overline{\overline{\mathfrak{A}}}$—коммутаторная алгебра алгебры $\overline{\mathfrak{A}}$, то вообще говоря, $\mathfrak{A}\subset\overline{\overline{\mathfrak{A}}}$. Предположим, что $\mathfrak{A}=\overline{\overline{\mathfrak{A}}}$. Это, напр., всегда так, если алгебра A полупроста.

Тогда, наряду с рассмотренной выше структурой на $E_A(M)$ может быть совершенно аналогичным образом определена *взаимная почти алгебраическая структура* правого $\overline{\mathfrak{A}}$-модульного расслоения. Она определяется алгеброй $\mathfrak{A}$—коммутаторной алгеброй алгебры $\overline{\mathfrak{A}}$. Относительно любой взаимной почти алгебраической связности, вертикальная форма которой принимает значения в $\mathfrak{A}$, будут ковариантно постоянны аффиноры из алгебры $\overline{\mathfrak{A}}$.

Ситуация, более близкая к рассмотренной в предыдущих параграфах, возникает в том случае, если выполняется ряд дополнительных условий. А именно, пусть *A—симметрическая алгебра* и имеет место прямое разложение

$$A = A_V \oplus \operatorname{ann} V, \tag{8.2}$$

где $\operatorname{ann} V$—двусторонний идеал, являющийся аннулятором A-модуля V. Предположим, кроме того, что алгебра A_V *полупроста*. Тогда, как известно [5], правый $\overline{\mathfrak{A}}$-модуль вполне проводим и существует взаимно однозначное соответствие между правыми идеалами iA_V алгебры A_V и $\overline{\mathfrak{A}}$-подмодулями модуля V, каждый из которых имеет вид iV. Подмодуль iV будет неприводимым тогда и только тогда, когда $i \in A_V$—примитивный идемпотент и, следовательно, iA_V—минимальный идеал.

Таким образом, разложение главной единицы алгебры A_V в сумму примитивных идемпотентов $1 = i_1 + \ldots + i_d$ (вообще говоря, не единственное) определяет разложение алгебры в прямую сумму минимальных (правых) идеалов и вместе с тем разложение $\overline{\mathfrak{A}}$-модуля V в прямую сумму $\overline{\mathfrak{A}}$-неприводимых подмодулей: $V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_d$. Мы приходим к следующему выводу.

Теорема 16. *Пусть $E_A(M)$—левое модульное расслоение над симметрической алгеброй, удовлетворяющей условию* (8.2), *где A_V—полупростой идеал, $\overline{\mathfrak{A}}$—коммутаторная алгебра представления $\mathfrak{A} = \rho(A)$. Тогда правое $\overline{\mathfrak{A}}$-модульное расслоение $E_{\overline{\mathfrak{A}}}(M)$ вполне приводимо и распадается в прямую сумму $\overline{\mathfrak{A}}$—неприводимых модульных расслоений*

$$E_{\overline{\mathfrak{A}}}(M) = \underset{1}{E}_{\overline{\mathfrak{A}}}(M) \oplus \ldots \oplus \underset{d}{E}_{\overline{\mathfrak{A}}}(M).$$

Компоненты этого разложения изоморфны тогда и только тогда, когда изоморфны соответствующие минимальные идеалы алгебры A_V. Для почти алгебраической связности, порожденной указанной структурой, отсюда получаем обобщение теоремы (13). Отметим, наконец, что если $\mathfrak{A} = \overline{\mathfrak{A}}$, аналогичное разложение имеет место и для левого A-модульного расслоения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шапуков Б. Н. Структура тензорных расслоений, I.—Изв. вузов. Матем., 1979, № 5, с. 63—73.
2. Широков А. П. Об одном типе G-структур, определяемых алгебрами.—Тр. геометрич. семин. ВИНИТИ, т. 1, 1966, с. 425—456.
3. Гуревич Г. Б. Основы теории алгебраических инвариантов.—М., 1948.—408 с.
4. Вейль Г. Классические группы, их инварианты и представления.—М., 1947 408 с.
5. Кэртис Ч., Райнер И. Теория представлений конечных групп и ассоциативных алгебр.—М., 1969.—669 с.
6. Шапуков Б. Н. Теория кривизны векторного расслоения.—Тр. геометрич. семин. Казан. ун-та, 1976, вып. 9, с. 118—136.

г. Казань

Поступила
14 V 1979