



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. В. Павлов, О крайних лучах и интегральном представлении в конусе супермартингалов, *Теория вероятн. и ее примен.*, 1980, том 25, выпуск 3, 602–605

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.9.175

19 февраля 2025 г., 04:00:01



- [5] B. Maurey, Théorèmes de Nikishin: théorèmes de factorisation pour les applications linéaires à valeurs dans un espace L^0 , Sémin. Maurey—Schwartz, 1972—73, exp. X—XI.
- [6] D. Mouchtari, Sur l'existence d'une topologie du type Sazonov sur un espace de Banach, Sémin. Maurey—Schwartz, 1975—76, exp. XVII.

UNE RÉMARQUE SUR LES TOPOLOGIES NÉCESSAIRES ET SUFFISANTES

D. H. MUŠTARI (KAZAN)

(Resume)

On définit la notion des topologies nécessaires et suffisantes pour les fonctionnelles aléatoires linéaires à valeurs dans un L^p . Pour $p < 1$ on établit son équivalence à celle pour $p = 0$ [6].

О КРАЙНИХ ЛУЧАХ И ИНТЕГРАЛЬНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ В КОНУСЕ СУПЕРМАРТИНГАЛОВ

И. В. ПАВЛОВ

1. Введение и постановка задачи. Рассмотрим вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ вместе со стандартной системой $\ast (\mathcal{F}_t)_{t \in [0, \infty)}$. Под этим (см. [1], стр. 165) понимается возрастающий поток σ -алгебр $(\mathcal{F}_t)_{t \in [0, \infty)}$, удовлетворяющий следующим двум условиям:

а) всякое измеримое пространство (Ω, \mathcal{F}_t) есть стандартное борелевское пространство (см. [2], стр. 133), т. е. \mathcal{F}_t σ -изоморфна σ -алгебре борелевских множеств некоторого полного сепарабельного метрического пространства;

б) для всякой возрастающей последовательности $(t_i)_{i=1}^{\infty}$ положительных чисел и всякой убывающей последовательности $A_i \subset \Omega$ такой, что A_i — атом в \mathcal{F}_{t_i} , множество $\bigcap_i A_i \neq \emptyset$.

Мы будем предполагать, что $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{\infty} = \bigvee_{t \geq 0} \mathcal{F}_t$. Тогда (Ω, \mathcal{F}) — тоже стандартное борелевское пространство (см. [2], V, теорема 4.1.). Заметим также, что в произвольном борелевском пространстве (Ω, \mathcal{B}) (и даже во всяком измеримом пространстве со счетно-порожденной σ -алгеброй) для всякого $\omega \in \Omega$ существует единственный атом e_{ω} , содержащий ω , и если $B \in \mathcal{B}$, то $B = \bigcup_{\omega \in B} e_{\omega}$ (см. [2], V, теорема 2.1).

Пусть S — конус неотрицательных супермартингалов $X = \{X_t, \mathcal{F}_t, \mathbf{P}\}$ таких, что функция $E[X_t]$ непрерывна справа на $[0, \infty)$. Точнее, S — множество классов эквивалентности супермартингалов (супермартингалы $\{X_t, \mathcal{F}_t, \mathbf{P}\}$ и $\{Y_t, \mathcal{F}_t, \mathbf{P}\}$ называются эквивалентными, если $X_t = Y_t$ \mathbf{P} -п.н. для всякого $t \geq 0$). В теореме 5.2 из [1] показано, что существует взаимно однозначное соответствие (с точностью до постоянного положительного множителя) между такими классами и мерами Фельмера \mathbf{P}^X . Вероятностные меры \mathbf{P}^X определены на измеримом пространстве $(\Omega \times [0, \infty], \mathcal{P})$, где \mathcal{P} — σ -алгебра предсказуемых множеств (она порождена полуполосами вида

* В [1] аналогичная стандартная система обозначена через (\mathcal{F}_t^0) , а супермартингалы, адаптированные к ней, помечены волликами.

$A \times (t, \infty], t \geq 0, A \in \mathcal{F}_t$, а P^X задана так:

$$P^X [A \times (t, \infty]] = \frac{1}{E [X_0]} \int_A X_t dP.$$

Положим $S_1 = \{X \in S \mid E [X_0] = 1\}$, а множество крайних точек этого выпуклого множества обозначим через ∂S_1 . Теорема Фельмера (см. [1], теорема 5.5) утверждает, что $X \in \partial S_1$ тогда и только тогда, когда P^X принимает лишь два значения: 0 и 1.

Нашей задачей является описание всех элементов множества ∂S_1 и исследование возможности интегрального представления Шоке супермартигалов из S_1 через элементы множества ∂S_1 .

2. Характеристика множества ∂S_1 . Пусть $X \in \partial S_1$. Так как $\Omega \times [s, t] \in \mathcal{P}$ для любых $s < t$, то при любом n существует единственный отрезок $[i/2^n, (i+1)/2^n], 0 \leq i \leq \infty$, для которого

$$P^X [\Omega \times [i/2^n, (i+1)/2^n]] = 1.$$

Отсюда легко следует, что существует $t (0 < t \leq \infty)$ такое, что

$$P^X [\Omega \times \{t\}] = 1.$$

Далее, известно (см. [3], доп. 1), что след \mathcal{P} на $\Omega \times \{t\}$ есть σ -алгебра $\mathcal{F}_{t-}^* = \mathcal{F}_{t-} \times \{\emptyset, \{t\}\}$, так что P^X на $(\Omega \times \{t\}, \mathcal{F}_{t-}^*)$ принимает только значения 0 и 1. Так как $(\Omega \times \{t\}, \mathcal{F}_{t-}^*)$ — стандартное борелевское пространство (см. [1], (6.1)), то существует множество A_t , являющееся атомом в \mathcal{F}_{t-} и такое, что $P^X [A_t \times \{t\}] = 1$.

Обратно, пусть $0 < t \leq \infty$ и A_t — атом в \mathcal{F}_{t-} ; очевидно, $A_t \times \{t\}$ — атом в \mathcal{P} . Рассмотрим такую вероятностную меру \bar{P} на $(\Omega \times [0, \infty], \mathcal{P})$, что $\bar{P} [A_t \times \{t\}] = 1$. Замечая, что A_t единственным образом представляется в виде $A_t = \bigcap_{s < t} A_s$, где $A_s \supset A_t$ и A_s — атом в \mathcal{F}_s , рассмотрим два случая:

1) Пусть $P [A_s] > 0$ для всякого $s < t \leq \infty$. Тогда рассмотрим супермартигал $X = \{X_s, \mathcal{F}_s, P\}$, где

$$X_s(\omega) = \begin{cases} 1/P [A_s], & \omega \in A_s, \\ 0, & \omega \in A_s^c, \text{ при } s < t, \end{cases} \quad X_s(\omega) = 0 \text{ при } s \geq t \text{ (если } t < \infty).$$

Очевидно, $\bar{P} = P^X$ и $X \in \partial S_1$. Заметим, что если при этом и $P [A_t] > 0$, то X — супермартигал класса (D). Если же $P [A_t] = 0$, то X — локальный мартигал.

2) Пусть существует $u < t$ такое, что $P [A_s] = 0$ при $u < s < t$. Тогда из $A_t \times \{t\} \subset A_s \times (s, \infty]$ следует, что $P^X [A_t \times \{t\}] = 0$ для всякого $X \in S_1$ и, следовательно, не существует $X \in S_1$ такого, что $P^X = \bar{P}$.

Итак, мы получили взаимно однозначное соответствие между ∂S_1 и множеством атомов $A_t \times \{t\}$ в \mathcal{P} , у которых A_t является пересечением атомов положительной P -вероятности.

3. Критерий существования представления Шоке. Разложим вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}_{t-}, P)$ на не более чем счетную совокупность атомов $A_t^n \in \mathcal{F}_{t-}$, $n = 1, 2, \dots$, для которых $P [A_t^n] > 0$, и на множество $\Omega \setminus \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_t^n \right) \in \mathcal{F}_{t-}$, на котором вероятность P распределена непрерывно (см. [4], стр. 37, доп. 4.3).

Рассмотрим объединение M_t тех атомов $A_t \in \mathcal{F}_{t-}$, которые являются пересечениями атомов положительной P -вероятности. Тогда $M_t = \bigcap_{s < t} \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_s^n \right)$ и $M_t \in \mathcal{F}_{t-}$, так как

множества $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_s^n$ вложены и поэтому внешнее пересечение можно считать счетным. Следовательно, и $N_t = \Omega \setminus M_t$, являющееся объединением атомов, которые представляются пересечением атомов нулевой P -вероятности, принадлежит \mathcal{F}_{t-} . Рассмотрим множество $\bar{N} = \bigcup_{0 < t \leq \infty} N_t \times [t, \infty]$. Легко видеть, что $\bar{N} = \bigcup_{p=1}^{\infty} \bigcup_{q=1}^{\infty} N_{p/q} \times (p/q, \infty]$, и, следовательно, $\bar{N} \in \mathcal{P}$.

Предложение 1. Супермартингал $X \in S_1$ допускает представление Шоке через элементы ∂S_1 тогда и только тогда, когда P^X не нагружает множество \bar{N} .

Доказательство. Всякому множеству $A \in \mathcal{P}$ поставим в соответствие множество $\tilde{A} \in \partial S_1$ следующим образом:

$$\tilde{A} = \{Z \in \partial S_1 \mid P^Z[\bar{A}] = 1\}.$$

Очевидно, множество таких \tilde{A} образует σ -алгебру на ∂S_1 , которую мы обозначим через \mathcal{K} .

1) Пусть $X \in S_1$ является барицентром некоторой вероятностной меры \tilde{P}^X на $(\partial S_1, \mathcal{B})$, где \mathcal{B} — некоторая σ -алгебра. Используя следствие 5.7 из [1], заключаем, что σ -алгебры с мерами (P^X, \mathcal{P}) и $(\tilde{P}^X, \mathcal{B})$ изоморфны и изоморфизм осуществляется отображением $A \rightarrow \tilde{A}$. Теперь имеем $P^X[\bar{N}] = \tilde{P}^X[\bar{N}] = 0$, так как $\bar{N} = \emptyset$.

2) Обозначим $\bar{M} = (\Omega \times (0, \infty]) \setminus \bar{N}$. Пусть $X \in S_1$ и $P^X[\bar{N}] = 0$. Учитывая это и тот факт, что отображение $A \rightarrow \tilde{A}$ устанавливает взаимно однозначное соответствие между атомами измеримого пространства $(\bar{M}, \mathcal{P}|_{\bar{M}})$ и элементами множества ∂S_1 , заключаем, что формула $\tilde{P}^X[\tilde{A}] = P^X[A]$ корректно определяет вероятностную меру \tilde{P}^X на $(\partial S_1, \mathcal{K})$. Теперь имеем при $A \in \mathcal{F}_t, t \geq 0$:

$$\begin{aligned} \int_{\partial S_1} E[Z_t; A] \tilde{P}^X(dZ) &= \int_{\partial S_1} P^Z[A \times (t, \infty)] \tilde{P}^X(dZ) = \int_{A \times (t, \infty)} \tilde{P}^X(dZ) = \\ &= \tilde{P}^X[A \times (t, \infty)] = P^X[A \times (t, \infty)] = E[X_t; A]. \end{aligned}$$

Для всех $t \geq 0, A \in \mathcal{F}_t$ получили равенство

$$E[X_t; A] = \int_{\partial S_1} E[Z_t; A] \tilde{P}^X(dZ),$$

которое представляет X в виде барицентра меры \tilde{P}^X .

Следствие 1. Для того чтобы представление Шоке существовало для всякого $X \in S_1$, необходимо и достаточно, чтобы для всякого $t (0 < t < \infty)$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_t^n) = 1.$$

Доказательство. Достаточность очевидна. Докажем необходимость. Пусть

существует $t (0 < t < \infty)$ такое, что $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_t^n) < 1$. Обозначив $\Omega_s = \Omega \setminus \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_s^n\right)$,

заметим, что из $s < s'$ вытекает $\Omega_s \subset \Omega_{s'}$. Получаем, что $P(\Omega_s) > 0$ для всякого $s \geq t$. Зафиксируем некоторое $s > t$. Очевидно, $\lim_{u \uparrow s} \Omega_u = N_s$ и, следовательно,

$P[N_s] > 0$. Рассмотрим вероятностную меру \bar{P} на $(\Omega \times [0, \infty], \mathcal{P})$, заданную так: если $A \subset N_s$ и $A \in \mathcal{F}_{s-}$, то $\bar{P}[A \times \{s\}] = P[A]/P[N_s]$. Очевидно, что $\bar{P} = P^X$, где X — положительный супермартингал, задающийся формулой:

$$X_u = \begin{cases} P[N_s | \mathcal{F}_u]/P[N_s], & u < s, \\ 0, & u \geq s. \end{cases}$$

Имеем: $\bar{P}[\bar{N}] = \bar{P}[N_s \times \{s\}] = P[N_s]/P[N_s] = 1$. Используя предложение 1, заключаем, что X не допускает представления Шоке.

Следствие 2. Для того чтобы представление Шоке существовало для всякого $X \in S_1$, необходимо и достаточно, чтобы для всякого $t (0 < t < \infty)$ вероятностная мера P была дискретна на (Ω, \mathcal{F}_t) .

Это следствие доказывается применением следствия 1.

Следствие 3. Пусть $S_1^0 = \{X \in S_1 \mid X \text{ — мартингал}\}$. Для того чтобы представление Шоке существовало для всякого $X \in S_1^0$ (через элементы ∂S_1^0), необходимо и достаточно, чтобы для всякого $t (0 < t < \infty)$ вероятностная мера P была дискретна на (Ω, \mathcal{F}_t) .

Доказывается так же, как следствие 1.

Теперь мы установим связь полученных здесь результатов с результатами работы Фельмера [5]. Сформулируем сначала в наших терминах одно утверждение из этой работы (теорему 4.4) *.

Предложение 2. *Предположим, что существует семейство $(m_t, 0 < t < \infty)$ σ -конечных мер m_t на \mathcal{F}_t таких, что для всякого t ($0 < t < \infty$)*

$$\delta_\omega^t \ll m_t \text{ на } \mathcal{F}_t \text{ для } \mathbf{P}\text{-почти всех } \omega \quad (1)$$

(δ_ω^t — вероятностная мера, равная 1 на атоме из \mathcal{F}_t , содержащем ω). Тогда представление Шоке существует для всякого $X \in S_1^0$ через элементы ∂S_1^0 .

Мы докажем более сильное утверждение.

Предложение 2'. *Для того чтобы представление Шоке существовало для всякого $X \in S_1$, необходимо и достаточно, чтобы существовало семейство мер $(m_t, 0 < t < \infty)$, обладающих свойством (1).*

Доказательство. Докажем сначала необходимость. В силу следствия 2 получаем, что для всякого t ($0 < t < \infty$) мера \mathbf{P} дискретна на (Ω, \mathcal{F}_t) , т. е. существует не более чем счетное множество таких атомов $\{B_i^n\}_{n=1}^\infty$ в \mathcal{F}_t , что $\mathbf{P}[B_i^n] > 0$ и $\sum_{n=1}^\infty \mathbf{P}[B_i^n] = 1$. Теперь очевидно, что для всякого t ($0 < t < \infty$) можно положить $m_t = \mathbf{P}$.

Докажем достаточность. Пусть выполняется условие (1). Его можно записать так: для всякого t ($0 < t < \infty$) $\delta_\omega^t \ll m_t$ на \mathcal{F}_t для всякого $\omega \in \Omega \setminus K_t$ ($K_t \in \mathcal{F}_t, \mathbf{P}(K_t) = 0$). Получаем, что m_t должна нагружать каждый атом \mathcal{F}_t , который входит в $\Omega \setminus K_t$. Но это возможно только тогда, когда $\Omega \setminus K_t$ является счетным объединением атомов \mathcal{F}_t . Отсюда следует, что \mathbf{P} дискретна на (Ω, \mathcal{F}_t) .

Поступила в редакцию
12.6.78.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] H. Föllmer, The exit measure of a supermartingale, Z. Wahrscheinlichkeitstheor. verw. Geb., 21, 2(1972), 154—166.
- [2] K. P. Parthasarathy, Probability measures on metric spaces, New York—London, Acad. Press, 1967.
- [3] P. A. Meyer, Guide détaillé de la theory «général» des processus, Lect. Notes Math., 51 (1968), 140—165.
- [4] Ж. Неве. Математические основы теории вероятностей, М., изд-во «Мир», 1969.
- [5] H. Föllmer, Phase transition and Martin Boundary, Lect. Notes Math., 465 (1975), 305—317.

ON EXTREME RAYS AND INTEGRAL REPRESENTATION IN A SUPERMARTINGALE'S CONE

I. V. PAVLOV (ROSTOV-NA-DONU)

(Summary)

We investigate the structure of the extreme points of the set S_1 of supermartingales with the unit mean at 0; the conditions for the points $x \in S_1$ may be represented in the form of the integral over the set of this extreme points are given also.

* На самом деле Фельмер в этой теореме получил более общий результат, из которого, однако, предложение 2' не вытекает.